الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ecole Normale Supérieure
Bou Saâda
Dép. Mathématiques

المدرسة العليا للأساتذة -بوسعادة
المجاهد الفريق أحمد قايد صالح
قسم الرياضيات

مطبوعة دروس بعنوان:

محاضرات الإحصاء و الاحتمالات 1
(ر 314)

المستوى: سنة ثالثة رياضيات - متوسط و ثانوي -.

الأستاذ: سماتي عبد اللطيف.

الرتبة: أستاذ محاضر صنف ب.

السنة الجامعية :2022\2023م

فهرس المحتويات

الفصل الثالث: المتغير العشوائي الحقيقي 79

الفصل الرابع: بعض التوزيعات الاحتمالية الشهيرة 95

الفصل الخامس: الثنائية العشوائية 110

فهرس الجداول

فهرس الأشكال و التمثيلات البيانية

مصطلحات الإحصاء و الاحتمالات

English Terms	المصطلح بالعربية
Probability	احتمال
Inferential statistics	احصاء استدلالي
Descriptive statistics	احصاء وصفي
Data	البيانات
Experiments	تجارب
Geometric Mean	المتوسط الهندسي
Harmonic Mean	المتوسط التوافقي
Quadratic Mean	المتوسط التربيعي
Mediane	الوسيط
Cumulative Frequency	التكرار التراكمي
Relative Frequency	التكرار النسبي
Combinatorial analysis	التحليل التوفيقي
Permutations	التباديل
Arrangement	التراتيب
combination	التوفيقات
Randomized Trials	التجارب العشوائية
Probabilistic Space	الفضاء الاحتمالي
Probability Distribution	التوزيع الاحتمالي
Binomial Distribution	توزيع ذي الحدين
Poisson Distribution	توزيع بواسون
Normal Distribution	التوزيع الطبيعي
Standard Normal Distribution	التوزيع الطبيعي المعياري
Correlation Coefficient	معامل الارتباط
Random Sample	عينة عشوائية
Space of Events	فضاء الحوادث
Conditional Probability	الاحتمال الشرطي
The Real Random Variable	المتغير العشوائي الحقيقي
Mathematical Expectation	التوقع الرياضي
Variance	التباين
Moment	العزم
The Moment Generating Function (m,g,f)	الدالة المولدة للعزوم

مقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم، و الصلاة و السلام على سيدنا محمد، أما بعد:

يعتبر الإحصاء الوصفي والاحتمالات أدوات قوية تمكننا من فهم العالم من حولنا، من خلال دراسة البيانات والظواهر العشوائية وتحليلها بشكل أفضل لاتخاذ قرارات أكثر دقة وفهم الظواهر المعقدة. حيث يمثل الإحصاء الوصفي المرحلة الأولى في العملية الإحصائية، و يتم فيها جمع البيانات وتلخيصها بواسطة أدوات وتقنيات إحصائية مختلفة، من خلال عرضها في جداول إحصائية و بيانات مختلفة كالأعمدة و المدرجات التكرارية... ، مما يساعدنا على حساب المتوسطات والانحرافات المعيارية والعديد من الأساليب الأخرى لتلخيص وتحليل البيانات. بينما تتناول الاحتمالات الدراسة النظرية والتطبيقات العملية للظواهر العشوائية، فهي تعتمد على المفاهيم الأساسية مثل التحليل التوفيقي، المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية للقيام بتحليلات استنتاجية واتخاذ القرارات و تطوير نماذج رياضية للتفسير والتنبؤ بالأحداث المستقبلية في مجالات متنوعة مثل العلوم الطبيعية والاقتصاد والهندسة والعلوم الاجتماعية.

و بناء على ذلك تم إنجاز هذه المطبوعة و التي هي موجهة خاصة لطلبة السنة ثالثة رياضيات بالمدارس العليا للأساتذة، و عامة لكل القراء و المهتمين بعلم الإحصاء و الاحتمالات في مختلف التخصصات و المراحل العلمية في الجامعات الجزائرية، و تتضمن دروس مقياس إحصاء و احتمالات 1 (ر314)، مدعمة بأمثلة متنوعة و بعض المسائل المحلولة لترسيخ المفاهيم.

و تم البدء فيها بالإحصاء الوصفي لكونه لا يعتمد على نظرية الاحتمالات، و ليتسنى للطلبة التقدم في دروس نظرية القياس و المكاملة للاستفادة منها لدراسة قياس الاحتمال و الفضاء الاحتمالي، و كثير من المفاهيم الرياضية لنظرية الاحتمالات التي يمكن أن تستنتج من نظرية القياس و المكاملة نذكر منها على سبيل المثال: الفضاء الاحتمالي (الفضاء المقيس)، قياس الاحتمال(القياس الموجب عموما)، عشيرة الأحداث (العشيرة عموما) و المتغير العشوائي(التابع القابل للقياس).

و مما يميز هذه المطبوعة احتوائها على أمثلة و مسائل من واقع حياتنا، نذكر منها على سبيل المثال: انتشار وباء كورونا (Covid 19) ، التقسيم الإداري الجديد للجزائر (ترقية 10 ولايات منتدبة إلى ولايات كاملة بقرار مجلس الوزراء في 26 نوفمبر 2019م)، و كذلك ألعاب البحر الأبيض المتوسط وهران 2022م.

و قد تم في هذه المطبوعة تنظيم الإحصاء الوصفي في أربعة فصول، و الاحتمالات في خمسة فصول و هي كالآتي:

بالنسبة للإحصاء الوصفي تناول **الفصل الأول** المفاهيم الأساسية لعلم الإحصاء من مصطلحات و خطوات البحث الإحصائي و العروض الجدولية و البيانية للمعطيات الإحصائية. أما **الفصل الثاني** فتطرقنا فيه لأهم مقاييس النزعة المركزية كالمتوسط الحسابي و مشتقاته (الهندسي، التوافقي و التربيعي)، الوسيط، الربيعيات و المنوال، و أخيرا العلاقة بين هذه المقاييس، و في **الفصل الثالث** ذكرنا أهم مقاييس التشتت كالمدى، المدى الربيعي و الانحراف المعياري، الانحراف المتوسط، التباين و معامل الاختلاف، و أخيرا في **الفصل الرابع** درسنا العلاقة بين الظواهر المختلفة من خلال رسم لوحة الانتشار و مستقيم الانحدار، و حساب كلا من التغاير المشترك و معامل الارتباط.

أما بالنسبة للاحتمالات، فبدأنا في **الفصل الأول** بتذكير بالتحليل التوفيقي، كالتباديل، التراتيب و التوفيقات، و كذلك أنواع السحب، و في **الفصل الثاني** تطرقنا إلى مفهوم كلا من التجارب و الفضاءات العشوائية، الاحتمالات الشرطية و الاستقلال و أيضا نظريتي الاحتمالات الكلية و بايز، و في **الفصل الثالث** تناولنا المتغير العشوائي بنوعيه المتقطع و المستمر، العزوم و كذلك متباينتي تشيبتشيف و ماركوف، أما في **الفصل الرابع** فقد تطرقنا إلى أشهر التوزيعات الاحتمالية الشهيرة بنوعيها المتقطعة (برنولي، ذي الحدين و بواسون) و المستمرة (الطبيعي و الطبيعي المعياري) و ذكر العلاقة بين هذه التوزيعات و التقريبات فيما بينها، و أخيرا ختمنا هذه المطبوعة بالفصل الخامس الذي عممنا فيه مفهوم المتغير العشوائي إلى الثنائية العشوائية و تناولنا فيه التابع التوزيعي المشترك و التوقع للدوال ذات المتغيرين العشوائيين و الارتباط.

و في الأخير نسأل الله عز و جل أن ينفع بهذا العمل المتواضع الطلاب، و يجزينا عنه خير الجزاء.
ملاحظة: لكل ملاحظاتكم يسرنا تواصلكم معنا على البريد الالكتروني أسفله.

و الله الموفق

د. سماتي عبد اللطيف

بوسعادة في 2023/05/28

smati.abdellatif@ens-bousaada.dz أو smatilotfi@gmail.com

الفصل الأول: المفاهيم الأساسية لعلم الإحصاء

سنتناول في هذا الفصل:

- المجتمع الاحصائي، المتغير الاحصائي
- جمع المعلومات، طرق تصنيفها و عرضها.
- أمثلة عن السلاسل الاحصائية البسيطة و المضاعفة.

الباب الأول: الإحصاء الوصفي

1. الفصل الأول: المفاهيم الأساسية لعلم الإحصاء

من المفاهيم الشائعة بين الناس عن الإحصاء أنه عبارة عن أرقام و بيانات فقط تعبر عن ظاهرة معينة كأعداد السكان و نسب النجاح و غير ذلك، و هذا مفهوم محدود لعلم الإحصاء، و لكن الإحصاء كعلم هو مجموعة طرق علمية بواسطتها نجمع، ننظم، نلخص، نمثل، و نشرح المعطيات بشكل يمكن الاستفادة منه للوصول إلى قرارات سليمة في ظل ظروف عدم التأكد.

يمكن تقسيم علم الإحصاء إلى نوعين رئيسيين هما:

- الإحصاء الوصفي (Descriptive Statistics) : يختص هذا النوع بأساليب جمع البيانات و تبويبها و عرضها، حيث تلخص البيانات و يتم اختزالها إلى معلومة أو أكثر في شكل جداول تكرارية و رسومات بيانية مع حساب بعض المقاييس الإحصائية (المتوسطات، النسب، ...).
- الإحصاء الاستدلالي (الاستقرائي) (Inferential Statistical): يختص هذا النوع من الإحصاء باستنتاج و اتخاذ القرارات المناسبة للظاهرة قيد الدراسة مع حساب درجة الثقة المصاحبة لتلك القرارات و الاستنتاجات، حيث يعمم حكم الجزء على الكل.

1.1 مصطلحات إحصائية

- ❖ **المجتمع الإحصائي:** هو كل مجموعة تخضع لدراسة ظاهرة معينة مثل: طلبة المدرسة العليا للأساتذة بوسعادة. و غالبا ما يكون المجتمع الإحصائي كبيرا و عليه نلجأ لدراسة جزء من مفرداته يطلق عليه تسمية عينة.
- ❖ **العينة:** هي كل مجموعة جزئية غير خالية من المجتمع الاحصائي، مثلا طلبة قسم من أقسام المدرسة، و يتم اختيار مفرداتها حيث يكون لكل مفردة من مفردات المجتمع نفس الفرصة بأن تكون ضمن مفردات العينة و ذلك حتى تمثل المجتمع أحسن تمثيل، و يختلف حجم العينة حسب أهمية الدراسة و حسب الإمكانيات المادية و البشرية.
  - **العينة العشوائية البسيطة:** يعطى لكل فرد من أفراد المجتمع نفس الحظ من الاختيار و هناك جداول تساعد في هذا الشأن "جداول العشوائية" وهي مصفوفات أرقام.[1]

مثال:

المطلوب اختيار عينة عشوائية بسيطة حجمها 6 مفردات من مجتمع حجمه 500 مفردة باستخدام جدول الأعداد العشوائية الآتي:

جدول (01): جدول الأعداد العشوائية.

---

[1] حاكم قصد علي سهام ، الاحتمالات و الإحصاء، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة البشير البراهيمي، 2007/2008م، ص 48

9854	1236	3920	9821	1986	3915	1856
2364	3971	2031	3987	3658	1298	3218
3987	2332	3980	6541	6547	6751	6652
3210	3921	6521	9712	1289	1365	2325

نعطي لكل عنصر من المجتمع رقما تسلسليا من 001 إلى 500، ثم نأخذ العدد المكون من الثلاث أرقام الأولى من يمين أي عدد في جدول العشوائية (لأن 500 مكون من 3 أرقام) فنتحصل على الجدول التالي:

854	236	920	821	986	915	856
364	971	031	987	658	298	218
987	332	980	541	547	751	652
210	921	521	712	289	365	325

ثم نأخذ أول 6 أعداد أصغر من 500 و هي 218، 325، 298، 365، 289، 31. (اخترنا الأعمدة من اليمين لليسار)

- **العينة الطبقية:** إذا كان المجتمع مقسم إلى طبقات متجانسة في ظاهرة لها علاقة بالمتغير المطلوب دراسته، فيتم سحب عينة عشوائية من كل طبقة و نشكل بها عينات كلية، مثلا في الاستعراضات العسكرية يتم اختيار عينة عشوائية من كل من القوات المسلحة البرية، البحرية و الجوية لتتشكل لنا عينة كلية.[2]
- **العينة المرحلية:** و يتم فيها اختيار العينة على مراحل و ذلك عندما يكون مجتمع البحث كبير.

مثال: إذا أردنا معرفة معدلات النمو الجسمي للطفل الجزائري في مرحلتي الطفولة و المراهقة، فإننا نختار عشوائيا عددا من الولايات و نختار منها عشوائيا بعض البلديات، ثم نختار داخل كل بلدية عددا من القرى عشوائيا، ونعتبر ما نحصل عليه من بيانات ممثلا للمجتمع كله.

- **العينة المنتظمة:** إذا أردنا عينة من مكونة من 5 طلبة من قائمة تشتمل على 50 طالبا هذا يعني سحب طالب واحد من كل 10، أي أننا نختار طالبا من العشرة الأولين، ثم نختار الباقي بطريقة منتظمة، و لو كان الرقم الأول 2 فتكون العينة 2، 12، 22، 32، 42 .

❖ **المتغير الإحصائي:** هو تلك الصفة أو الكمية القابلة للتغير من فرد لآخر أو من مشاهدة لأخرى و التي تسمح بتفريق هؤلاء من أولئك و تصنفهم، و يطلق على القيمة التي تعطى لها اسم قيمة المتغير الإحصائي و يمكن تصنيف المتغير الإحصائي إلى قسمين:

[2] حاكم قصد علي سهام، مرجع سابق، ص 48

- **المتغير النوعي (الكيفي):** هي تلك المتغيرات أو الظواهر التي لا يمكن قياسها عدديا بل قياس تكرارها فقط أو هي عبارة عن صفات أو أنواع ليست عددية منها ما هو قابل للترتيب مثل مستويات النمو الاقتصادي، المستوى التعليمي، الرتب العسكرية، تقديرات النجاح و غيرها. و منها ما هو غير قابل للترتيب مثل الجنسية، أنواع الأمراض، الحالة العائلية و غيرها.
- **المتغير الكمي (العددي):** هي تلك المتغيرات التي يمكن التعبير عنها عدديا، منها المنفصلة (المتقطعة) مثل: عدد الأطفال في أسرة، عدد الطلاب في مراحل التعليم المختلفة ...إلخ. و منها المتصلة (المستمرة) و هي التي تأخذ كل القيم الممكنة لمجال الدراسة. و بصفة عامة يعتبر المتغير مستمرا إذا كان مرتبطا بالزمن (السرعة، السن،...) أو الكتلة (الوزن، الكثافة،...) أو النقود (الدخل، الأجر، السعر...) أو الفضاء (الطول، المساحة،...).

❖ **السلسلة الإحصائية:** هي مجموعة البيانات المحصل عليها الموافقة لخاصية من الخصائص.

2.1 خطوات البحث الإحصائي[3]

يمكن دراسة ظاهرة معينة بشكل علمي و دقيق وذلك بجمع بيانات معينة و إتباع الخطوات التي من أهمها:

1. تحديد الهدف المنشود من طرف البحث.
2. تحديد المجتمع المراد دراسته.
3. تحديد المصادر التي فيها المعلومات (مصادر تاريخية و مصادر ميدانية).

المصدر التاريخي: الكتب، المنشورات، الصحف، المجلات العلمية، تعد من المصادر التاريخية حيث يجب تحري الدقة و اخذ المعلومات من مصادرها الصحيحة.

المصدر الميداني: الباحث أو المكلف بالبحث ينزل إلى الميدان و يقوم بجمع المعلومات.

4. تصنيف البيانات و عرضها.
5. تحليل البيانات.
6. استخلاص النتائج و تفسيرها و اتخاذ القرار المناسب.

3.1 العرض الجدولي للبيانات الإحصائية

بعد جمع البيانات الإحصائية نجد مجموعة كبيرة من الحقائق غير المنظمة والمتواجدة في الاستمارات والتي يتعذر علينا استيعابها أو استخلاص أية نتائج منها وهي على هذه الصورة، لهذا وجب تنظيم هذه البيانات بطريقة تسهل دراستها والاستفادة منها، ويتم ذلك بتصنيفها وتقسيمها إلى مجموعات متجانسة ووضعها في صورة جداول تلخيصية، ويتوقف هذا التقسيم على طبيعة البيانات وعلى الغرض والهدف من البحث[4].

---

[3] حاكم قصد علي سهام ، الاحتمالات و الإحصاء، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة البشير البراهيمي، 2008/2007م، ص 47

[4] عاشور حيدوشي ، محاضرات في الإحصاء الوصفي، جامعة آكلي محند اولحاج، البويرة، 2016/2015م، ص 16

تعريف العرض الجدولي :العرض الجدولي للبيانات يقصد به وضع البيانات الأولية الخاصة بالظاهرة بعد جمعها في جداول نهائية تتكون في الأساس من سطرين، يبيّن السطر الأول قيم الظاهرة أو المتغير المدروس، وتكون هذه القيم على شكل صفات أو قيم نقطية أو مجالات (فئات)، أما السطر الثاني فيحتوي على تكرارات هذه الصفات أو القيم أو المجالات.

أنواع الجداول الإحصائية:

تختلف الجداول الإحصائية باختلاف نوع البيانات من ناحية والغرض من الدراسة من ناحية أخرى ومن أهمها:

- **جداول التوزيع التكراري البسيطة:**

يمثل طريقة تنظيم البيانات الخام للظاهرة (المتغير) وتبويبها في جداول تضم صفات أو قيم الظاهرة والتكرارات المقابلة لها لغرض دراستها وتحليلها، ويستخدم هذا النوع من الجداول لوصف وتلخيص البيانات التي تتعلق بظاهرة واحدة فقط سواء كانت كيفية أو كمية.

مثال 1 : (متغير كيفي)

البيانات التالية تبيّن فصائل الدم لعشرين مريض أجريت لهم عمليات جراحية في المستشفى خلال أسبوع معين:

$O , AB , O , B , A , B , O , A , B , O , A , O , A , B , O , B , O , O , AB , A$

المطلوب :عرض هذه البيانات في جدول توزيع تكراري

حل:

جدول (2): توزيع عدد المرضى حسب فصائل الدم

فصيلة الدم (X_i)	A	B	AB	O	المجموع Σ
عدد المرضى (n_i)	5	5	2	8	20

إن وضع البيانات بهذه الصورة أصبح أكثر وضوحا لمعرفة عدة معلومات كانت غير واضحة في الصورة الخام، فمثلا من السهل الآن معرفة عدد المرضى الذين لديهم نفس فصيلة الدم، والفصيلة الأكثر انتشارا بين المرضى.

مثال 2:(متغير كمي)

أراد مسير مالي لشركة أن ينظم توزيع الأجور الشهرية (الوحدة 10^3دج) التي حصل عليها 42 عامل، و التي هي مبينة في السلسلة التالية:

جدول (3): توزيع عدد العمال حسب أجورهم الشهرية.

14	45	42	35	40	50	65
26	52	51	35	16	42	38
23	66	64	39	67	50	53
55	67	38	53	63	57	15
40	14	42	46	30	56	49
56	64	49	24	26	60	52

المطلوب:

توضيح المعالم الأساسية لهذه البيانات وذلك من خلال وضعها في جدول توزيع تكراري.

حل:

على الرغم من أن عدد القيم لا يتعدى الـ 42 مشاهدة فإنه من الصعب أن تكون لنا فكرة واضحة وسريعة عن هذه القيم، لهذا وجب ترتيبها وحصرها في فئات ثم وضعها في جدول توزيع تكراري، ومن أجل ذلك نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد المدى: من خلال المعطيات السابقة نجد أنّ أقل أجر يتقاضاه العمال هو 14×10^3دج ، بينما أعلى أجر يبلغ 67×10^3دج

ومنه فإن المدى هو: $R = X_{max} - X_{min} = 67 - 14 = 53$

ب- تحديد عدد الفئات: إن استخدام عدد قليل من الفئات يؤدي إلى تسهيل العمليات الحسابية مع انخفاض الدقة، بينما يؤدي زيادة عدد الفئات إلى كثرة العمليات الحسابية غير أنها تزيد من الدقة، ويتحدد عدد الفئات بظروف الظاهرة قيد الدراسة و وجهة نظر الباحث، وعلى العموم فمن الأفضل ألا يقل عدد الفئات عن خمسة (5) ولا يزيد عن خمسة عشر (15فئة)، ونظرا لوجود اختلافات في تحديد عدد الفئات فبات من الضروري استعمال إحدى المعادلات المتفق عليها و منها:[5]

- **معادلة ستيرجس(Sturges):** تعطى بالصيغة التالية:

$$K = 1 + 3,322 \log(n)$$

حيث K: عدد الفئات، n: عدد القيم، $\log(n)$: اللوغاريتم العشري

- **معادلة يول(Yule):** تعطى بالعلاقة التالية :

$$K = 2.5\sqrt[4]{n}$$

ولتحديد عدد الفئات في مثالنا هذا سنعتمد على المعادلة الأكثر استخداما وهي معادلة ستيرجس.

$$K = 1 + 3,322 \log(n) = 1 + 3,322 \log(42) = 1 + 3,322 \times 1.623 = 6.39 \approx 6 \quad \text{(بالتدوير)}$$

عدد الفئات هو: 6

ج- تحديد طول الفئة: يتم تحديد طول الفئة بالعلاقة التالية:

$$L = \frac{R}{K} = \frac{53}{6} = 8.83 \approx 9$$

حيث: L: طول الفئة(نأخذ القيمة المقربة بالزيادة) ، R: المدى، K: عدد الفئات. و منه طول الفئة هو 9

ملاحظة: عند تحديد طول الفئة يجب مراعاة المتباينة التالية:

المدى $\leq$ عدد الفئات $\times$ طول الفئة

و في مثالنا: $9 \times 6 = 54 > 53$

د- الجدولة: عملية الجدولة هي إفراغ البيانات في جدول التوزيع التكراري.

الجدول (4): يمثل توزيع العمال حسب درجات الأجور الشهرية.

[5] علي عبد السلام العماري وعلي حسين العجيلي: " الإحصاء والاحتمالات النظرية والتطبيق"، منشورات 2000. ،مالطا، ELGA ، ص 18

فئات الأجر X_i	$[14-23[$	$[23-32[$	$[32-41[$	$[41-50[$	$[50-59[$	$[59-68[$	Σ
عددالعمال (n_i)	4	5	7	7	11	8	42
مراكز الفئات C_i	18.5	27.5	36.5	45.5	54.5	63.5	-

بعد إعداد جدول التوزيع التكراري يكون من المناسب في أغلب الأحيان عرض البيانات في شكل توزيع تكراري نسبي (التواتر) للتعبير عن الأهمية النسبية لتكرار كل فئة بالنسبة لإجمالي التكرارات، ويحسب التكرار النسبي بالصيغة التالية: $f_i = \frac{n_i}{\sum n_i}$

ملاحظات:

- مجموع التكرارات النسبية يساوي 1 و نكتب: $\sum f_i = 1$
- يمكن تحويل التكرار النسبي إلى نسبة مئوية و هذا بضربه في 100.

كما يمكن أن نحتاج إلى معلومات إضافية عن البيانات، فمثلا :قد نحتاج إلى معرفة المفردات التي تقل قيمتها أو تزيد عن حد معيّن، وهذه المعلومات نحصل عليها من خلال إيجاد التكرارات المتجمعة الصاعدة والنازلة:

التكرار المتجمع الصاعد: يمثل التكرار المتجمع الصاعد لفئة معينة مجموع الأفراد الذين تقل قيمتهم الإحصائية عن الحد الأعلى للفئة المقابلة.

التكرار المتجمع النازل: يمثل التكرار المتجمع النازل لفئة معينة مجموع الأفراد الذين تزيد قيمتهم الإحصائية عن الحد الأدنى للفئة المقابلة.

الجدول (5) يمثل التكرار النسبي و النسبة المئوية و التكرار المتجمع الصاعد و النازل للمثال السابق:

فئات الأجر X_i	$[14-23[$	$[23-32[$	$[32-41[$	$[41-50[$	$[50-59[$	$[59-68[$	Σ
عدد العمال n_i	4	5	7	7	11	8	42
التكرار النسبي f_i	0.095	0.12	0.17	0.17	0.26	0.19	1
النسبة المئوية %	9.5	12	17	17	26	19	100
التكرار المتجمع الصاعد $N\uparrow$	4	9=5+4	16=7+9	23=7+16	34=11+23	42=8+34	-
التكرار المتجمع النازل $N\downarrow$	42	38=4-42	33=5-38	26=7-33	19=7-26	8=11-19	-

جداول التوزيع التكراري المزدوجة:

في كثير من الدراسات الإحصائية نهتم بمتغيرين في آن واحد و هما صفتين يتميز بهما أفراد مجتمع ما و نريد البحث على وجود علاقات بينهما و التي تفسر مدى تأثير بعضها على بعض في التطور و التغير، كالعلاقة بين القامة و الوزن عند مجموعة من الأشخاص، أو العلاقة بين سرعة السيارات و استهلاك الوقود و غير ذلك.

السلاسل الإحصائية ذات بعدين:

إن المشاهدات المتعلقة بمتغيرين لـ N فرد تتمثل كأبسط ما يكون على شكل سلسلة مزدوجة (x_i, y_i) مرتبة حسب إحدى مركبتيها.
بإمكاننا أن نعرض هذه المعلومات في جدول ذو مدخلين على الصيغة التالية:

جدول (6): جدول ذو مدخلين.

Y \ X	y_1	y_2	...	y_q	المجموع
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1q}	$n_{1.}$
x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2q}	$n_{2.}$
...	...	...	...	...	...
x_p	n_{p1}	n_{p2}	...	n_{pq}	$n_{p.}$
المجموع	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.q}$	N

التوزيعات الهامشية :

تعريف: في كلا الحالتين (المستمرة و غير المستمرة)، تحسب المجاميع الخاصة بسطر من السطور أو عمود من الأعمدة، فنحصل على التكرارات الهامشية $n_{.j}$ و $n_{i.}$ المعرفة كما يلي: $n_{.j}=\sum_{i=1}^{p} n_{ij}$ و $n_{i.}=\sum_{j=1}^{q} n_{ij}$ و هي مرتبطة فيما بينها بالعلاقة التالية:

$$\sum_{i=1}^{p} n_{i.} = \sum_{j=1}^{q} n_{.j} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij} = N$$

عندما نرفق التكرارات الهامشية على الترتيب لكل قيمة موافقة من القيم x_i و y_j فإننا نشكل سلسلتين وحيدتي البعد تسمى بالتوزيع الهامشي، كما هو موضح فيما يلي:

التوزيع الهامشي لكل من X و Y:

X	x_1	x_2	...	x_p
التكرار	n_1	n_2	...	n_p

Y	y_1	y_2	...	y_q
التكرار	n_1	n_2	...	n_q

مثال: سحبت عينة عشوائية من مجتمع ما تتكون من 100 أسرة قصد دراسة ظاهرتين هما، النفقات الاستهلاكية للأسرة(10^3دج) والتركيبة الأسرية من حيث عدد الأطفال، فكانت النتائج المتحصل عليها مبينة في الجدول التالي:

جدول (7): توزيع عدد النفقات و الأطفال لـ 100 أسرة.

عدد الأطفال \ النفقات	0	1	2	3	المجموع
$[20-30[$	**3**	**8**	**6**	**3**	20
$[30-40[$	**8**	**15**	**12**	**13**	48
$[40-50[$	**4**	7	**11**	**10**	32
المجموع	**15**	**30**	**29**	**26**	100

من خلال الجدول السابق يمكن أن نقرأ بعض الأرقام:

- من بين 100 عائلة، 48 عائلة تتراوح نفقاتها الاستهلاكية بين 30×10^3 دج و 40×10^3 دج.

- 30 عائلة لها طفل واحد، حيث أن 7 عائلات منها تتراوح نفقاتها الاستهلاكية بين 40×10^3 دج و 50×10^3 دج، و 8 عائلات تتراوح نفقاتها الاستهلاكية بين 20×10^3 دج و 30×10^3 دج، أما 15 عائلة الأخرى فتتراوح نفقاتها الاستهلاكية بين 30×10^3 دج و 40×10^3 دج.

4.1 العرض البياني للبيانات الإحصائية

بالإمكان وصف وتلخيص البيانات باستخدام الرسومات البيانية والأشكال الهندسية، إذ تمكن هذه الأخيرة من القيام بتحليل سريع للظاهرة المدروسة، وتستخدم أنواع مختلفة للعرض البياني حسب نوع المتغير المدروس.

العرض البياني في حالة متغير كمي منفصل :هو عبارة عن أعمدة بسيطة تتناسب أطوالها مع التكرار المقابل لقيمة معينة للمتغير المدروس.

مثال: يبيّن الجدول(8) عدد الأطفال في العائلة لعينة تتكون من 100 أسرة.

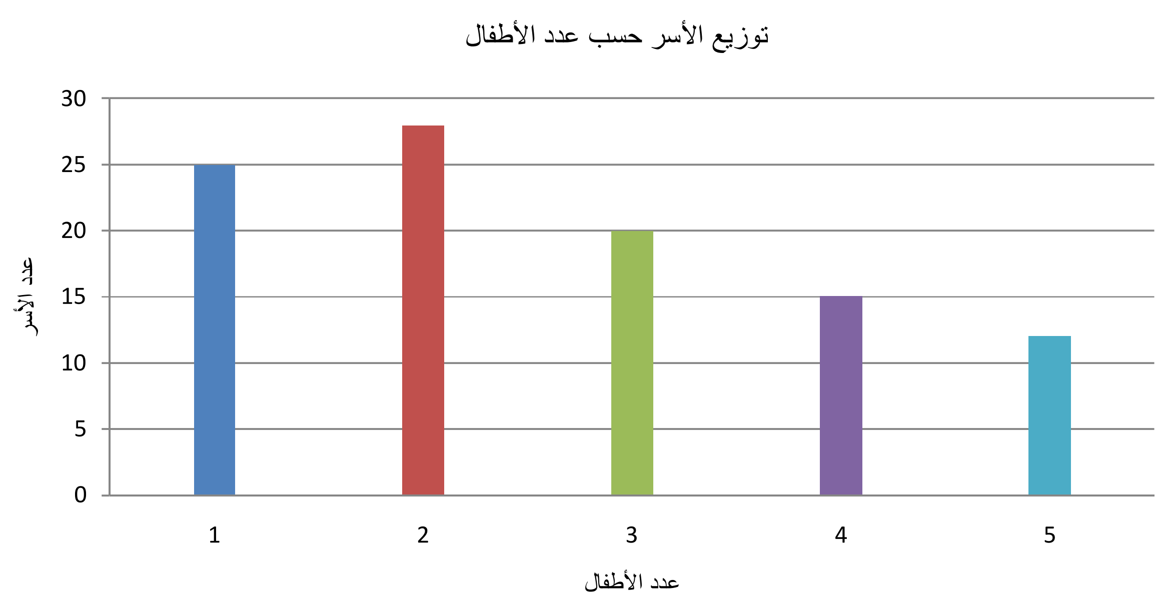
عدد الأطفال في الأسرةX_i	1	2	3	4	5	Σ
التكرار n_i	25	28	20	15	12	100

المطلوب :عرض هذه البيانات بالطريقة المناسبة.

الحل :

أفضل طريقة لعرض هذه البيانات هي الأعمدة البسيطة.

شكل (1): أعمدة بيانية لتوزيع الأسر حسب عدد الأطفال.



العرض البياني في حالة متغير كمي متصل (مستمر):

إن العروض البيانية للمتغير الكمي المتصل هي أكثر العروض البيانية استعمالا ومن أهمها:

أ) المدرج التكراري:

وهو عبارة عن مستطيلات(أعمدة)متلاصقة تمثل تكرارات أو قيم كل فئة من الفئات، حيث أن طول كل منها يتناسب مع التكرار المقابل، ومن المفيد قبل رسم المدرج التكراري ملاحظة أطوال الفئات هل هي متساوية أم لا ؟، لذلك نميز حالتين عند رسم المدرج التكراري:

- **المدرج التكراري في حالة فئات متساوية الطول :**عندما تكون الفئات متساوية الطول نقوم برسم المدرج التكراري مباشرة، ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي:

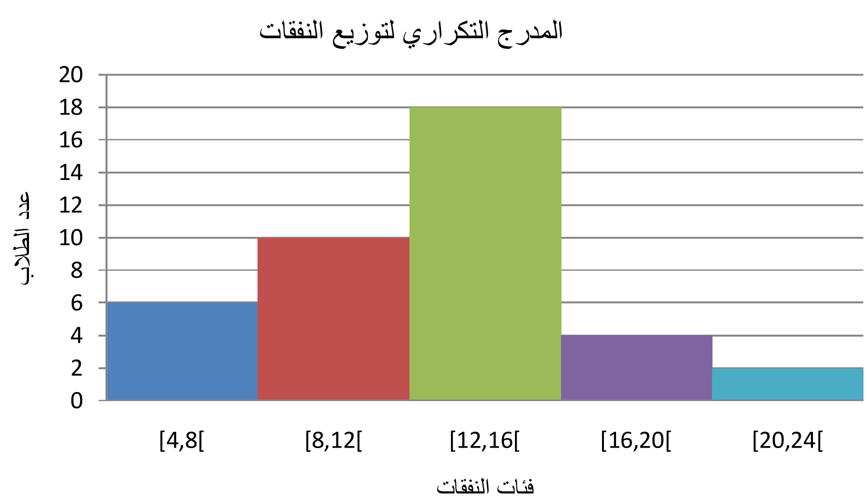
مثال: الجدول (9) يبيّن توزيع النفقات اليومية (الوحدة :10 دج) لعينة من 40 طالب.

فئات النفقاتX_i	$[4-8[$	$[8-12[$	$[12-16[$	$[16-20[$	$[20-24[$	Σ
التكرار n_i	6	10	18	4	2	40

المطلوب :رسم التمثيل البياني الذي يمثل توزيع النفقات؟

الحل: بما أن الفئات متساوية الطول نقوم برسم المدرج التكراري مباشرة.

الشكل (2): المدرج التكراري لتوزيع النفقات (فئات متساوية الطول).



- **المدرج التكراري في حالة فئات غير متساوية الطول :**إذا كانت فئات التوزيع غير متساوية الطول نقوم بتعديل التكرارات حتى يكون هناك تناسب بين طول الفئة والتكرار المقابل لها، ولغرض تعديل التكرارات نستخدم المعادلة الآتية:

$$\boxed{n_i^* = n_i \times \frac{L^*}{L_i}}$$

حيث: n_i^*: التكرار المعدل، L^*: طول الفئة المختار.

ملاحظة: غالبا يكون طول الفئة المختار هو أصغر طول فئة.

مثال: الجدول التالي يبين توزيع عينة من 100 عامل في مؤسسة ما حسب الأجر الشهري (الوحدة 10^3دج).

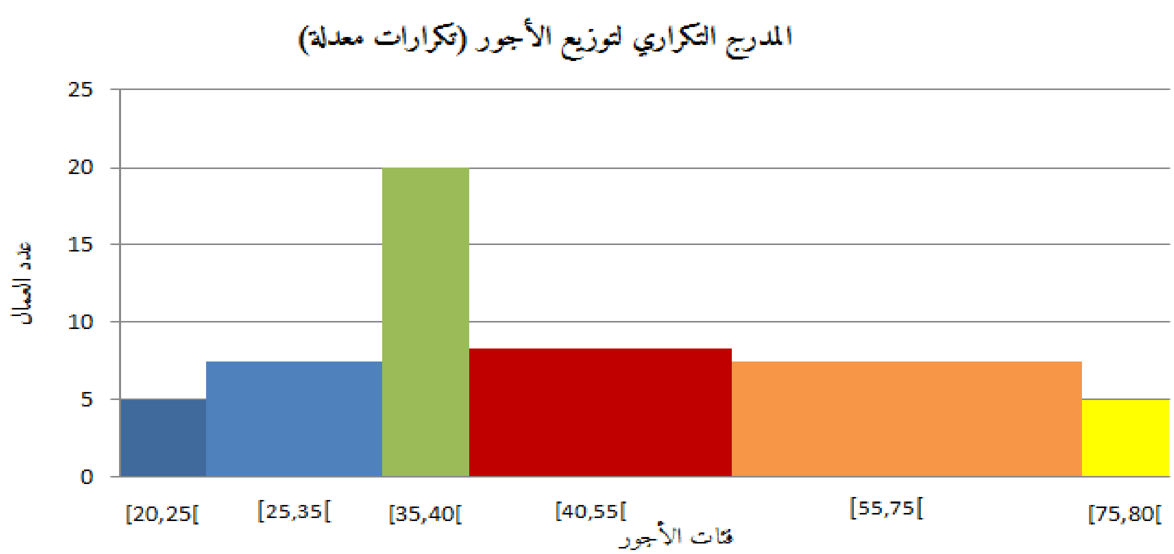
فئات الأجر X_i	$[20-25[$	$[25-35[$	$[35-40[$	$[40-55[$	$[55-75[$	$[75-80[$	Σ
التكرار n_i	5	15	20	25	30	5	100

المطلوب :تمثيل هذه البيانات باستخدام المدرج التكراري.

الحل :بما أن فئات التوزيع غير متساوية الطول نقوم بتعديل التكرارات، ونأخذ طول الفئة المختار والمساوي لـ5 كأساس لتعديل التكرارات.

فئات الأجر X_i	$[20-25[$	$[25-35[$	$[35-40[$	$[40-55[$	$[55-75[$	$[75-80[$	Σ
التكرار n_i	5	15	20	25	30	5	100
طول الفئة L_i	5	10	5	15	20	5	-
التكرار المعدل n_i^*	5	$15 \times \frac{5}{10} = 7.5$	20	$25 \times \frac{5}{15} = 8.33$	$30 \times \frac{5}{20} = 7.5$	5	-

الشكل (3): المدرج التكراري لتوزيع الأجور (تكرارات معدلة)

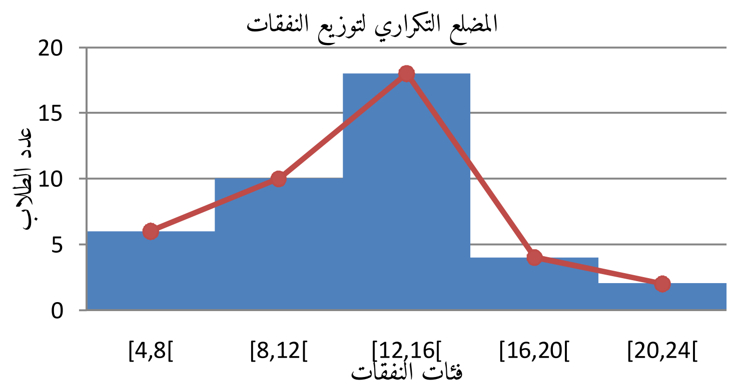


ب) المضلع التكراري:

هو مجموعة من قطع مستقيمة متصلة ومنكسرة تربط بين نقاط إحداثياتها هي مراكز الفئات و التكرارات المقابلة لها.

مثال: نرسم المضلع التكراري الخاص بتوزيع النفقات اليومية لعينة من 40 طالب انطلاقا من المدرج التكراري الذي رسمناه سابقا.

الشكل (4): المضلع التكراري الخاص بتوزيع النفقات اليومية.



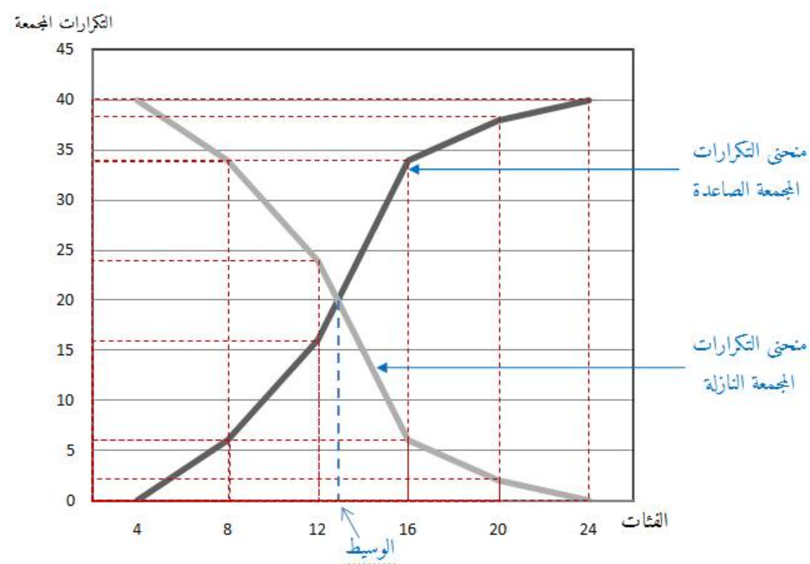
ج) منحنى التكرارات المتجمعة الصاعدة والنازلة:

يتم رسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد عن طريق إيصال مجموعة النقاط ذات الإحداثيات التالية :الحدود العليا للفئات والتكرارات المتجمعة الصاعدة المقابل لها، أما منحنى التكرار المتجمع النازل فيتم رسمه بإيصال مجموعة النقاط ذات الإحداثيات :الحدود الدنيا للفئات والتكرارات المتجمعة النازلة المقابلة لها، وتسمى نقطة التقاطع بين المنحنيين بالوسيط.

مثال: لنرسم منحنى التكرارات المتجمعة الصاعدة والنازلة للبيانات الموزعة في الجدول التالي:

الفئات X_i	$[4-8[$	$[8-12[$	$[12-16[$	$[16-20[$	$[20-24[$	Σ
التكرار n_i	6	10	18	4	2	**40**
ت.م.ص $N\uparrow$	6	16	34	38	40	-
ت.م.ن $N\downarrow$	40	34	24	6	2	-

الشكل (5): منحنى التكرارات المتجمعة الصاعدة والنازلة



5.1 تمارين مقترحة

التمرين الأول: اعط نوع الخواص الآتية:

السن، لون العينين، مدة الحياة، الجنس، فصيلة الدم، الطول، الوزن، عدد الأطفال في عائلة، دائرة الإقامة، السرعة ، الحالة المدنية.

التمرين الثاني: قمنا بتسجيل عدد أعواد الكبريت الموجودة في 20 علبة فكانت النتائج كما يلي:

46، 40، 36، 38، 30، 48، 40، 32، 42، 40، 40، 42، 36، 44، 42، 40، 38، 34، 40، 34.

1) باستعمال طريقة ستيرجس ضع هذه البيانات في جدول إحصائي ذو فئات، مع تحديد التكرارات الموافقة لها.
2) مثل بيانيا هذا الجدول الإحصائي.

التمرين الثالث: بفرض أن البيانات التالية تمثل إجمالي ما أنفقه 75 شخص خلال أسبوع (الوحدة: 100 دج)

62	72	68	53	73	82	68	78	66	62	65	74	73	67	73
69	74	81	63	63	83	60	79	75	71	79	62	69	97	78
83	75	61	76	65	82	78	75	73	66	75	82	73	84	77
93	73	57	90	60	96	78	79	71	85	75	60	90	71	79
62	88	68	76	83	65	75	87	74	85	91	80	79	89	76

المطلوب:

1) تحديد المتغيرة المدروسة و طبيعتها.
2) وضع هذه البيانات في جدول توزيع تكراري باستخدام طريقة يول.
3) رسم المدرج و المضلع التكراري.
4) إيجاد التكرار النسبي و النسبي المئوي.
5) إيجاد التكرارات المتجمعة الصاعدة و النازلة.
6) تحديد نسبة الأشخاص الذين تزيد نفقاتهم الأسبوعية عن 7400 دج
7) إيجاد نسبة الأشخاص الذين تقل نفقاتهم الأسبوعية عن 8800 دج.

التمرين الرابع:

أراد أحد الباحثين دراسة الأجور الشهرية لعمال شركة ما و البالغ عددهم 100 عامل، و بعد الدراسة تحصل على البيانات المبوبة في الجدول التالي (الوحدة: 10^3 دج):

فئات الأجر	$[30-34[$	$[34-42[$	$[42-46[$	$[46-54[$	$[54-62[$	$[62-70[$	المجموع
التكرار	4	16	20	24	28	8	100

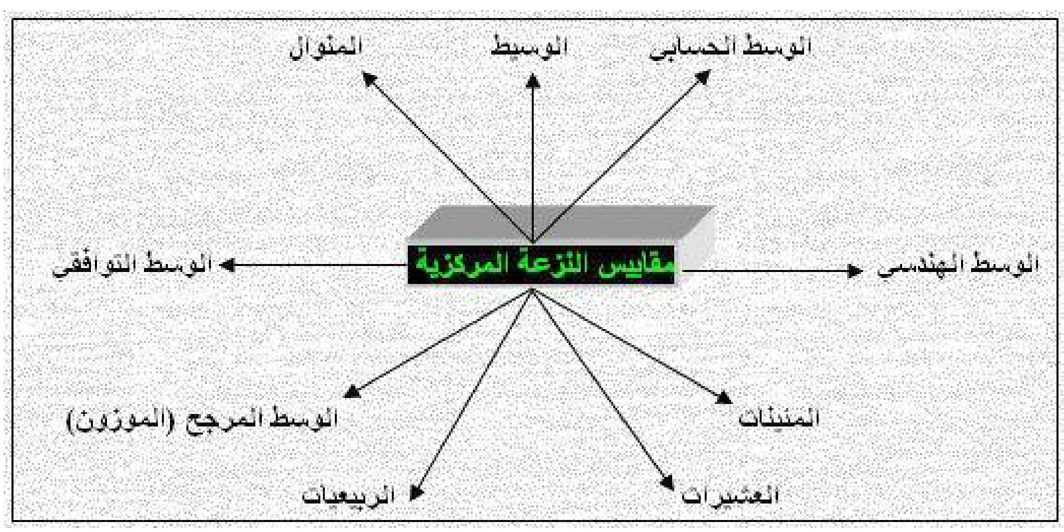
المطلوب:

1) تحديد المتغيرة المدروسة و طبيعتها.
2) تمثيل البيانات السابقة بالتمثيل المناسب.
3) إيجاد التكرارات المتجمعة الصاعدة و النازلة.

الفصل الثاني: مقاييس النزعة المركزية

سنتناول في هذا الفصل:

- المتوسط الحسابي، الوسيط، المنوال.
- المتوسط الهندسي، المتوسط التوافقي.
- بعض المقاييس الاحصائية الأخرى.



2 الفصل الثاني: مقاييس النزعة المركزية

نجد في معظم السلاسل الإحصائية أن عددا كبيرا من المفردات تتجمع حول قيم معينة من السلسلة، تسمى هذه الظاهرة "النزعة المركزية"، هناك عدة مقاييس للتعبير عن هذه الظاهرة تختلف من ناحية الدقة و المدلول الإحصائي و طريقة الحساب من أهمها:

- المتوسط الحسابي و مشتقاته (المتوسط الهندسي، المتوسط التوافقي، المتوسط التربيعي) .
- الوسيط و مشتقاته (الربيعيات، العشيرات، المئينات).
- المنوال.

إن مقاييس النزعة المركزية لا تحل محل البيانات التفصيلية ولكنها تعطي فكرة واضحة عن الظاهرة قيد الدراسة.

1.2 المتوسط الحسابي

يعتبر المتوسط الحسابي (Arithmetic Mean) من أشهر و أهم مقاييس النزعة المركزية و أكثرها استخداما لأنه أساسي نظريا و سهل عمليا، و هو مركز التوازن لكل ظاهرة، و يرمز له بالرمز $\bar{X}$.

أ) طرق حساب المتوسط الحسابي:

❖ **الطريقة المباشرة:**

إذا كانت لدينا $x_1, x_2, \dots, x_n$ تمثل قيم ظاهرة ما، فإن المتوسط الحسابي لهذه القيم هو مجموع هذه القيم مقسوما على عددها، وتعطى علاقة المتوسط الحسابي بالصيغة التالية:

$$\boxed{\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}$$

مثال 2-1: تمثل السلسلة الإحصائية التالية ما أنفقه ثمانية زبائن عند تناولهم وجبة الغداء بأحد المطاعم (الوحدة: دج):

600 ، 250 ، 300 ، 550 ، 500 ، 350 ، 450 ، 400

المطلوب: حساب متوسط الانفاق.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\mathrm{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8} = \frac{400+450+350+500+550+300+250+600}{8} = \frac{3400}{8} = 425$$

ملاحظة:

في حالة البيانات المبوبة أي في حالة توزيع تكراري يمكن كتابة العلاقة السابقة لحساب المتوسط الحسابي كالآتي:

$$\boxed{\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}}$$

مثال 2-2: (متغير كمي منفصل)

البيانات التالية تمثل عدد الأفراد في عينة مكونة من 30 أسرة:

2 ، 3 ، 2 ، 4 ، 5 ، 2 ، 4 ، 4 ، 5 ، 2 ، 2 ، 4 ، 3 ، 4 ، 5

3 ، 5، 4 ، 3 ، 4 ،5 ، 4 ، 5 ، 3 ، 4 ، 5 ، 3 ، 4 ، 5 ، 3

عدد أفراد الأسرة (X_i)	2	3	4	5	المجموع
عدد الأسر (التكرارات n_i)	5	7	10	8	30

لحساب المتوسط الحسابي نطبق العلاقة السابقة:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i n_i}{30} = \frac{2\times5+3\times7+4\times10+5\times8}{30} = 3.7$$

مثال2-3: (متغير كمي متصل)

الجدول (10) يمثل كمية الألبان التي تنتجها 50 بقرة باللتر في اليوم الواحد بأحد المزارع.

كمية الألبان	$[0-4[$	$[4-8[$	$[8-12[$	$[12-16[$	$[16-20[$	المجموع
عدد الأبقار n_i	3	15	20	10	2	50

المطلوب: حساب متوسط كمية الألبان التي تنتجها كل بقرة في اليوم الواحد.

الحل: إذا كان المتغير الإحصائي مستمر فإننا نعوض x_i بمراكز الفئات c_i في كل المعادلات السابقة أي:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} c_i n_i}{n}$$

نحسب أولا مراكز الفئات c_i:

كمية الألبان	$[0-4[$	$[4-8[$	$[8-12[$	$[12-16[$	$[16-20[$	المجموع
عدد الأبقار n_i	3	15	20	10	2	50
مراكز الفئات c_i	2	6	10	14	18	-

و منه متوسط إنتاج الألبان هو:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} c_i n_i}{n} = \frac{3\times2+15\times6+20\times10+10\times14+2\times18}{50} = \frac{472}{50} = 9.44$$

- **طريقة الانحرافات البسيطة(طريقة الوسط الفرضي):**

عندما تكون لدينا بيانات كبيرة القيم فإننا نستخدم طريقة غير مباشرة في حساب المتوسط الحسابي (طريقة الانحراف عن متوسط فرضي)الغرض منها هو تصغير قيم البيانات من أجل تسهيل الحساب.

إذا كانت لدينا $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تمثل قيم ظاهرة ما، نختار قيمة ثابتة x_0 تكون قريبة من القيم الأصلية و تتوسطها (نسميها وسط فرضي)، المتوسط الحسابي يعطى بالعلاقة:[6]

$$\boxed{\bar{X} = x_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)}{n}}$$

حيث: $(x_i - x_0)$ تمثل انحرافات المفردات عن وسطها الفرضي.

ملاحظة:

لا يشترط أن يكون المتوسط الفرضي قيمة من السلسلة الإحصائية.

مثال2-4: (حالة القيم المفردة بدون تكرار)

لنحسب متوسط إنفاق الزبائن في المثال السابق بتطبيق طريقة المتوسط الفرضي.

لنفرض أن المتوسط الفرضي $x_0 = 400$

x_i	250	300	350	400	450	500	550	600
$x_i - 400$	-150	-100	-50	0	50	100	150	200

$$\bar{X} = x_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)}{n} = 400 + \frac{200}{8} = 425$$

ملاحظة:

بالنسبة للبيانات المبوبة أي في شكل توزيع تكراري، يفضل أن تكون قيمة الوسط الفرضي قيمة المفردة الأكبر تكرار في حالة المتغير الكمي المنفصل، ومركز الفئة التي تقع وسط الفئات (في حالة متغير كمي متصل) وأن يكون لهذه الفئة أكبر تكرار إن أمكن.

مثال 2-5: (متغير كمي منفصل)

البيانات التالية تمثل عدد الأفراد في عينة مكونة من 30 أسرة:

5	4	3	4	2	2	5	4	4	2	5	4	2	3	2
3	5	4	3	5	4	3	5	4	5	4	3	4	5	3

[6] عاشور حيدوشي ، مرجع سابق، ص50

حل:

نأخذ الوسط الفرضي هو: $x_0 = 4$ لأنه الأكبر تكرار.

عدد أفراد الأسرة (x_i)	2	3	4	5	المجموع
عدد الأسر (التكرارات n_i)	5	7	10	8	**30**
$x_i - 4$	-2	-1	0	1	-
$n_i(x_i - 4)$	-10	-7	0	8	**-9**

و بما أنه توجد تكرارات يمكن كتابة العلاقة السابقة للمتوسط الفرضي على الشكل:

$$\bar{X} = x_0 + \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - x_0)n_i}{n} = 4 + \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - 4)n_i}{30} = 4 + \frac{-9}{30} = 3.7$$

مثال 2-6: (متغير كمي متصل)

نحسب متوسط إنتاج الألبان في المثال 2-3 بطريقة المتوسط الفرضي، لنفرض أن المتوسط الفرضي $c_0 = 10$

كمية الألبان	$[0-4[$	$[4-8[$	$[8-12[$	$[12-16[$	$[16-20[$	المجموع
عدد الأبقار n_i	3	15	20	10	2	**50**
مراكز الفئات c_i	2	6	10	14	18	-
$c_i - 10$	-8	-4	0	4	8	-
$n_i(c_i - 10)$	-24	-60	0	40	16	**-28**

و منه متوسط إنتاج الألبان هو:

$$\bar{X} = c_0 + \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - c_0)n_i}{n} = 10 + \frac{\sum_{i=1}^{5}(c_i - 10)n_i}{50} = 10 + \frac{-28}{50} = 9.44$$

ب) خواص المتوسط الحسابي:

- أكثر مقاييس النزعة المركزية استخداما.
- يستعمل الوسط الحسابي في حالة المتغيرات الكمية أي القابلة للقياس.
- المتوسط الحسابي قابل للعمليات الجبرية ولا يمكن حسابه بيانيا.
- سهل الحساب و يدخل في حسابه جميع القيم المعطاة.
- لا يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة من البداية أو النهاية وذلك لأنه يعتمد في حسابه على مراكز الفئات.

- يتأثر بالقيم المتطرفة في الصغر و الكبر و ينحاز لصالحها و لهذا لا يعتمد عليه في مثل هذه الحالات لأنه من المفروض أن تكون قيم المتغير الإحصائي متمركزة حول النتيجة المحصل عليها.[7]
- مجموع انحرافات القيم عن متوسطها يساوي دائما الصفر $\sum(x_i - \bar{X}) = 0$

$$\sum(x_i - \bar{X}) = \sum x_i - \sum \bar{X} = \sum x_i - n\bar{X} = n\bar{X} - n\bar{X} = 0$$

تدل هذه الخاصية على أن المتوسط الحسابي يقع في مركز البيانات.

- مجموع مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي أقل من مجموع مربعات انحرافات نفس القيم عن أي قيمة أخرى أي من أجل $\bar{X} \neq x_\alpha$ لدينا:

$$\sum(x_i - \bar{X})^2 < \sum(x_i - x_\alpha)^2$$

تدل هذه الخاصية على أن المتوسط الحسابي أقرب إلى البيانات x_i من أي قيمة أخرى.

2.2 المتوسط الهندسي

الوسط الهندسي (Geometric Mean) لـ n من القيم الموجبة هو الجذر النوني لجدائها، ليكن لدينا السلسلة $x_1, x_2, \dots, x_n$ عندئذ يكون وسطها الهندسي و الذي يرمز له بالرمز G معطى بالعلاقة :

$$\boxed{G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}}$$

مثال 2-7:

لتكن لدينا السلسلة المؤلفة من ستة أعداد: $(1,2,5,7,10,13)$

يكون عندئذ الوسط الهندسي هو: $G = \sqrt[6]{1 \times 2 \times 5 \times 7 \times 10 \times 13} = \sqrt[6]{9100} \approx 4.57$

ملاحظة:

إذا كانت البيانات كبيرة نستعمل اللوغاريتم لحساب الوسط الهندسي و ذلك حسب العلاقة التالية:

$$\boxed{G = e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}}$$

في المثال السابق لدينا:

---

[7] حاكم قصد علي سهام ، الاحتمالات و الإحصاء، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة البشير البراهيمي، 2008/2007م، ص 54

$$ln\,\mathrm{G} = \frac{1}{6}(ln1 + ln2 + ln5 + ln7 + ln10 + ln13) \approx 1.52$$

و منه: $G = e^{1.52} \approx 4.5$

ملاحظة: في حالة البيانات المبوبة (جدول تكراري) تصبح العلاقات السابقة كالآتي:

$$\mathrm{G} = \sqrt[n]{{x_1}^{n_1} \times {x_2}^{n_2} \times \dots \times {x_k}^{n_k}}$$

$$\boxed{G = e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i ln x_i}}$$

حيث: n_i تمثل التكرارات المقابلة لقيم المتغير أو مراكز الفئات و $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$

أ) استخدامات المتوسط الهندسي:

من أهم مجالات استخدام المتوسط الهندسي إيجاد متوسط نسب التغير لبعض الظواهر، مثل :معدل نمو الناتج، معدل زيادة الأجور والنمو السكاني...إلخ.

مثال2-8:

إليك تطور واردات بلد ما بملايير الدولارات خلال الفترة 2017-2020

في 2017 كانت الواردات 10 مليار دولار

في 2018 زادت بنسبة 13%

في 2019 زادت بنسبة 18%

في 2020 زادت بنسبة 15%

المطلوب:

1) كم أصبحت الواردات في 2020؟

2) جد متوسط نسب زيادة الواردات خلال هذه الفترة (2017-2020)

حل:

1) $10\left(1+\frac{13}{100}\right)\left(1+\frac{18}{100}\right)\left(1+\frac{15}{100}\right) = 10 \times 1.13 \times 1.18 \times 1.15 = 15.3341$

أصبحت الواردات بعد هذه الفترة: 15.3341 مليار دولار

2) لكي يكون t متوسط نسب زيادة الواردات يجب أن يحقق:

$$(1+t)(1+\mathrm{t})(1+\mathrm{t}) = \left(1+\frac{13}{100}\right)\left(1+\frac{18}{100}\right)\left(1+\frac{15}{100}\right)$$

أي نحسب المتوسط الهندسي $G = (1+t)$ و منه:

$$(1+t) = \sqrt[3]{\left(1+\frac{13}{100}\right)\left(1+\frac{18}{100}\right)\left(1+\frac{15}{100}\right)} = \sqrt[3]{1.13 \times 1.18 \times 1.15} = \sqrt[3]{1.533} \approx 1.153$$

و منه:

$$t = 1.153 - 1 = 0.153$$

متوسط نسب زيادة الواردات خلال هذه الفترة هو: 15.3%

ب) خواص المتوسط الهندسي:[8]

- يدخل في حسابه جميع القيم ولكنه أقل تأثرا بالقيم المتطرفة من المتوسط الحسابي.
- ليس له معنى إذا كانت إحدى القيم سالبة أو تساوي الصفر.
- يستخدم بأكثر واقعية عند وصف الظواهر النسبية.
- قيمة المتوسط الهندسي لأي ظاهرة أصغر دائما من قيمة المتوسط الحسابي.

3.2 المتوسط التوافقي

المتوسط التوافقي (Harmonic Mean) لـ n قيمة هو العدد الذي يكون مقلوبه هو الوسط الحسابي لمقلوبات هذه القيم و نرمز له بـ H،

و نكتب:

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}$$

أي:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

و منه تنتج العلاقة التالية:

$$\boxed{H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}}$$

أما بالنسبة للوسط التوافقي المرجح فنكتب:

$$\boxed{H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{x_i}}}$$

[8] علي عبد السلام العماري و علي حسين العجيلي، مرجع سابق، ص 57

مثال2-9:

لنحسب المتوسط التوافقي للسلسلة الإحصائية التالية: 8، 4، 11، 5، 6

لدينا:

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \frac{5}{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{11}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}} = \frac{5}{0.83} = 6.02$$

استخداماته: هو من المقاييس الخاصة التي تستخدم لتحديد معدلات السرعة ومتوسط الأسعار ومتوسط الكثافة السكانية..

مثال2-10: قطع سائق المسافة الفاصلة بين مدينتين على ثلاث مراحل متساوية، المسافة المقطوعة في كل منها 80 كم، فإذا قطع المرحلة الأولى بسرعة 100 كم/ساعة، والمرحلة الثانية بسرعة 120 كم/ساعة والمرحلة الثالثة بسرعة 90 كم/ساعة[9].

المطلوب: أوجد متوسط سرعة هذا السائق على طول المرحلة.

لدينا:

السرعة (كم/سا)	100	120	90	المجموع
المسافة (كم)	80	80	80	240

في هذه الحالة المتوسط الحسابي لا يعطي فكرة صحيحة عن مثل هذه الظواهر، لذا نقوم باستخدام المتوسط التوافقي المرجح لأنه أفضل مقياس لقياس متوسط السرعة.

$$\mathrm{H} = \frac{240}{\frac{80}{100}+\frac{80}{120}+\frac{80}{90}} = \frac{240}{2.35} \approx 102$$

و منه متوسط سرعة السائق على طول المرحلة هو: 102 كم/سا

خواص المتوسط التوافقي:

- يأخذ بعين الاعتبار جميع القيم، وتأثره بالقيم المتطرفة أقل من تأثر المتوسط الحسابي.
- لا يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة، وكذا في حالة وجود بيانات معدومة.
- يعطي نتائج أكثر واقعية في حالة حساب متوسطات السرعة والأسعار.
- قيمة المتوسط التوافقي دائما أقل من قيمة المتوسط الهندسي وعليه فإن $H < G < \bar{X}$

[9] عاشور حيدوشي ، مرجع سابق، ص63

4.2 المتوسط التربيعي

المتوسط التربيعي Q (Quadratic Mean)لأي مجموعة من القيم هو الجذر التربيعي للمتوسط الحسابي لمربعات تلك القيم[10]، و نكتب:

$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}}$$

مثال 2-11:

أوجد المتوسط التربيعي للسلسلة التالية: 8 ، 6 ، 10 ، 9 ، 7.

الحل:

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{7^2+9^2+10^2+6^2+8^2}{5}} = \sqrt{66} = 8.124$$

ملاحظات:

- في حالة بيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري، العلاقة السابقة للمتوسط التربيعي تصبح:

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n}}$$

حيث: x_i تمثل قيم المتغير و n_i تمثل التكرارات المقابلة لقيم المتغير.

- الوسط التربيعي دائما أكبر من الوسط الحسابي إلا عندما تكون قيم السلسلة عبارة عن أعداد متماثلة:

- لا يستعمل الوسط التربيعي لوحده مطلقا، بل يستخدم في حساب الانحراف المعياري الذي سندرسه لاحقا.

- بنفس طريقة الوسط التربيعي يمكن كتابة الوسط التكعيبي و هو العدد الذي مكعبه هو الوسط الحسابي لمكعبات حدود السلسلة، و يكون الوسط التربيعي أقل من الوسط التكعيبي و الذي هو بدوره أقل من الوسط ذو الرتبة 4... الخ.

5.2 الوسيط

نقصد بكلمة الوسيط (Mediane) لسلسلة إحصائية ما، و الذي نرمز له بـ Me القيمة التي من أجلها يتساوى عدد القيم الأصغر منها مع عدد القيم الأكبر منها[11]. نميز حالتين:

أ) في حالة المتغير الكمي المنفصل:

تكون عندها السلسلة الإحصائية من الشكل $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، نرتب القيم تصاعديا أو تنازليا ثم نميز حالتين:

---

[10] محمد راتول: " الإحصاء الوصفي"، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثانية 2006، ص123

[11] وليد إسماعيل السيفو وآخرون، مرجع سابق، ص 116

$$M_e = \begin{cases} \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} & , \quad \frac{n}{2} \in \mathbb{N} \\ x_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} & , \quad \frac{n}{2} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

مثال2-12: أوجد قيمة الوسيط للقيم التالية: 23 ، 15 ، 24 ، 8 ، 16 ، 6 ، 32

أولا نرتب هذه القيم تصاعديا:

$$\underbrace{6 ، 8 ، 15}_{\boxed{\text{3 قيم}}} ،16 ، \underbrace{23 ،24 ،32}_{\boxed{\text{3 قيم}}}$$

عدد القيم هو 7 و $\frac{7}{2} = 3.5 \notin \mathbb{N}$ ، و منه رتبة الوسيط هي 4 و عليه فقيمة الوسيط هي: $M_e = 16$

مثال2-13:

أوجد قيمة الوسيط للقيم التالية: 23 ، 15 ، 24 ، 8 ، 16 ، 6 ،32 ،45

أولا نرتب هذه القيم تصاعديا:

$$\underbrace{6 ، 8 ، 15}_{\boxed{\text{3 قيم}}} ،16 ، 23 ، \underbrace{24 ،32 ، 45}_{\boxed{\text{3 قيم}}}$$

عدد القيم هو 8 و $\frac{8}{2} = 4 \in \mathbb{N}$ منه فقيمة الوسيط هي: $M_e = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{16+23}{2} = 19.5$

مثال 2-14:

يمثل الجدول (11) أوزان 25 تلميذا بالكيلوغرام.

الأوزان x_i	56	60	63	69	72	74	76
التكرارات n_i	2	4	8	5	3	3	2

نلاحظ أن الأوزان مرتبة تصاعديا، سنقوم أولا بإيجاد رتبة الوسيط.

عدد التلاميذ هو 25 و منه رتبة الوسيط هي: 13.

نستعين بالتكرار المجمع الصاعد و نتوقف فيه عن القيمة التي تساوي رتبة الوسيط أو الأكبر منها مباشرة، القيمة x_i المقابلة لها هي الوسيط.

الأوزان x_i	56	60	63	69	72	74	76
التكرارات n_i	2	4	8	5	3	1	2
ت.م.ص $N\uparrow$	2	6	14	-	-	-	-

نتوقف عند 14، و منه قيمة الوسيط هي: $M_e = 63$

ب) في حالة المتغير الكمي المتصل:

في هذه الحالة تكون المعطيات موزعة في فئات و بالتالي تفقد هويتها، لهذا نفرض أن المعطيات موزعة بانتظام في هذه الفئات و هذا ما يسمى بطريقة التوضع الخطي.

نقوم أولا بحساب رتبة الوسيط و هي $\frac{n}{2}$ بغض النظر عما إذا كان n زوجي أم فردي، ثم نعين الوسيط بيانيا أو حسابيا.

- **بيانيا:** و ذلك برسم منحنى التكرار المجمع الصاعد أو النازل و تعيين الفاصلة التي ترتيبتها هي رتبة الوسيط، هذه الفاصلة هي قيمة الوسيط.[12]
- **حسابيا:** نعين الفئة الوسيطية $[a;b]$ و التي تكرارها المجمع الصاعد $\frac{n}{2}$ أو الأكبر منها مباشرة ثم نطبق العلاقة الآتية:

$$\boxed{\frac{M_e-a}{b-a}=\frac{\frac{n}{2}-N_1^{\uparrow}}{N_2^{\uparrow}-N_1^{\uparrow}}}$$

حيث: $N_2^{\uparrow}$ تمثل التكرار المجمع الصاعد الموافق للفئة الوسيطية.

$N_1^{\uparrow}$ تمثل التكرار المجمع الصاعد الذي يسبق الفئة الوسيطية.

مثال2-15:

الجدول (12) يتعلق بالأجور التي يتقاضاها 81 عاملا بالدينار في اليوم.

الأجور (DA)	$[400-450[$	$[450-500[$	$[500-550[$	$[550-600[$	$[600-650[$
عدد العمال	15	20	25	10	11

المطلوب: إيجاد وسيط هذه السلسلة.

الحل:

1) تعيين رتبة الوسيط: لدينا عدد العمال 81 و منه رتبة الوسيط هي: $\frac{81}{2}=40.5$

2) تعيين الفئة الوسيطية: نعين الفئة الوسيطية و التي تكرارها المجمع الصاعد 40.5 أو الأكبر منها مباشرة.

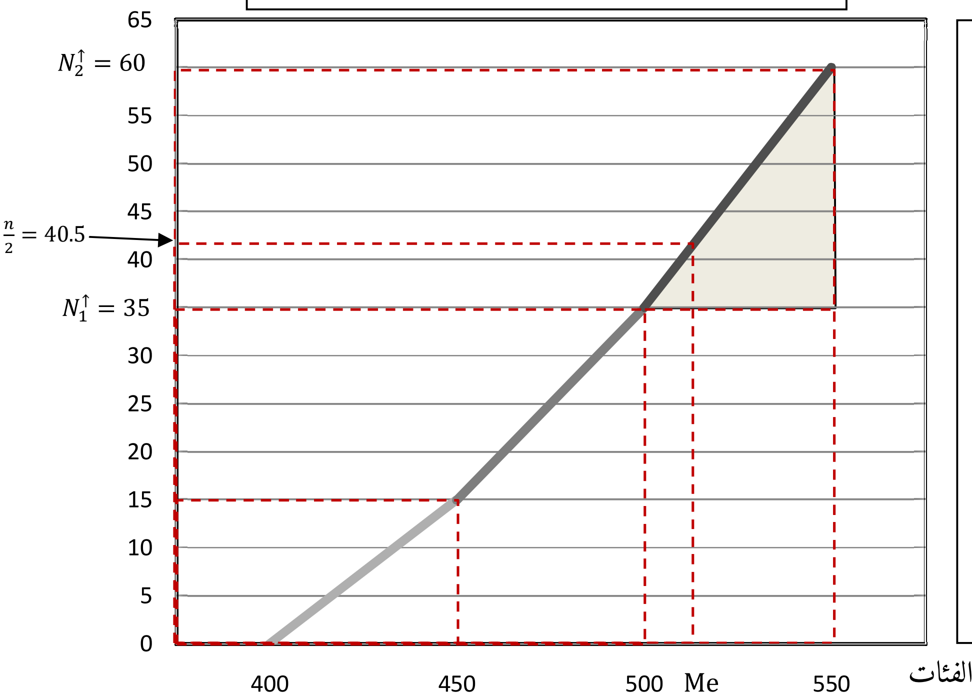
الأجور (DA)	$[400-450[$	$[450-500[$	$[500-550[$	$[550-600[$	$[600-650[$
عدد العمال	15	20	25	10	11
ت.م.ص $N\uparrow$	15	$N_1^{\uparrow}=35$	$N_2^{\uparrow}=60$	-	-

و منه الفئة الوسيطية هي: $[500-550[$

[12] حاكم قصد علي سهام، مرجع سابق، ص 56

الآن نطبق العلاقة السابقة لحساب الوسيط $\frac{\frac{n}{2}-N_1^{\uparrow}}{N_2^{\uparrow}-N_1^{\uparrow}} = \frac{M_e-a}{b-a}$ ، و التي يمكن استنتاجها من منحنى التكرار المجمع الصاعد.

الشكل (5): منحنى التكرار المجمع الصاعد لتعيين الوسيط



لدينا:

$$\begin{cases} 500 \leq M_e < 550 \\ 35 < 40.5 < 60 \end{cases}$$

و بتطبيق مبرهنة طاليس على المثلث الموضح في منحنى التكرارات المجمعة الصاعدة نجد:

$$\frac{M_e-500}{550-500} = \frac{40.5-35}{60-35}$$

بعد الحساب نجد:

$$M_e = 511$$

6.2 الربيعيات

الربيعيات (Quartiles) هي قيم تأخذها المتغيرة الإحصائية بحيث تقسم التكرار الكلي إلى نسب معينة[13]:

الربيع الأول Q_1: و هي القيمة التي تسبقها ربع البيانات و يليها ثلاثة أرباع البيانات.

الربيع الثاني Q_2: و هي القيمة التي تسبقها نصف البيانات و يليها نصف البيانات و هي الوسيط.

الربيع الثالث Q_3: و هي القيمة التي تسبقها ثلاثة أرباع البيانات و يليها ربع البيانات.

أ) حساب الربيعيات في حالة متغير كمي نقطي:

إذا كان المتغير كمي نقطي فإن الربيعيات تحسب بالطريقة التالية:

$$Q_\alpha = \begin{cases} \frac{x_{\frac{\alpha n}{4}} + x_{\frac{\alpha n}{4}+1}}{2} & \text{si } \frac{\alpha n}{4} \in \mathbb{N} \\ x_{\left[\frac{\alpha n}{4}\right]+1} & \text{si } \frac{\alpha n}{4} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

حيث $\alpha = \{1, 2, 3\}$

[13] حاكم قصد علي سهام، مرجع سابق، ص 59

مثال 2-16:

تمثل المعطيات التالية نتائج اختبار لمادة معينة:

18 ، 14 ، 1 ، 2 ، 19 ، 16 ، 5 ، 12 ، 10 ، 15

المطلوب: حساب كل الربيعيات.

حل: المتغير كمي نقطي، نرتب أولا السلسلة.

1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 12 ; 14 ; 15 ; 16 ; 18 ; 19

لدينا:

- $\frac{n}{4} = \frac{10}{4} = 2.5 \notin \mathbb{N}$ و منه: $Q_1 = x_{[2.5]+1} = x_3 = 5$
- $\frac{n}{2} = \frac{10}{2} = 5 \in \mathbb{N}$ و منه: $Q_2 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{12+14}{2} = 6.5$
- $\frac{\mathrm{n}\times 3}{4} = \frac{30}{4} = 7.5 \notin \mathbb{N}$ و منه: $Q_3 = x_{[7.5]+1} = x_8 = 16$

ب) حساب الربيعيات في حالة متغير كمي مستمر:

لإيجاد الربيعيات في حالة متغير كمي متصل، تتبع نفس خطوات حساب الوسيط (حالة متغير كمي متصل) ، ونستخدم العلاقة التالية:

$$\boxed{\frac{Q_i - a}{b - a} = \frac{\frac{in}{4} - N_1^{\uparrow}}{N_2^{\uparrow} - N_1^{\uparrow}}, i \in \{1\,;2\,;3\}}$$

حيث: $N_2^{\uparrow}$ تمثل التكرار المجمع الصاعد الموافق للفئة الربيعية.

$N_1^{\uparrow}$ تمثل التكرار المجمع الصاعد الذي يسبق الفئة الربيعية.

مثال2-17:

نعود مثلا للجدول (12) و الذي يتعلق بالأجور التي يتقاضاها 81 عاملا بالدينار في اليوم.

الأجور (DA)	[400 – 450[	[450 – 500[	[500 – 550[	[550 – 600[	[600 – 650[
عدد العمال	15	20	25	10	11

المطلوب: حساب الربيع الأول و الربيع الثالث

لدينا: $\frac{n}{4} = \frac{81}{4} = 20.25$ ،
بالاستعانة بالتكرار المجمع الصاعد نجد أن الفئة الربيعية الأولى هي: $[450 - 500[$

الأجور (DA)	[400 – 450[	[450 – 500[	[500 – 550[	[550 – 600[	[600 – 650[
عدد العمال	15	20	25	10	11
ت.م.ص $N \uparrow$	15	35	-	-	-

لدينا:

$$\begin{cases} 450 \leq Q_1 < 500 \\ 15 < 20.25 < 35 \end{cases}$$

و منه:

$$\frac{Q_1 - 450}{500 - 450} = \frac{20.25 - 15}{35 - 15}$$

بعد الحساب نجد: $Q_1 = 463.125$

بنفس الطريقة نجد: $Q_3 = 553.75$

7.2 المنوال

المنوال (Mode) هو الصفة الغالبة، و هي القيمة التي لها أكبر تكرار[14]، و يعتبر المنوال أفضل مقياس لوصف البيانات النوعية، و نرمز له بالرمز M_o.

مثال 2-18:

البيانات التالية تمثل التقديرات التي تحصل عليها 10 طلاب:

جيد، متوسط، جيد جدا، متوسط، ممتاز، جيد، ضعيف، جيد، جيد جدا، متوسط، جيد، متوسط، ضعيف، متوسط

نلاحظ أن التقدير الأكثر تكرارا هو متوسط و عليه فإن منوال هذه السلسلة هو: متوسط

مثال 2-19:

ليكن الجدول التكراري التالي:

القيم x_i	56	60	63	69	72	74	76
التكرارات n_i	2	4	6	5	3	3	2

نلاحظ أن أكبر تكرار هو $n_3 = 6$ و منه المنوال هو: $M_o = x_3 = 63$

[14] حاكم قصد علي سهام، مرجع سابق، ص 57

أ) حساب المنوال في حالة الجداول التكرارية ذات فترات:

نحسب المنوال في هذه الحالة بالعلاقة التالية:[15]

$$\boxed{M_o = a + \frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2} \times l}$$

a: هي بداية الفئة المنوالية.

l: طول الفئة المنوالية.

Δ_1: الفرق بين تكرار الفئة المنوالية و تكرار الفئة السابقة لها.

Δ_2: الفرق بين تكرار الفئة المنوالية و تكرار الفئة التي بعدها.

مثال 2-20:

نعود مثلا للجدول (12) و الذي يتعلق بالأجور التي يتقاضاها 81 عاملا بالدينار في اليوم:

الأجور (DA)	$[400-450[$	$[450-500[$	$[500-550[$	$[550-600[$	$[600-650[$
عدد العمال	15	20	25	10	11

في هذا المثال الفئة المنوالية هي: $[500-550[$ و منه:

$$M_o = a + \frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2} \times l = 500 + \frac{5}{5+15} \times 50 = 500 + 12.5 = 512.5$$

و منه أغلبية العمال في العينة المدروسة يتلقون أجرا يقدر بحوالي 512.5 دينارا في اليوم.

ب) إيجاد المنوال بيانيا:[16]

نستخدم المدرج التكراري، و ذلك باتباع الخطوات التالية:

1. رسم المدرج التكراري للتوزيع.
2. وصل بخط مستقيم رأس الحد الأعلى للفئة المنوالية برأس الحد الأعلى للفئة السابقة لها.
3. وصل بخط مستقيم رأس الحد الأدنى للفئة المنوالية برأس الحد الأدنى للفئة التي بعدها.
4. إسقاط عمود من تقاطع الخطين السابقين على المحور الأفقي، و نقطة الإسقاط على المحور تمثل قيمة المنوال.

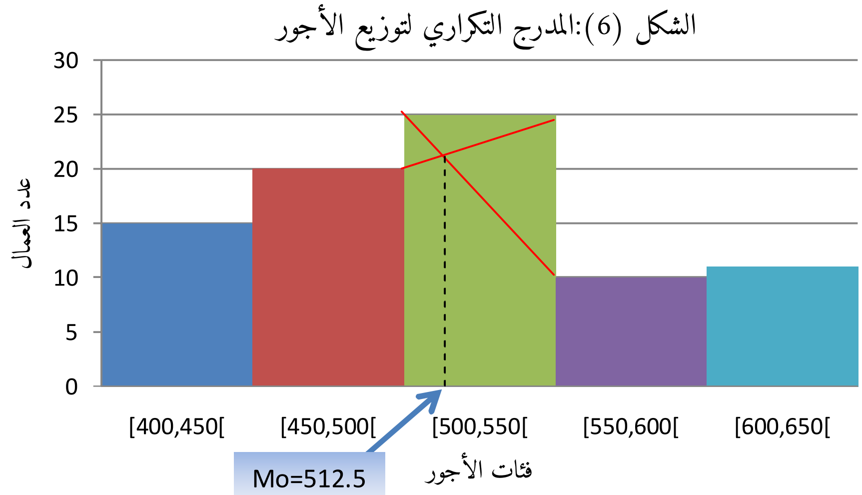
مثال 2-21:

نعين منوال المثال السابق بيانيا.

---

[15] عاشور حيدوشي، مرجع سابق، ص 79

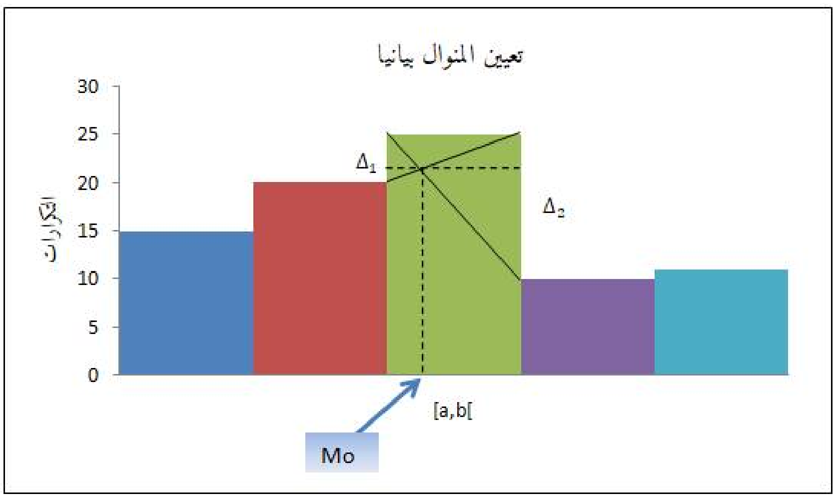
[16] عاشور حيدوشي، مرجع سابق ص79



البرهان على علاقة حساب المنوال: سنبرهن الآن على قانون حساب المنوال بالاستعانة بالتمثيل البياني. نضع

Δ_1: الفرق بين تكرار الفئة المنوالية و تكرار الفئة السابقة لها.

Δ_2: الفرق بين تكرار الفئة المنوالية و تكرار الفئة التي بعدها.



بتطبيق نظرية طاليس على المثلثين المتقابلين رأسيا نجد:

$$\frac{M_O-a}{\mathrm{b}-M_O}=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\Rightarrow\frac{M_O-a}{\mathrm{b}-M_O+M_O-a}=\frac{\Delta_1}{\Delta_2+\Delta_1}$$
$$\Rightarrow\frac{M_O-a}{l}=\frac{\Delta_1}{\Delta_2+\Delta_1}$$

و منه ينتج لنا:

$$M_o=a+\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\times l$$

ملاحظة: إذا كانت فئات التوزيع الإحصائي غير متساوية الطول نقوم بتعديل التكرارات و تكون الفئة المنوالية هي الفئة المقابلة لأكبر تكرار معدل، و يتم حساب المنوال بتطبيق العلاقة السابقة و باستخدام التكرار المعدل.

مثال 2-22:

الجدول (12) يتعلق بالأجور التي يتقاضاها 81 عاملا بالدينار في اليوم.

طول الفئة L_i	50	50	150	100	50
الأجور (DA)	$[400-450[$	$[450-500[$	$[500-650[$	$[650-750[$	$[750-800[$
عدد العمال n_i	15	20	25	10	11
التكرار المعدل n_i^*	15	20	25/3	5	11

طول الفئة المختار هو $L^* = 50$

$$n_i^* = n_i \times \frac{L^*}{L_i}$$

في هذا المثال الفئة المنوالية هي: $]500-550]$ و منه:

$$M_o = a + \frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2} \times l = 450 + \frac{5}{5+\frac{35}{3}} \times 50 = 465$$

و منه أغلبية العمال في العينة المدروسة يتلقون أجرا يقدر بحوالي 465 دينارا في اليوم.

ج) خواص المنوال:[17]

- لا يتأثر بالقيم المتطرفة.
- يمكن حسابه من الجداول التكرارية ذات فترات غير محدودة.
- يمكن إيجاده بيانيا و يمكن أن يكون أكثر من منوال واحد.
- لا يدخل في حسابه جميع البيانات.

8.2 العلاقة بين مقاييس النزعة المركزية

إذا كان لمجموعة البيانات منوال واحد فإن المتوسط والوسيط والمنوال تربطهم علاقة نسبية بينهم و هي علاقة تقريبية لا تختلف إلا اختلافا ضئيلا من حالة لأخرى و بصفة عامة نجد دائما أن الفرق بين المتوسط الحسابي و المنوال يعادل ثلاثة أمثال الفرق بين المتوسط الحسابي و الوسيط أي:[18]

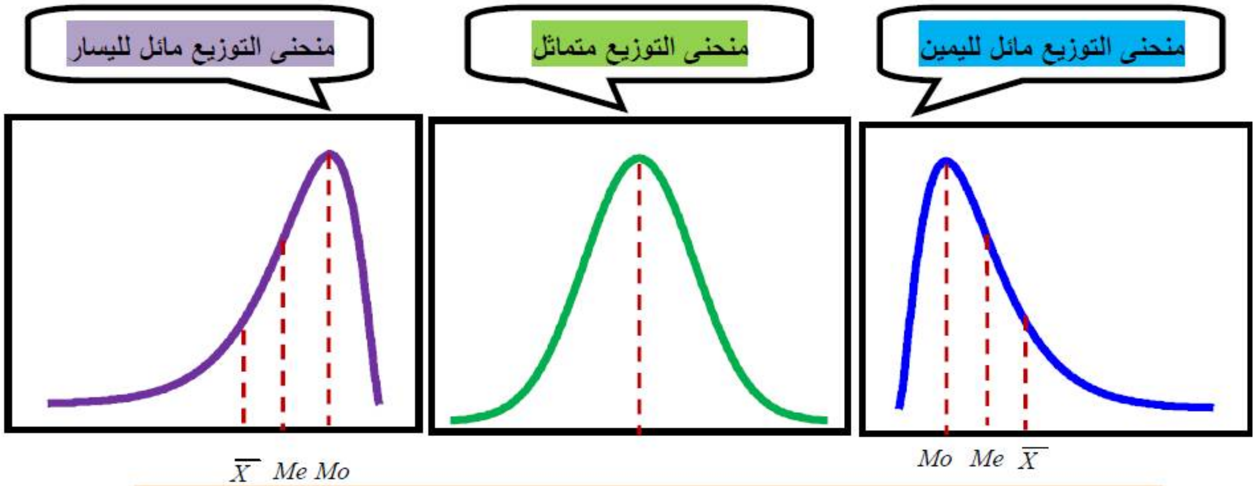
$$\boxed{\bar{X} - M_o = 3(\bar{X} - M_e)}$$

[17] علي عبد السلام العماري وعلي حسين العجيلي، مرجع سابق، ص67

[18] عاشور حيدوشي، مرجع سابق، ص 81

أما بالنسبة لمنحنيات التوزيع فيمكن أن تكون متماثلة تشبه الجرس و يمكن أن تكون ملتوية إلى اليمين أو اليسار حسب المخطط التالي:

الشكل (8): العلاقة بين مقاييس النزعة المركزية.



$\overline{X} \langle M_e \langle M_0$ $\qquad$ $\overline{X} = M_e = M_0$ $\qquad$ $M_0 \langle M_e \langle \overline{X}$

9.2 تمارين مقترحة

التمرين الأول:

تعرض البيانات الآتية توزيع عمال ورشة بناء حسب عدد الأيام التي اشتغلوها خلال أحد أشهر السنة:

عدد الأيام	10	15	18	20	22	المجموع
عدد العمال	10	12	8	6	4	40

1. حدد المتغير الاحصائي المدروس و طبيعته.
2. احسب متوسط أيام اشتغال العمال في هذا الشهر.
3. احسب كلا من الوسيط و المنوال.

التمرين الثاني:

خلال الإحصاء العام للسكان، قام أحد الباحثين بتسجيل النفقات الشهرية لـ 100 أسرة و تنظيمها في الجدول التالي (الوحدة 1000دج):

النفقات	$[20-25[$	$[25-35[$	$[35-40[$	$[40-55[$	$[55-75[$	$[75-80[$	المجموع
عدد الأسر	5	15	20	25	30	5	100

1. حدد المتغير الاحصائي المدروس و طبيعته.
2. احسب معدل الإنفاق الشهري لهذه العائلات.

3. احسب وسيط و منوال النفقات الشهرية ثم تحقق من المنوال بيانيا.
4. استنتج شكل التوزيع الاحصائي.

التمرين الثالث: لتكن السلسلة الإحصائية التالية: 32 25 27 32 28 33 32 30 29 33 26

1. أ) احسب الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة و طريقة الوسط الفرضي.

ب) احسب الوسط الهندسي، الوسط التربيعي و الوسط التوافقي.

ج) ماذا تستنتج؟

2. احسب كلا من الوسيط و المنوال.

التمرين الرابع: الجدول الإحصائي التالي يبيّن توزيع عمال مؤسسة ما حسب أجورهم الشهرية (الوحدة 10^3 دج)

الأجر	$[60-70[$	$[70-80[$	$[80-e[$	$[e-100[$	$[100-110[$	$[110-120[$
عدد العمال n_i	18	30	25	17	12	8

1) حدد الخاصية المدروسة و طبيعتها.
2) جد قيمة الحد المجهول e إذا علمت أن الأجر الوسيطي هو $M_e = 84{,}45$.
3) ما هو متوسط الأجر الشهري للعمال.
4) جد الأجر الشهري الشائع و بينه على الرسم البياني المناسب.
5) تعرضت المؤسسة لأزمة مالية فقررت إدارتها الاستغناء عن 10% من العمال ذوي الأجور المرتفعة، ما هو الحد الأقصى الجديد للأجور في هذه المؤسسة.

التمرين الخامس: مصنع آجر به 150 عاملا، 90 منهم يتقاضون أجرا شهريا قدره 33500 دج، و 40 عاملا يتقاضون أجرا شهريا قدره 39000 دج، أما بقية العمال فأجورهم الشهرية 51000 دج.

1. ما هو معدل الأجور الشهرية في هذا المصنع؟
2. بعد توسيع المصنع قررت إدارته توظيف 20 عاملا جديدا بأجور تساوي متوسط الأجور السابقة، فكم يصبح متوسط الأجر الشهري في هذا المصنع.

التمرين السادس: بين أن مجموع مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي أقل من مجموع مربعات انحرافات نفس القيم عن أي قيمة أخرى أي

من أجل $\bar{X} \neq x_\alpha$ لدينا:

$$\sum(x_i-\bar{X})^2 < \sum(x_i-x_\alpha)^2$$

تدل هذه الخاصية على أن المتوسط الحسابي أقرب إلى البيانات x_i من أي قيمة أخرى.

الفصل الثالث: مقاييس التشتت

سنتناول في هذا الفصل:

- المدى
- الانحراف الربيعي
- متوسط الانحراف المطلق
- الانحراف المعياري

3 الفصل الثالث: مقاييس التشتت

مقاييس النزعة المركزية لا تكفي لإعطاء صورة كاملة عن علاقة البيانات ببعضها البعض، فقد نجد أن لسلسلتين مختلفتين نفس المتوسط الحسابي، أو المنوال أو الوسيط ... بينما مدى البيانات للسلسلتين مختلف.[19]

مثلا إذا كانت نتائج طالبين في مقاييس مختلفة كالآتي:

الطالب الأول	4	6	17	17	11
الطالب الثاني	12	9	11	10	13

معدل كل طالب (الوسط الحسابي) هو 11، و كذلك العلامة التي تتوسط كلا من نتائجهما (الوسيط) هي 11، لكن نلاحظ أن نتائج الطالب الأول أكثر تشتتا من نتائج الطالب الثاني، هذا ما يجعل من الضرورة استخدام مقاييس أخرى تكمل المقاييس الأولى تسمى "بمقاييس التشتت".

مقاييس التشتت هي عبارة عن مقاييس إحصائية هدفها قياس مدى تشتت و تباعد البيانات عن بعضها البعض. هناك بعض المقاييس تقيس تقارب أو تباعد القيم عن بعضها البعض وهي المدى والانحراف الربيعي، ومقاييس أخرى تقيس قرب أو بعد القيم من قيمة معينة كالمتوسط الحسابي مثلا وهي الانحراف المتوسط والانحراف المعياري.

1.1 المدى

هو أبسط مقاييس التشتت مفهوما و تطبيقا و حسابا، و هوعبارة عن الفرق أكبر قيمة - أصغر قيمة للسلسلة الاحصائية، يعطي المدى فكرة عن انتشار قيم السلسلة بشرط عدم وجود قيم متطرفة.

مثال3-1-1:

تمثل السلسلة التالية نتائج 40 طالبا في اختبار معين.

8	3	9	8	9	17	2	15	5	**12**
3	6	6	14	6	14	13	16	7	**10**

[19] عاشور حيدوشي، مرجع سابق، ص 93

15	14	15	17	3	12	18	17	6	7
16	18	12	5	12	5	12	6	10	**14**

مدى هذه السلسلة هو: $18 - 2 = 16$

ملاحظة: في حالة توزيع تكراري لمتغير متصل يمثل المدى الفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيرة و الحد الأدنى للفئة الأولى.

1.3 المدى الربيعي و الانحراف الربيعي

إذا كانت السلسلة تحوي قيم متطرفة فإن المدى غير مناسب للتعبير عنها، كما أنه لا يمكننا حسابه في حالة جداول التوزيع التكراري المفتوحة، و للتخلص من هذه العيوب نهمل الربعان الأول و الأخير من البيانات المرتبة، و نحسب الفرق بين الربيع الأول و الربيع الثالث و هذا ما يسمى" بالمدى الربيعي ".

يستخدم هذا المقياس إذا كان الوسيط هو المقياس المناسب للنزعة المركزية أو عندما تكون هناك قيم متطرفة جدا.

الانحراف الربيعي هو نصف المدى الربيعي و يمثل انحراف الربيعيان الأول و الثالث عن الوسيط.

مثال 3-2: لنحسب المدى الربيعي للسلسلة التالية:

$$1 ، 2 ، 3 ، \underset{Q_1}{\boxed{4}} ، 5 ، 7 ، 8 ، \underset{Q_2 = M_e}{\boxed{10}} ، 12 ، 14 ، 15 ، \underset{Q_3}{\boxed{16}} ، 18 ، 19 ، 20$$

لدينا:

$$I_Q = Q_3 - Q_1 = 16 - 4 = 12$$

و منه قيمة المدى الربيعي هي: 12، و قيمة الانحراف الربيعي هي $\frac{12}{2} = 6$

مثال 3-3: الجدول (12) يتعلق بالأجور التي يتقاضاها 81 عاملا بالدينار في اليوم

الأجور (DA)	$[400 - 450[$	$[450 - 500[$	$[500 - 550[$	$[550 - 600[$	$[600 - 650[$
عدد العمال	15	20	25	10	11

المطلوب: حساب المدى، المدى الربيعي و الانحراف الربيعي.

الحل:

حساب المدى: $650 - 400 = 250$

حساب المدى الربيعي: سبق لنا حساب الربيعيان الأول و الثالث في المثال 2-17، لدينا:

$$I_Q = Q_3 - Q_1 = 553.75 - 463.125 = 90.625$$

و منه المدى الربيعي هو: 90.625 و الانحراف الربيعي: $\frac{90.625}{2} = 45.3125$

2.3 متوسط الانحراف المطلق (الانحراف المتوسط)

هو المتوسط الحسابي للقيم المطلقة لانحرافات القيم عن وسطها الحسابي[20]، و ، و نرمز له بالرمز $E_{\bar{X}}$ السبب في الاعتماد على القيم المطلقة للانحرافات هو التخلص من القيم السالبة لأن مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفر.

يحسب متوسط الانحراف المطلق بالعلاقة التالية:

$$\boxed{E_{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{X}|}{n}}$$

مثال 4.3: لتكن السلسلة التالية:

600 ، 250 ، 300 ، 550 ، 500 ، 350 ، 450 ، 400

الوسط الحسابي لهذه السلسلة هو: $\bar{X} = 425$، لدينا:

x_i	400	450	350	500	550	300	250	600	المجموع
$\|x_i - \bar{X}\|$	25	25	75	75	125	125	175	175	800

و منه :

$$E_{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{X}|}{n} = \frac{800}{8} = 100$$

قيمة متوسط الانحراف المطلق لهذه السلسلة عن وسطها الحسابي هي : 100

مثال 5.3:

نرجع لمثال نتائج الطلبة و نقارن تشتتاتها باستخدام الانحراف المتوسط.

لدينا معدل كل طالب (الوسط الحسابي) هو 11 و منه:

x_i الطالب الأول	4	6	17	17	11
$\|x_i - \bar{X}\|$	7	5	6	6	0

و منه :

$$E_{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{X}|}{n} = \frac{24}{5} = 4.8$$

قيمة متوسط الانحراف المطلق لنتائج الطالب الأول هي : 4.8

---

[20] عاشور حيدوشي، مرجع سابق، ص 96

الطالب الثاني y_i	12	9	11	10	13
$\lvert y_i - \bar{Y} \rvert$	1	2	0	1	2

$$E_{\bar{Y}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lvert y_i - \bar{Y} \rvert}{n} = \frac{6}{5} = 1.2$$

نلاحظ أن $E_{\bar{X}} > E_{\bar{Y}}$ و منه علامات الطالب الأول أكثر تشتتا من علامات الطالب الثاني.

ملاحظة:

في حالة البيانات الاحصائية المبوبة تصبح العلاقة السابقة كالآتي:

$$\boxed{E_{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \lvert x_i - \bar{X} \rvert}{\sum_{i=1}^{k} n_i}}$$

مثال 6.3:

يمثل الجدول التالي توزيع 36 عائلة حسب عدد الأولاد

عدد الأولاد x_i	0	1	2	3	4	5	المجموع
عدد العائلات n_i	3	10	9	7	5	2	36

نحسب أولا المتوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = 2.19$$

$\lvert x_i - \bar{X} \rvert$	2.19	1.19	0.19	0.81	1.81	2.81
$n_i \lvert x_i - \bar{X} \rvert$	6.57	11.9	1.71	5.67	9.05	5.62

$$E_{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \lvert x_i - \bar{X} \rvert}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{6.57+11.9+1.71+5.67+9.05+5.62}{36} = 1.1$$

3.3 التباين و الانحراف المعياري

التباين :هو عبارة عن المتوسط الحسابي لمربعات الفروق بين قيم المتغير الإحصائي ومتوسطها الحسابي[21]، و يرمز له بالرمز σ^2.

1. [21]مصطفى يوسف كافي وآخرون: " الإحصاء في الإدارة والاقتصاد"، مكتبة المجتمع العربي، الأردن، الطبعة الأولى 2012.، ص 127

يعطى التباين بالعلاقة التالية:

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2}{n}}$$

يمكن تبسيط العلاقة السابقة كما يلي :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2+\sum_{i=1}^{n}(\bar{X})^2-2\bar{X}\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2+n(\bar{X})^2-2n(\bar{X})^2}{n}$$

و منه:

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

مثال 7.3:

ورشة لصناعة الآجر يعمل بها 6 عمال، عدد سنوات الخبرة لهؤلاء العمال كانت كما يلي:

7 ، 3 ، 18 ، 15 ، 12 ، 11 .

المطلوب: إيجاد التباين لعدد سنوات الخبرة.

الحل:

لدينا: $\bar{X} = \frac{7+3+18+15+12+11}{6} = \frac{66}{6} = 11$

حساب التباين بالعلاقة الأولى:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i)^2}{n} - (\bar{X})^2 = \frac{7^2+3^2+18^2+15^2+12^2+11^2}{6} - 11^2 = \frac{872}{6} - 121 \approx 24.33$$

و منه قيمة التباين هي: 24.33

حساب التباين بالعلاقة الثانية:

القيم x_i	7	3	18	15	12	11	المجموع
$(x_i-\bar{X})^2$	16	64	49	16	1	0	146

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n} = \frac{146}{6} \approx 24.33$$

ملاحظة: في حالة الجداول التكرارية تصبح العلاقات السابقة كالتالي:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i-\bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i {x_i}^2}{n} - (\bar{X})^2$$

عند استخدام التباين كمقياس من مقاييس التشتت نجد أنه يعتمد على مجموع مربعات الانحرافات، و بالتالي لا يتماشى هذا المقياس مع مع وحدات قياس المتغير محل الدراسة، لأجل ذلك لجأ الاحصائيون إلى مقياس منطقي يناسب وحدات قياس المتغير، هذا المقياس هو: الانحراف المعياري.

الانحراف المعياري: هو الجذر التربيعي للتباين[22] و يعتبر من أهم المقاييس الاحصائية للتشتت و أكثرها استخداما في النظريات و القوانين الاحصائية و يرمز له بالرمز σ.

مثال 8.3: في المثال السابق نجد:

$$\sigma = \sqrt{24.33} \approx 4.93$$

و في هذه الحالة نقول أن الانحراف المعياري لسنوات الخبرة هو: 4.93 سنة.

مثال9.3: إذا كانت نتائج طالبين في مقاييس مختلفة كالآتي:

11	17	17	6	4	الطالب الأول
13	10	11	9	12	الطالب الثاني

معدل كل طالب (الوسط الحسابي) هو 11، لنحسب الانحراف المعياري لكل طالب لدراسة تشتت نتائجه.

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{4^2+6^2+17^2+17^2+11^2}{5} - 11^2} = 5.4$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{12^2+9^2+11^2+10^2+13^2}{5} - 11^2} = 1.4$$

و منه نتائج الطالب الأول أكثر تشتتا من نتائج الطالب الثاني.

خواص الانحراف المعياري:

من خصائص الانحراف المعياري ما يلي:

- الانحراف المعياري لسلسلة متكونة من مقدار ثابت يساوي صفر.
- عند إضافة أو طرح مقدار ثابت a لكل قيمة x_i فإن الانحراف المعياري لا يتغير أي: $\sigma(x \mp a) = \sigma(x)$

[22] محمد صبحي أبو صالح وعدنان محمد عوض: " مقدمة في الإحصاء"، مركز الكتب الأردني، الأردن، 1997، ص 43

مثال 10.3:

أ) إذا كانت أوزان 5 دجاجات بالكيلوغرام كالآتي: 1 ، 1.75 ، 2 ، 1.25 ، 2.5 فاحسب الانحراف المعياري لأوزان الدجاج.

الحل: لدينا $\bar{X} = \frac{1+1.75+2+1.25+2.5}{5} = 1.7$

و منه متوسط أوزان الدجاج هو 1.7kg

x_i	1	1.75	2	1.25	2.5	المجموع
$(x_i - \bar{X})^2$	0.49	0.0025	0.09	0.2025	0.64	1.425

لدينا:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2}{n}} = \sqrt{\frac{1.425}{5}} \approx 0.53$$

و منه الانحراف المعياري لأوزان الدجاج هو: 0.53kg

ب) كشفت الدراسات أنه بتطبيق برنامج غذائي خاص بالتسمين لفترة زمنية محددة يزيد وزن الدجاجة $0.5kg$.

إذا طبق هذا البرنامج على الدجاجات الخمس، ما هو الانحراف المعياري الجديد لأوزان الدجاج؟

الحل:

زاد وزن كل دجاجة بـ0.5kg و منه: $\sigma(x + 0.5) = \sigma(x)$

أي أن الانحراف المعياري لأوزان الدجاج لم يتغير بعد تطبيق البرنامج الغذائي و هو: $0.53kg$

- ضرب أو قسمة كل قيمة x_i في مقدار ثابت (موجب) يؤثر على الانحراف المعياري بالمقدار نفسه أي:

$$\sigma\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{c}\sigma(x) \qquad ,c > 0$$

$$\sigma(\alpha x) = \alpha\sigma(x) \qquad ,\alpha > 0$$

مثال 11.3: صحح أستاذ الرياضيات أوراق اختبار أحد أقسام الرابعة متوسط و كان التصحيح من 20 درجة، ثم حسب الانحراف المعيار ي لعلامات التلاميذ فكانت قيمته 3 درجات. عدل الأستاذ النقاط لتكون من 40 درجة و وضعها في كشوف النقاط، و أراد أن يعرف قيمة الانحراف المعياري الجديد.

تعديل الأستاذ لعلامات التلاميذ يعني ضربها في 2، و منه:

$$\sigma(2x) = 2\sigma(x) = 2 \times 3 = 6$$

إذن قيمة الانحراف المعياري المعدّل هو 6 درجات.

4.3 معامل الاختلاف

يعد الانحراف المعياري أحسن مقياس لقياس التشتت، كما يمكن الاعتماد عليه للمقارنة بين توزيعين إحصائيين من نفس النوعية و لهما نفس المتوسطات الحسابية، أما إذا كانت الظواهر تدل على صفات مختلفة أو إذا كانت المتوسطات مختلفة فإن المقارنة غير منطقية، لهذا وجد مقياس آخر يسمى: معامل الاختلاف.

معامل الاختلاف: هو عبارة عن النسبة المئوية للانحراف المعياري منسوبا إلى المتوسط الحسابي، و يرمز له بالرمز C.V، و يحسب بالعلاقة التالية:[23]

$$\boxed{C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100}$$

مثال 12.3: في إحدى حصص الفحص الطبي للطلبة، سجلت العيادة أطوال خمسة طلبة و أوزانهم في الجدول التالي:

الجدول (14): أطوال خمسة طلبة و أوزانهم.

الطول (m)	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
الوزن (kg)	50	52	54	56	58

السؤال: هل أطوال الطلبة أكثر تجانسا من أوزانهم أم العكس؟

الحل:

بما أن الأطوال و الأوزان صفاة مختلفة فإننا نستخدم معامل الاختلاف لمعرفة أيهما أكثر تجانسا.

بالنسبة للأطوال لدينا:

$$\bar{X} = \frac{1.5+1.6+1.7+1.8+1.9}{5} = 1.7$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum(x_i)^2}{n} - (\bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1.5^2+1.6^2+1.7^2+1.8^2+1.9^2}{5} - 1.7^2} \approx 0.14$$

و منه:

بالنسبة للأوزان لدينا:

$$\bar{Y} = \frac{50+52+54+56+58}{5} = 54$$

---

[23] حاكم قصد علي سهام، مرجع سابق، ص 64

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{\sum(y_i)^2}{n} - (\bar{Y})^2} = \sqrt{\frac{50^2+52^2+54^2+56^2+58^2}{5} - 54^2} \approx 2.82$$

و منه:

نلاحظ أن معامل الاختلاف الخاص بالأوزان هو الأصغر، و منه نستنتج أن أوزان الطلبة أكثر تجانسا من أطوالهم.

5.3 تمارين مقترحة

التمرين الأول: الجدول التالي يوضح توزيع عدد عمال إحدى الشركات حسب الأجر الشهري.

الأجور						
عدد العمال	18	30	25	17	12	8

المطلوب: جد تشتت بيانات الجدول باستخدام الانحراف المتوسط.

التمرين الثاني:

يمثل الجدول التالي توزيع 120 مؤسسة حسب مبيعاتها الشهرية (بالمليون دينار)

المبيعات الشهرية					
عدد المؤسسات	35	15	20	15	35

1. حدد كلا من المجتمع الاحصائي و المتغير المدروس مع ذكر نوعه.
2. ضع جدول كلا من التكرارات المجمعة الصاعدة و النازلة.
3. من الجدول حدد: $n_4, N_3^{\downarrow}, N_2^{\uparrow}$ ثم اشرح دلالات كل منها.
4. احسب كلا من المتوسط الحسابي و المنوال.
5. حدد قيمة الوسيط حسابيا و بيانيا.
6. احسب كلا من الانحراف المتوسط و الانحراف الربيعي.

التمرين الثالث:

الجدول الآتي يمثل الأجور الشهرية لـ 300 عامل في مصنع معين (بالألف دينار):

الأجور	$[10-20[$	$[20-30[$	$[30-40[$	$[40-50[$	Σ
عدد العمال	40	60	150	50	300

1. مثل بيانيا الجدول السابق مع تمثيل المضلع التكراري.
2. حدد الفئة المنوالية ثم جد المنوال حسابيا و تحقق من ذلك بيانيا.
3. - احسب الوسط الحسابي و التباين.

- استنتج كلا من الانحراف المعياري و معامل الاختلاف.

4. اعط المجال $[Q_1, Q_3]$، و اذكر ماذا يمثل.
5. اعط نسبة العمال الذين أجورهم أقل من 32000 دج و أكثر من 18000 دج.

التمرين الرابع:

بعد إجراء اختبار الإحصاء و الاحتمالات لطلبة السنة ثالثة جامعي كانت علاماتهم كالآتي:

طلبة قسم المتوسط

10	12	8	14	7	16	5	12	4
15	18	10	11	9	8	12	14	15
12	9	13	17	7	5	14	6	18

طلبة قسم الثانوي

12	14	8	7	15	17	14	13
12	16	13	11	5	4	7	11
8	7	9	12	10	9	12	14

1. احسب مدى كل سلسلة إحصائية.
2. احسب المدى الربيعي لكل سلسلة إحصائية.
3. احسب معدل كل سلسلة و الانحراف المعياري، ثم استنتج أي من العلامات أكثر تشتتا.

التمرين الخامس:

1) إذا كان وسيط علامات طالب في 5 مواد هو 10 فما هو معدله في هذه المواد إذا كان الانحراف المعياري لهذه العلامات هو 0.

2) نعتبر متتاليتين من الأعداد، تشمل الأولى على N_1 حد و الثانية على N_2 حد. إذا علمت أن المتتاليتين لهما نفس المتوسط الحسابي $\bar{X}$ و الأولى انحرافها المعياري σ_1 و الثانية انحرافها المعياري σ_2.

أ) بين أن $\bar{Z} = \bar{X}$ ، حيث $\bar{Z}$ هو المتوسط الحسابي للمتتالية ذات $N_1 + N_2$ حد السابقتين.

ب) عين بدلالة N_1، N_2 ، σ_1 و σ_2 الانحراف المعياري للمتتالية ذات $N_1 + N_2$ حد السابقتين.

التمرين السادس:

1. إذا علمت أن متوسط درجة الحرارة لمدينة ما هو 25 درجة مئوية بانحراف معياري مقداره 3 درجات مئوية، فجد كلا من المتوسط و الانحراف المعياري بالدرجات الفهرنهايتية. (يعطى: الدرجة الفهرنهايتية =32+1.8× الدرجة المئوية).
2. إذا علمت أن معامل الاختلاف لإنتاج أحد المصانع في فترة ما هو 20%، أوجد عدد أيام هذه الفترة إذا كان الانحراف المعياري للإنتاج هو 10، و مجموع إنتاج الفترة هو 500 وحدة.

الفصل الرابع: الارتباط و الانحدار الخطي البسيط

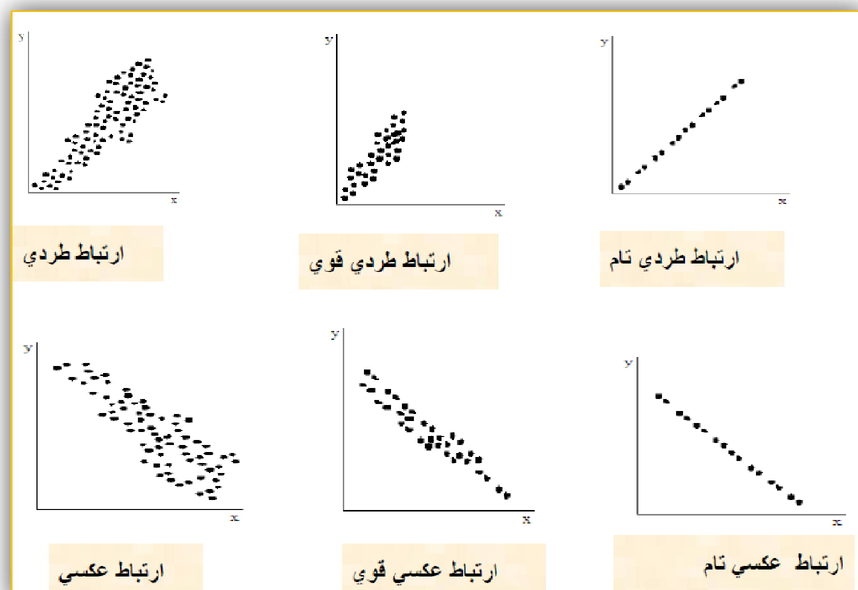
Correlation &
Simple Linear Regression

سنتناول في هذا الفصل:

1) مفهوم الارتباط و أنواعه

2) طريقة حساب معامل الارتباط.

3) مفهوم الانحدار الخطي البسيط و تطبيقاته



4 الفصل الرابع: الارتباط و الانحدار الخطي البسيط

في كثير من الأحيان تقابلنا مواقف تتضمن متغيرين (ظاهرتين) أو أكثر، و يكون المطلوب معرفة ما إذا كان هناك علاقة بين هذه المتغيرات و ما هو شكل هذه العلاقة، و أيضا كيفية التنبؤ بأحد هذين المتغيرين في حالة معرفتنا بالمتغير الآخر.

فكثيرا ما نجد في بعض المجالات معادلة الطول مع الوزن فإذا أردت أن تعرف الوزن المثالي أدخل طولك في المعادلة ليظهر وزنك المثالي ، و قد توصلوا إلى هذه المعادلة بدراسة العلاقة بين المتغيرين الطول و الوزن على عينة من الأفراد.

1.4 التغاير المشترك

أ) في حالة القيم المفردة:

لتكن السلسلة الاحصائية المضاعفة الآتية:

X	x_1	x_2	…	x_n
Y	y_1	y_2	…	y_n

نسمي تغاير مشترك (أو تباين مشترك) لـ X و Y العبارة التالية:[24]

$$\boxed{\begin{aligned} cov(x,y) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})(y_i-\bar{Y}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{X}\bar{Y} \end{aligned}}$$

مثال 4-1:

تم تسجيل علامات رياضيات لتلاميذ أحد أقسام الثالثة ثانوي في الجدول (15):

العلامة في الثلاثي الثالث (x_i)	12	7	14	17	9	12	18	6	16	13	11
العلامة في البكالوريا (y_i)	10	6	14	15	10	11	15	8	15	14	10

نحسب أولا معدل الرياضيات لكل من الثلاثي الثالث و البكالوريا (المتوسط الحسابي)

$$\bar{X} = \frac{12+7+14+17+9+12+18+6+16+13+11}{11} \approx 12.27$$

$$\bar{Y} = \frac{10+6+14+15+10+11+15+8+15+14+10}{11} \approx 11.64$$

نحسب الآن التباين المشترك بتطبيق العلاقة السابقة

[24] حاكم قصد علي سهام، مرجع سابق، ص66

$$cov(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{X}\bar{Y}$$

$$= \frac{12\times10+7\times6+14\times14+17\times15+9\times10+12\times11+18\times15+6\times8+16\times15+13\times14+11\times10}{11} - 12.27 \times 11.64$$

$$= \frac{1685}{11} - 143.19 = 153.18 - 142.82 \approx 10.36$$

و منه قيمة التغاير المشترك هي: 10.36

ب) في حالة الجداول التكرارية المضاعفة:

سبق لنا في الفصل الأول التعرف على الجداول التكرارية المضاعفة و هي على الشكل الآتي:

Y / X	y_1	y_2	...	y_q	المجموع
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1q}	$n_{1.}$
x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2q}	$n_{2.}$
...	...	...	...	...	...
x_p	n_{p1}	n_{p2}	...	n_{pq}	$n_{p.}$
المجموع	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.q}$	N

نسمي تغاير مشترك (أو تباين مشترك) لـ X و Y العبارة التالية:

$$\boxed{cov(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}(x_i - \bar{X})(y_j - \bar{Y})}$$

حيث: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$ و $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q} n_j y_j$

مثال4-2: الجدول (16): التوزيعات الهامشية للجداول التكرارية المضاعفة.

X / Y	20	30	40	50	60	***Y*** **هامشي**
10	1	2	2	0	0	5
14	3	8	10	4	0	25
18	1	7	12	11	4	35
22	0	3	6	5	1	15
X **هامشي**	5	20	30	20	5	80

لدينا:

$$\bar{X} = \frac{20\times5+30\times20+40\times30+50\times20+60\times5}{80} = \frac{3200}{80} = 40$$

$$\bar{Y} = \frac{10\times5+14\times25+18\times35+22\times15}{80} = \frac{1360}{80} = 17$$

لحساب التباين المشترك نستعين بالجدول الآتي:

$y_j - \bar{Y}$ \ $x_i - \bar{X}$	-20	-10	0	10	20	المجموع
-7	1(140)	2(140)	2(0)	0(0)	0(0)	(280)
-3	3(180)	8(240)	10(0)	4(-120)	0(0)	(300)
1	1(-20)	7(-70)	12(0)	11(110)	4(80)	(100)
5	0(0)	3(-150)	6(0)	5(250)	1(100)	(200)
-	-	-	-	-	-	(880)

و منه :

$$cov(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij}(x_i - \bar{X})(y_j - \bar{Y}) = \frac{1}{80}(880) = 11$$

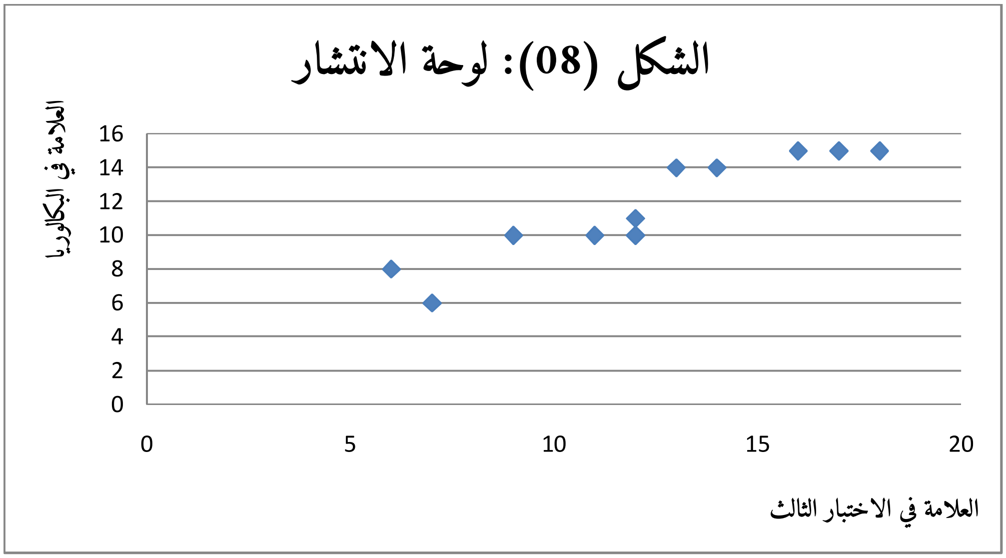
2.4 لوحة الانتشار

إذا فرضنا أن أزواج المشاهدات المرتبة هي: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$، نعينها بيانيا في معلم متعامد و متجانس بنقاط نسميها على الترتيب: $M_1, M_2, \ldots, M_n$ فنتحصل على ما يسمى بلوحة الانتشار.

مثال 4-3: نعود للمثال 4-1 الخاص بعلامات التلاميذ، لدينا:

x_i	12	7	14	17	9	12	18	6	16	13	11
y_i	10	6	14	15	10	11	15	8	15	14	10

بعد تعيين النقاط (x_i, y_i) نتحصل على لوحة الانتشار الآتية:



3.4 الارتباط

بالنظر إلى لوحة انتشار أي متغير عشوائي ذي بعدين X و Y نلاحظ إن كانت هناك علاقة بينهما، و هو ما يسمى بالارتباط الخطي و الغرض منه هو تعيين طبيعة و قوة العلاقة بين متغيرين أو عدمها، فقد يكون الارتباط طرديا (موجب) و قد يكون عكسيا (سالب)، و قد لا يكون هناك ارتباط، و لمعرفة ذلك نحسب ما يسمى بمعامل الارتباط (Correlation Coefficient).

أ) حساب معامل الارتباط في حالة القيم المفردة:

لتكن السلسلة الإحصائية المضاعفة الآتية:

X	x_1	x_2	…	x_n
Y	y_1	y_2	…	y_n

يعرف معامل الارتباط بالعلاقة:[25]

$$\boxed{\rho = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}}$$

حيث: σ_x و σ_y هما كل من الانحراف المعياري لـ X و Y على الترتيب. و $cov(x, y)$ هو التباين المشترك لـ X و Y.

و بعبارة أخرى:

$$\boxed{\rho = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{X}\,\bar{Y}}{\sqrt{\sum x_i{}^2 - n(\bar{X})^2}\sqrt{\sum y_i{}^2 - n(\bar{Y})^2}}}$$

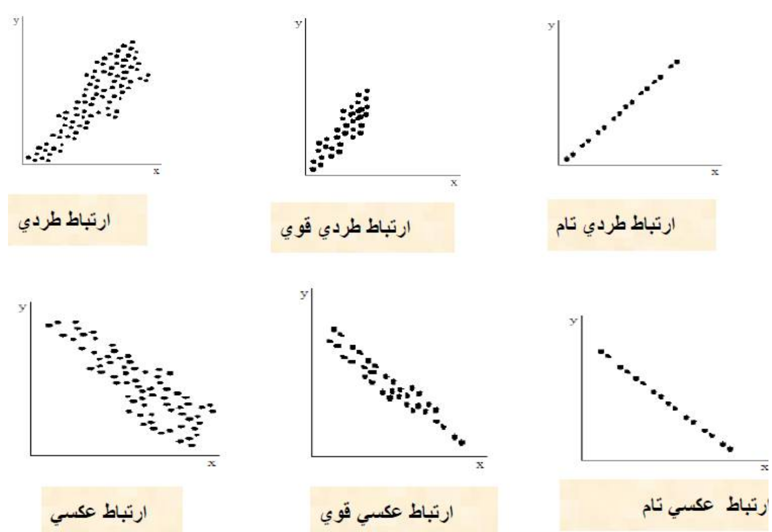
[25] حاكم قصد علي سهام، مرجع سابق، ص 67

ملاحظة:

- $-1 \leq \rho \leq 1$
- إذا كان $\rho \in]0;1[$ فالارتباط طردي.
- إذا كان $\rho \in]-1;0[$ فالارتباط عكسي.
- إذا كان $\rho = 1$ فالارتباط طردي تام.
- إذا كان $\rho = -1$ فالارتباط عكسي تام.
- إذا كان $\rho = 0$ لا يوجد ارتباط.

يمكن توضيح ذلك بيانيا في الرسم التالي:

الشكل (09): طبيعة و قوة الارتباط



مثال 4-4:

نحسب معامل الارتباط للمثال السابق

x_i	12	7	14	17	9	12	18	6	16	13	11
y_i	10	6	14	15	10	11	15	8	15	14	10

في المثال 4-1 وجدنا: $cov(x,y) \approx 10.36$ ، $\bar{X} \approx 12.27$ ، $\bar{Y} \approx 11.64$

نحسب الآن σ_x و σ_y الانحرافان المعياريان لـ X و Y على الترتيب.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i)^2}{n} - (\bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1809}{11} - 12.27^2} = \sqrt{164.45 - 150.55} \approx 3.73$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum(y_i)^2}{n} - (\bar{Y})^2} = \sqrt{\frac{1588}{11} - 11.64^2} = \sqrt{144.36 - 135.49} \approx 2.98$$

و منه:

$$\rho = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{10}{3.37 \times 2.98} = \frac{10.36}{11.11} \approx 0.93$$

و منه فالارتباط بين علامات الرياضيات في الاختبار الثالث و البكالوريا **ارتباط طردي قوي**.

ب) حساب معامل الارتباط في حالة الجداول التكرارية المضاعفة:

في هذه الحالة يحسب معامل الارتباط بنفس العلاقة:

$$\boxed{\rho = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}}$$

حيث: $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{X})^2}$ و $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q} n_j (y_i - \bar{Y})^2}$

و بعبارة أخرى:

$$\boxed{\rho = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}\sqrt{n\sum {y_i}^2 - (\sum y_i)^2}}}$$

مثال 4-5:

نحسب معامل الارتباط للجدول التكراري الخاص بالمثال 4-2:

وجدنا سابقا: $cov(x,y) \approx 11$ ، $\bar{X} \approx 40$ ، $\bar{Y} \approx 17$

نحسب الآن σ_x و σ_y الانحرافان المعياريان لـ X و Y على الترتيب.

X	20	30	40	50	60	المجموع
n_i	5	20	30	20	5	80
$(x_i - \bar{X})$	-20	-10	0	10	20	-
$(x_i - \bar{X})^2$	400	100	0	100	400	-

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{80}(400 \times 5 + 100 \times 20 + 100 \times 20 + 400 \times 5)} = 10$$

Y	10	14	18	22	المجموع
n_j	5	25	35	15	80
$(y_i - \bar{Y})$	-7	-3	1	5	-
$(y_i - \bar{Y})^2$	49	9	1	25	-

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q} n_j (y_i - \bar{Y})^2} = \sqrt{\frac{1}{80}(880)} = \sqrt{11}$$

و الآن نحسب معامل الارتباط:

$$\rho = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{11}{10\sqrt{11}} \approx 0.33$$

و منه العلاقة بين المتغيرين X و Y موجبة (ارتباط طردي).

4.4 مستقيم الانحدار

بعد تمثيل الأزواج المرتبة بالمستوي نحصل على شكل الانتشار فإذا أظهر الشكل الانتشاري للبيانات أن هناك علاقة خطية بين المتغيرين

نقوم بتقدير مستقيم الانحدار لـ Yعلى X بواسطة العلاقة:

$$\hat{y} = ax + b$$

حيث: $a = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{X}\,\bar{Y}}{\sum x_i^2 - n(\bar{X})^2}$ و $b = \bar{Y} - a\bar{X}$

أما تقدير مستقيم الانحدار لـ Xعلى Y فبواسطة العلاقة:

$$\hat{x} = ay + b$$

حيث: $a = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{X}\,\bar{Y}}{\sum y_i^2 - n(\bar{Y})^2}$ و $b = \bar{X} - a\bar{Y}$

مثال 4-6:

نعود للمثال 4-1 الخاص بعلامات التلاميذ.

x_i الثلاثي الثالث	12	7	14	17	9	12	18	6	16	13	11
y_i البكالوريا	10	6	14	15	10	11	15	8	15	14	10

المطلوب:

1) جد معادلة انحدار Y على X.

2) إذا حصل تلميذ على العلامة 8 في الثلاثي الثالث، فما هي العلامة التقديرية له في امتحان البكالوريا؟

3) إذا حصل تلميذ على العلامة 13 في امتحان البكالوريا، فما هي العلامة التقديرية له في الثلاثي الثالث؟

4) ارسم كلا من مستقيم انحدار Y على X و لوحة الانتشار في نفس المعلم.

5) قدر بيانيا :

a) علامة تلميذ في امتحان البكالوريا، علما أن علامته في الثلاثي الثالث هي 15.

b) علامة تلميذ في البكالوريا، علما أن علامته في الثلاثي الثالث هي 7.

الحل:

1) إيجاد معادلة انحدار Y على X.

لدينا مما سبق: $\bar{Y} = 11.64$, $\bar{X} = 0.93$, $\rho = 0.93$, $\sigma_y = 2.98$, $\sigma_x = 3.73$

$$a = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho = \frac{2.98}{3.73} \times 0.93 \approx 0.75$$

$$b = \bar{Y} - a\bar{X} = 11.64 - 0.75 \times 12.27 \approx 2.44$$

و منه معادلة انحدار Y على X هي:

$$\boxed{\hat{y} = 0.75x + 2.44}$$

2) إذا حصل تلميذ على العلامة 8 في الثلاثي الثالث:

من أجل $x = 8$ يكون:

$$\hat{y} = 0.75 \times 8 + 2.44 = 8.44$$

و منه العلامة التقديرية له في امتحان البكالوريا هي 8.44

3) إذا حصل تلميذ على العلامة 13 في امتحان البكالوريا:

نبحث أولا عن معادلة انحدار X على Y $(\hat{x} = ay + b)$.

$$a = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho = \frac{3.73}{2.98} \times 0.93 \approx 1.16$$

$$b = \bar{X} - a\bar{Y} = 12.27 - 1.16 \times 11.64 \approx -1.23$$

و منه معادلة انحدار X على Y هي:

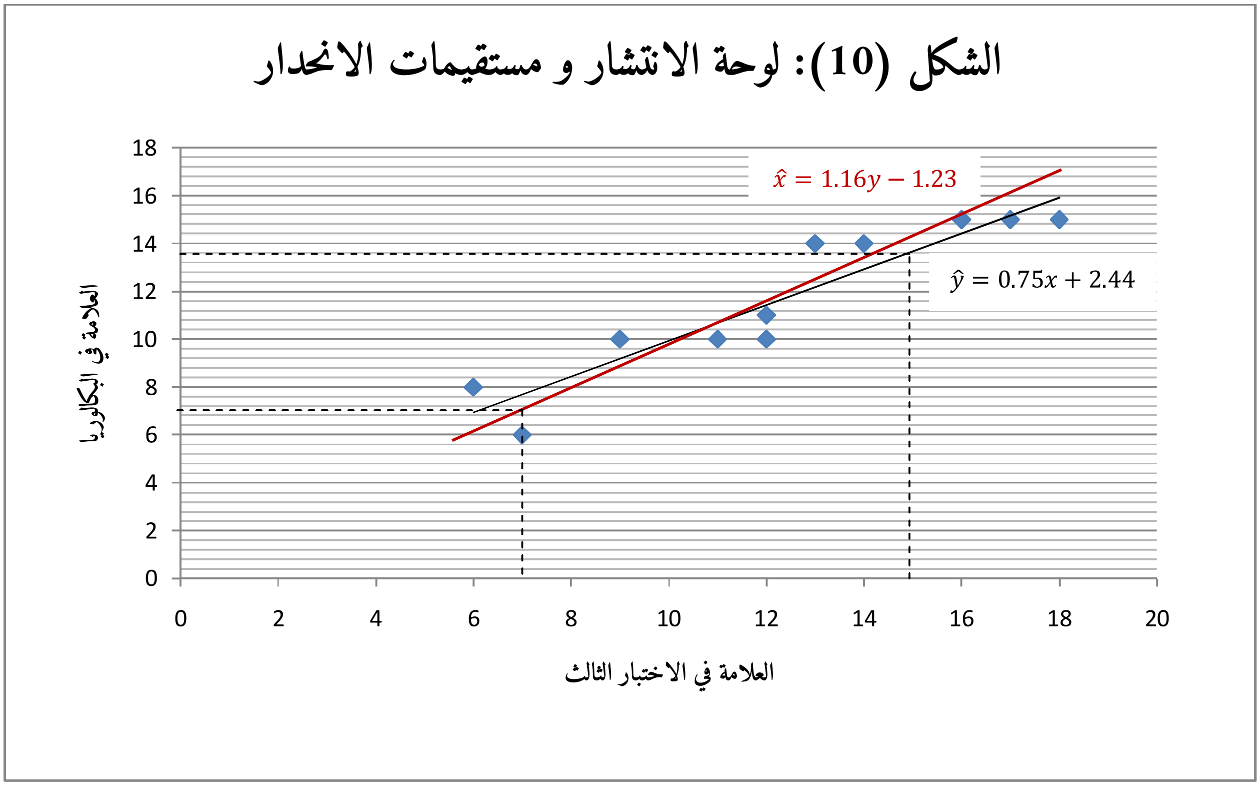
$$\boxed{\hat{x} = 1.16y - 1.23}$$

من أجل $x = 8$ يكون:

$$\hat{x} = 1.16 \times 8 - 1.23 = 13.85$$

و منه العلامة التقديرية له في الثلاثي الثالث هي 13.85

4) رسم كلا من مستقيمات الانحدار و لوحة الانتشار في نفس المعلم.



5) التقدير بيانيا:

a) إذا كانت علامة تلميذ في الثلاثي الثالث هي 15نقدر علامته في البكالوريا بـ 13.5.

b) إذا كانت علامة تلميذ في البكالوريا هي 7 نقدر علامته في الثلاثي الثالث بـ 7.

5.4 تمارين مقترحة

التمرين الأول:

الجدول التالي يوضح إنتاج إحدى الشركات (بالألف وحدة) و الإيرادات المحققة (بالمليون دينار) حسب عدد السنوات:

السنة	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
الإنتاج (X)	80	90	130	120	90	110	120	130

الإيرادات (Y)	140	130	120	100	150	160	130	110

1. جد معادلة انحدار Y على X على افتراض أن العلاقة بين الإيرادات و حجم الإنتاج خطية.
2. احسب معامل الارتباط، ماذا تستنتج؟
3. قدر مستوى الايرادات لسنة 2023 إذا برمجة الشركة إنتاج 160 ألف وحدة.

التمرين الثاني:

في الجدول التالي تم تسجيل عدد الساعات الأسبوعية التي يقضيها 12 تلميذا في مواقع التواصل الاجتماعي (X_i)، و معدلاتهم (Y_i).

X_i	5	12	8	9	5	4	11	3	2	6	7	5
Y_i	9	8	10	10	15	14	9	16	15	11	12	11

1) احسب معامل الارتباط الخطي لبيرسون بين المتغيرين X_i و Y_i. فسر النتيجة.
2) قدر معدل تلميذ قضى ساعة و نصف يوميا في مواقع التواصل الاجتماعي.
3) قدر عدد الساعات اليومية التي قضاها تلميذ في مواقع التواصل الاجتماعي إذا علمت أن معدله 7.

مسألة 1: في مصنع لإنتاج الأنابيب البلاستيكية، تم اجراء دراسة إحصائية على 190 أنبوب بنفس الطول و تم تسجيل النتائج في الجدول الآتي:

الجدول (17): يمثل أقطار و أوزان 190 أنبوب بنفس الطول، (قيم الأقطار و الأوزان المعروضة مراكز فئات متساوية الطول).

القطر X (سم) / الوزن Y (كغ)	**22.5**	**27.5**	**32.5**	**37.5**	**42.5**	**47.5**	**52.5**
12.5					2	3	2
11.5			1	3	1	4	2
10.5			3	6	7	10	8
9.5		2	1	10	12	9	8
8.5	1	3	12	11	7	12	7
7.5	2	1	5	6	16	8	5

1) ما هي النسبة المئوية للأنابيب التي أقطارها بين 35 و 45 سم و أوزانها بين 8 و 10 كغ؟
2) حدد التوزيع الهامشي لكل من المتغيرين X و Y .
3) كم عدد الأنابيب التي أقطارها بين 32.5 و 47.5
4) أ) احسب معدل أقطار الأنابيب، ثم انحرافها المعياري.
   ب) احسب معدل أوزان الأنابيب، ثم انحرافها المعياري.
   ج) استنتج أي منهما أكثر تشتتا.

5) جد الوسيط و المنوال للمتغير X، ثم استنتج شكل التوزيع الاحصائي لأقطار الأنابيب.

6) احسب معامل الارتباط الخطي بين قطر و وزن القطع ثم استنتج طبيعة العلاقة بينهما.

مسألة 2:

في 26 نوفمبر 2019 قرر مجلس الوزراء ترقية 10 ولايات منتدبة إلى ولايات كاملة و هي:

برج باجي مختار، عين صالح، جانت، عين قزام، المغير، تقرت، بني عباس، تيميمون، أولاد جلال و المنيعة.

الهدف من هذا التقسيم هو التقليل من الاختلاف الكبير في المساحة بين الولايات و الذي أدى إلى بعد الإدارة عن المواطن الصحراوي، و تعطل المشاريع التنموية. و لدراسة هذا الاختلاف إليك قائمة الولايات الجزائرية قبل القرار مرتبة حسب المساحة.(انظر الملحق آخر المطبوعة).

1) ما هي المتغيرة المدروسة و ما طبيعتها؟

2) ما هي النسبة المئوية التي تشغلها الولايات الثلاث الأكبر مساحة؟ ماذا تستنتج؟

3) جد كلا من المدى، الوسيط، الربيعيان الأول و الثالث.

4) احسب المتوسط الحسابي μ لمساحات الولايات الواقعة في المجال [4000;5000] بطريقة الوسط الفرضي.

5) باستخدام طريقة ستيرجس، ضع مساحات كل الولايات في جدول تكراري ذو فئات (بداية الفئة الأولى 809).

6) احسب متوسط المساحات و الانحراف المعياري، ماذا تستنتج؟

التحليل التوفيقي

Combinatorial analysis

سنتناول في هذا الفصل:

- التباديل **Permutations**
- التراتيب **Arrangements**
- التوفيقات **Combinations**

1 الفصل الأول: التحليل التوفيقي

لحساب عدد عناصر مجموعة منتهية نستخدم طرق مختلفة للعد، و هذا ما يسمى بالتحليل التوفيقي، و من هذه الطرق: التباديل، التراتيب و التوفيقات. و هذه المفاهيم جد مهمة لأنها هي الأدوات التي نحتاجها لاحقا في الاحتمالات.

1.1 المبدأ الأساسي في العد (قاعدة الضرب)

يعتبر هذا المبدأ المرتكز الحقيقي للتحليل التوفيقي و هو يعتمد على ضرب عدد الطرق المختلفة لعمليات متتالية لإيجاد عدد الطرق الكلي كما هو موضح في المثال التالي:

مثال 1: دخل شخص إلى مطعم فأعطى له النادل قائمة المأكولات المتوفرة و هي 4 أصناف من المرق، 3 أصناف من السلطة، و 5 أنواع من المشروبات.

المطلوب: إذا علمت أن الوجبة تتكون من مرق و سلطة و مشروب، كم عدد الوجبات المختلفة التي يمكن تقديمها؟

يمكن للزبون أن يختار صنف من المرق من بين الأصناف الأربعة و كل صنف يختار معه سلطة من بين الثلاثة و مشروب من بين الخمسة و منه عدد الوجبات المختلفة التي يمكن تقديمها هي:

$$\boxed{2 \times 3 \times 5 = 60}$$

مثال 2: كم عددا مكونا من 4 أرقام يمكن تكوينه باستخدام الأرقام 3، 4، 5، 6، 7 علما أن العدد فرديا و لا يسمح بتكرار الرقم.

الحل: لكي يكون العدد فرديا فإن الرقم الأخير يكون 3 أو 5 أو 7 و منه:

عدد طرق شغل المكان الرابع هو 3 و عدد طرق شغل المكان الأول هو 4 و المكان الثاني 3 و المكان الثالث 2.

عدد الأعداد المطلوبة هو:

$$\boxed{4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72}$$

2.1 التباديل

إن تبديل تجمع من الأشياء هو عدد التشكيلات الممكنة لعناصره مع مراعاة الترتيب. نميز حالتين:

- التباديل دون تكرار العناصر.
- التباديل مع تكرار العناصر.[26]

أ) التباديل دون تكرار العناصر :

عدد تباديل n من العناصر المختلفة مأخوذة كلها معا هو $P_n = n!$.

مثال: اشترى تلميذ ثلاثة كتب، رياضيات M، علوم S، انجليزية E. عدد طرق وضعها في الرف هو: $P_n = 3! = 6$

أي أنه لدينا 6 طرق و هي: MSE ; MES ; SEM ; SME ; EMS ; ESM

---

[26] محمد بداوي، مطبوعة في مقياس الاحصاء و الاحتمالات 1، المدرسة العليا للأساتذة الأغواط، 2018/2017م ص 13

التباديل الدائرية:

عدد التباديل لـ n من العناصر مرتبة على دائرة **دون نقطة مرجعية ثابتة** هو: $P_{\bar{n}} = (n-1)!$

مثال: تجمع فريق كرة قدم مكون من 11 لاعبا على شكل حلقة يتشاورون قبل بداية المباراة.

بما أنه لا توجد نقطة مرجعية ثابتة فإن عدد التبديلات الممكنة هي: $P_{\overline{11}} = (11-1)! = 10! = 3628800$

ملاحظة: إذا وجدت نقطة مرجع ثابتة، فإن الترتيبات ستعامل خطيا و يكون عدد تباديلها يساوي $n!$.

مثال: جلس أحمد، أبو بكر، عثمان و علي في مطعم حول طاولة مستديرة، و كان أحد المقاعد بجوار التلفاز. هذا يعني وجود نقطة مرجعية ثابتة و منه عدد طرق الجلوس هي: $P_4 = 4! = 24$.

ب) التباديل مع تكرار العناصر :

إذا كانت لدينا تشكيلة من n عنصر و تكررت بعض هذه العناصر و كانت تكراراتها $n_1, n_2, \dots, n_k$ فإن عدد تباديل هذه التشكيلة هو:[27]

$$\boxed{P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}}$$

مثال: أعط عدد الكلمات المختلفة (لا يهم معنى الكلمة) التي يمكن تشكيلها من خلال كلمة Mississipi.

هذه الكلمة مكونة من 10 أحرف، و تكرارات كل من الحرفين i و s هو 4 أي: $n = 10, n_i = 4, n_s = 4$ و منه:

$$P_{10}^{4,4} = \frac{10!}{4!4!} = \frac{3628800}{576} = 6300$$

3.1 التراتيب

نسمي ترتيبة (Arrangement) كل تشكيلة مرتبة و بدون تكرار ذات p عنصر مأخوذة من n عنصر. و نرمز لها بـ A_n^p حيث:

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

مثال: استعار طالب 4 كتب من مكتبة الجامعة، و لما عاد لغرفته لاحظ أن الرف لا يسع إلا لـ 3 كتب.

المطلوب: بكم طريقة يمكن وضع 3 كتب من بين الأربعة في الرف علما أن الترتيب مهم.

الحل: بما أن الترتيب مهم فإن عدد الطرق الممكنة هي:

$$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

4.1 التوفيقات

نسمي توفيقة (Combinaisons) كل تشكيلة غير مرتبة ذات p عنصر مأخوذة من n عنصر. و نرمزلها بـ C_n^p حيث:

---

[27] جبار عبد مضحي، مقدمة في نظرية الاحتمالات، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر و التوزيع، عمان 2011م، ص39

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

مثال: في المثال السابق إذا اعتبرنا أن الترتيب غير مهم فإن عدد الطرق الممكنة لوضع 3 كتب من بين الأربعة في الرف هي:

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{A_4^3}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

خواص:

- $C_n^0 = C_n^n = 1$
- $C_{n+1}^i = C_n^{i-1} + C_n^i$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$ (دستور ثنائي الحد)

5.1 أنواع السحب[28]

أ) السحب مع الإرجاع (السحب البرنولي): هو سحب كرة واحدة مثلا ثم ارجاعها، فإذا أعدنا العملية r مرة من صندوق يحوي n كرة فإن عدد الطرق هو: n^{r}.

ب) السحب دون إرجاع: و عدد الطرق فيه متعلق بأهمية الترتيب من عدمها و نميز حالتين:

- إذا كان الترتيب مهم فإن عدد الطرق هو A_{n}^{r}.
- إذا كان الترتيب غير مهم فإن عدد الطرق هو C_{n}^{r}.

مثال: صندوق به 32 كرية لا نفرق بينها عند اللمس، نسحب 4 كريات عشوائيا.

المطلوب: ما عدد الحالات الممكنة للسحب في الحالات التالية:

1) السحب يتم في آن واحد.

2) السحب يتم على التوالي: أ- دون رجاع ب- مع الإرجاع

الحل:

1) بما أن السحب يتم في آن واحد فإن الترتيب غير مهم و منه فإن عدد الطرق هو: $C_{32}^4 = 35\ 960$

2) بما أن السحب يتم على التوالي فإن الترتيب مهم و منه فإن عدد الطرق هو:

أ- دون رجاع : $A_{32}^4 = 863\ 040$ ب- مع الإرجاع: $32^4 = 1\ 048\ 576$

---

[28] حاكم قصد علي سهام، مرجع سابق، ص 34

التجارب العشوائية و الفضاء الاحتمالي

Randomized trials and probabilistic space

سنتناول في هذا الفصل:

- **التجارب العشوائية**
- **الفضاء الاحتمالي**
- **الاحتمالات الشرطية**
- **الاحتمال الكلي**
- **نظرية بايز**
- **الأحداث المستقلة**

الفضاء الاحتمالي ↔	الفضاء المقيس
قياس الاحتمال ↔	القياس الموجب عموما
عشيرة الأحداث ⇔	العشيرة عموما
المتغير العشوائي ↔	التابع القابل للقياس

2 الفصل الثاني: التجارب العشوائية و الفضاء الاحتمالي

كثيرا ما نتخذ قرارات في حياتنا انطلاقا من معطيات ناقصة، و نعتمد في اختياراتنا على الاحتمالات، و التي تستخدم في كثير من العلوم لأنها تقيس عدم التأكد، فمثلا قد نلغي رحلة سياحية رتبنا لها منذ مدة بسبب احتمال كبير بأن يكون الجو رديئا، و قد يهمل الطالب مراجعة أحد الدروس لأن احتمال أن يأتي منه سؤال في الاختبار صغير.

و نظرية الاحتمالات هي أحد فروع الرياضيات التطبيقية الذي يهتم بدراسة تأثير الصدفة على الظواهر و الأشياء، و قد بدأت دراسة الاحتمالات في القرن السابع عشر في أوربا على موائد القمار في ألعاب الحظ، حيث استعان اللاعبون بعلماء الرياضيات لكسب المال من هذه الألعاب.

و في عام 1933م قام الرياضياتي السوفياتي كولموغروف kolmogrov بتأسيس نظرية جديدة للاحتمالات و ذلك بربط هذه النظرية بنظرية القياس و نظرية المجموعات.

1.2 التجارب العشوائية

التجربة العشوائية :

التجربة هي أي إجراء يمكن وصفه وصفا دقيقا و ملاحظة ما ينتج عنه. و التجارب نوعان:

- تجارب محددة أو مؤكدة بمعنى أنه إذا تكررت التجربة تحت نفس الظروف فمن المؤكد ملاحظة نفس النتيجة. فمثلا إذا رميت كرة في السماء فإنها حتما ستسقط على الأرض مهما تكررت هذه التجربة.
- تجارب عشوائية (Random Experiments) تتحكم عوامل الصدفة في ظهور نتائجها بمعنى أنه إذا تكررت التجربة تحت نفس الظروف فربما تختلف النتائج

  و لا يمكننا التنبؤ بها. فمثلا في تجربة رمي زهرة نرد لا يمكننا أن نتنبأ بالرقم الذي سيظهر رغم علمنا المسبق أنه محصور بين 1 و 6 إذا فهذه التجربة هي تجربة عشوائية.

فضاء العينة :

فضاء العينة (Sample Space) هو عبارة عن جميع النتائج الممكنة في تجربة ما، و نرمز لها بـ Ω.

مثال 1: في تجربة رمي زهرة نرد فضاء العينة هو:

$$\Omega = (1,2,3,4,5,6)$$

مثال 2: إلقاء قطعتي نقود مرة واحدة. فضاء العينة لهذه التجربة هو :

$$\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$$

حيث F يمثل الكتابة، و P يمثل الصورة.

ملاحظة: يمكن أن يكون لتجربة عشوائية أكثر من فضاء عينة و ذلك حسب النتائج التي تهمنا، فمثلا إذا كنا نرغب في معرفة عدد الصور الظاهرة في المثال السابق فإن فضاء العينة يكون:

أنواعه: قد يكون فضاء العينة منتهيا و قد يكون غير منته، و على هذا الأساس يمكن تقسيمه إلى ثلاثة أقسام هي:

- فضاء العينة المحدود: و هو الذي عدد عناصره محدود مثل الأمثلة السابقة.
- فضاء عينة لا نهائي معدود: و هو الذي عدد عناصره غير محدود لكنه قابل للعد. مثلا في تجربة إلقاء قطعة نقود عدة مرات حتى ظهور الوجه، فضاء العينة الذي يمثل عدد مرات إلقاء قطعة النقود هو: $\Omega = (0,1,2,\dots,\infty)$.
- فضاء عينة لا نهائي: و هو الذي له عدد لانهائي من العناصر. مثلا في اختيار نقطة من قرص قطره a، فضاء العينة لهذه التجربة يتكون من جميع نقاط هذا القرص و هو: $\Omega = \{(,y); x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

الحدث: و يسمى أيضا بالحادثة (Event) و هو مجموعة جزئية من عناصر فضاء العينة، و نقول أن الحادثة قد وقعت إذا ظهر أحد عناصرها عند إجراء التجربة، و إذا احتوت هذه المجموعة الجزئية عنصرا واحدا فقط فإنها تسمى حادثة بسيطة أو أولية.

مثال1: في تجربة رمي زهرة النرد، إذا كانت الحادثة A هي "ظهور عدد زوجي" فإن: $A = (2,4,6)$.

مثال2: في تجربة إلقاء قطعتي نقود مرة واحدة. نعلم أن فضاء العينة لهذه التجربة هو :

$$\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$$

حيث F يمثل الكتابة، و P يمثل الصورة. الآن نعبر عن حوادث مختلفة بأخذ بعض المجموعات الجزئية من فضاء العينة.

$A_1 = \{(P,P)\}$ هذه حادثة بسيطة تمثل ظهور صورتان.

$A_2 = \{(F,F),(P,P)\}$ حادثة ظهور وجهان متشابهان.

$A_3 = \{(P,P),(P,F),(F,P)\}$ حادثة ظهور صورة واحدة على الأقل.

حالات خاصة:

- **الحدث الأكيد** هو مجموعة فضاء العينة كلها (Ω).
- **الحدث المستحيل** و هو الحدث الذي لا يمكن تحققه، و هو الحدث المكون من المجموعة الخالية فقط.
- **الحدث المعاكس** لحدث A هو الحدث المكمل له بالنسبة لـ□ و نرمز له بـ$\bar{A}$.
- **الحدثان المتنافيان** (غير متلائمين) هما الحدثان اللذان تقاطعهما مجموعة خالية، أي أن وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر.

مثال: في تجربة رمي زهرة نرد، لتكن الحوادث التالية:

الحدث A: ظهور رقم أقل من 7، الحدث B: ظهور الرقم 7

الحدث C: ظهور الرقم 1، الحدث D: ظهور رقم زوجي،

الحدث E: ظهور رقم فردي .

نلاحظ أن:

الحدث A هو الحدث الأكيد، و الحدث B هو حدث مستحيل.

D و E حدثان متعاكسان، بينما D و C حدثان متنافيان.

ملاحظة: كل حدثان متعاكسان هما حدثان متنافيان، و العكس غير صحيح.

2.2 فضاء الاحتمال

فضاء الحوادث: فضاء الحوادث (Space of Events) هو مجموعة كل المجموعات الجزئية التي يمكن تكوينها من فضاء العينة، بعبارة أخرى هو مجموعة كل الحوادث الممكنة في فضاء العينة. و نرمز له بـ ... ,Z , U, V.

مثال 1:

فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود هو: $\Omega = (P, F)$، و منه فضاء الحوادث هو: $Z = \{\emptyset, (P), (F), \Omega\}$

حيث $\emptyset$ الحادثة المستحيلة و Ω الحادثة الأكيدة و هي حادثة ظهور أحد وجهي قطعة النقود.

مثال 2:

فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعتي نقود مرة واحدة هو: $\Omega = (PP, PF, FP, FF)$

و منه فضاء الحوادث هو:

$$Z = \left\{ \begin{matrix} \emptyset, PP, PF, FP, FF, (PP, PF), (PP, FP), (PP, FF), (PF, FP), (PF, FF), \\ (FP, FF), (PP, PF, FP), (PP, PF, FF), (PP, FP, FF), (PF, FP, FF), \Omega \end{matrix} \right\}$$

ملاحظة: نلاحظ من الأمثلة السابقة أن فضاء الحوادث يحتوي على 2^n حادثة حيث n هو عدد عناصر فضاء العينة Ω.

العشيرة أو σ -جبر الحوادث[29]:

لتكن Ω فضاء عينة.

تعريف: نقول عن جماعة $\mathcal{A}$ مؤلفة من مجموعات جزئية لـ Ω إنها عشيرة (Tribu) أو σ -جبر الحوادث، إذا تحققت الشروط الآتية:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
3. إذا كانت $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عناصرها تنتمي إلى $\mathcal{A}$، فإن $(\cup A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تنتمي إلى $\mathcal{A}$.

تعريف: إذا كانت $\mathcal{A}$ عشيرة لـ Ω، نقول عن الزوج $(\Omega, \mathcal{A})$ أنه فضاء قابل للاحتمال(أو قابل للقياس).

مثال:

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ عشيرة تافهة و هي الأصغر.

$\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ و هي أصغر عشيرة تحوي الحدث A، مع A جزء غير خال من Ω.

[29] محمد بداوي، مرجع سابق، ص 23

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ و هي العشيرة الكبرى.

القياس الموجب في الفضاء القابل للقياس:[30]

تعريف: ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قابل للقياس، نسمي قياسا على $(X, \mathcal{A})$ كل تطبيق $\mu: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ حيث:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. إذا كانت $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ متتالية من $\mathcal{A}$، منفصلة مثنى مثنى (أي $A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m$) فإن:

$$\mu(\cup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

الثلاثية $(X, \mathcal{A}, \mu)$ تسمى فضاء قياس.

إذا كان $\mu(X) < +\infty$ نقول عندئذ عن μ أنه قياس منته.

إذا كان $\mu(X) = 1$ نقول عندئذ عن μ أنه قياس احتمال.

الفضاء المزود باحتمال:

تعريف: ليكن $(\Omega, \mathcal{A})$ فضاء قابل للاحتمال، كل تطبيق $P: \mathcal{A} \to [0,1]$ حيث:

1. $P(\Omega) = 1$
2. إذا كانت $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حوادث من $\mathcal{A}$ بحيث كل حدثين متنافيين مثنى مثنى، السلسلة: $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$ متقاربة و:

$$P\left(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$$

من خلال هذه الشروط نقول أن الثلاثي $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ فضاء مزود باحتمال.

بعض الخواص:

- $P(\emptyset) = 0$
- إذا كان A و B حدثين متنافيين(غير متلائمين)، فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ حيث $\bar{A}$ هو الحدث المعاكس للحدث A أي ($\Omega \setminus A = \bar{A}$).
- إذا كان $A \subset B$ فإن $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- إذا كانت $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية أحداث إذن:

$$P\left(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$$

[30] محمد بداوي، مرجع سابق، ص 26

و تدعى هذه المتباينة بمتباينة بوول Inégalité de Boole

مثال: إذا علمت أن: $P(A) = 0.45$, $P(B) = 0.6$, $P(A \cup B) = 0.8$

- احسب كلا من $P(\bar{A})$ و $P(A \cap B)$.

الحل: لدينا:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.45 = 0.55$$

نعلم أن $(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ و منه:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.25$$

حساب الاحتمال:

ليكن $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ فضاء قابل للاحتمال، في حالة تساوي احتمال على Ω يكون لدينا من أجل كل حادثة A من $\mathcal{P}(\Omega)$، احتمال A هو حاصل قسمة عدد عناصر A على عدد عناصر Ω أي:

$$P(A) = \frac{card\ (A)}{card\ (\Omega)}$$

مثال1: نرمي زهرة نرد غير مزيف ذو ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6.

مجموعة الإمكانيات هي: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ و بما أن زهرة النرد غير مزيفة فإن:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

نحسب الآن احتمال بعض الحوادث:

الحادثة A "ظهور عدد زوجي" أي $A = \{2,4,6\}$ و احتمالها $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

الحادثة B "ظهور عدد فردي" أي $B = \{1,3,5\}$ و احتمالها $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

الحادثة C "ظهور عدد أولي" أي $C = \{2,3,5\}$ و احتمالها $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

نلاحظ أن الحادثتان A و B متعاكستان أي: $A = \bar{B}$ ، $P(A) + P(B) = 1$

مثال2: في جوان 2022 أقيمت ألعاب البحر الأبيض المتوسط بوهران، بعثة إحدى الدول المشاركة تضم 20 رياضيا (رجال) و 30 رياضية (نساء)، منهم 15 رياضيا و 20 رياضية شعورهم صفراء.

المطلوب: إذا اختير من الرياضيين شخصا بطريقة عشوائية فما احتمال أن يكون الشخص رياضيا (رجل) أو شعره أصفر؟

الحل: ليكن

- A الحدث الذي يمثل الشخص المختار رياضي (رجل).
- B الحدث الذي يمثل الشخص المختار شعره أصفر.

و عليه فإن: $P(A) = \frac{20}{50}$, $P(B) = \frac{35}{50}$ و $P(A \cap B) = \frac{15}{50}$

إن احتمال ظهور A أو B يمثل احتمال ظهور الحادث $A \cup B$ أي أن:

و منه احتمال أن يكون الرياضي المختار رجلا أو شعره أصفر هو $\frac{4}{5}$.

3.2 الاحتمالات الشرطية و الاستقلال

الاحتمالات الشرطية و الأحداث المستقلة مفاهيم أساسية في نظرية الاحتمالات، ذلك أن الاحتمالات الشرطية توضح لنا كيف أن إضافة معلومات جديدة تغير من قيمة احتمالات الحوادث. كما أن مفهوم الحوادث المستقلة يرتبط ارتباطا وثيقا بالاحتمال الشرطي.

الاحتمال الشرطي:

يستخدم الاحتمال الشرطي (Conditional Probability) عند وقوع حدث و ليكن A مثلا مشروطا بحدث آخر و ليكن B قد وقع فعلا، و يرمز لهذا الاحتمال بـ: $P_B(A)$ أو $P(A/B)$.

مثال تمهيدي: نرمي زهرة نرد مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة، فضاء العينة هو: $\Omega = (1,2,3,4,5,6)$

لتكن الحوادث الآتية:

$$A = \{1,3,5\} \quad , \quad B = \{2,4\} \quad , \quad C = \{3,4,6\} \quad , \quad D = \{1,2,3,4\}$$

احتمالات وقوع هذه الحوادث هو:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad , \quad P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(D) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

إذا تحققت الحادثة A فإن:

$$P_A(B) = \frac{0}{3} = 0 \quad , \quad P_A(C) = \frac{1}{3} \quad , \quad P_A(D) = \frac{2}{3}$$

نلاحظ أن احتمال حدوث الحادثة C بشرط تحقق الحادثة A هو:

$$P_A(C) = \frac{card\ (A \cap C)}{card\ (A)} = \frac{\frac{card\ (A \cap C)}{card\ (\Omega)}}{\frac{card\ (A)}{card\ (\Omega)}} = \frac{P(A \cap C)}{P(A)}$$

تعريف:

ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ فضاء احتمالي و $B \in \mathcal{A}$ حيث $P(B) > 0$، لكل $A \in \mathcal{A}$ نعرف:

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

نطلق على هذا بالاحتمال الشرطي لحدث A مشروطا بحدث B وقع فعلا.

نتيجة: من التعريف السابق نجد أن:

$$P(A \cap B) = P(B) P_B(A) = P(A)\ P_A(B)$$

و هذا يتوقف على كون أي الحادثتين وقع أولا. و تسمى القاعدة السابقة بقاعدة الضرب *Multiplication Rule* ، و يمكن تعميمها لأكثر من حادثتين. فمن أجل ثلاث حوادث لدينا:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2 \setminus A_1).P(A_3 \setminus A_1, A_2)$$

و على العموم، من أجل n حادثة لدينا:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1).P(A_2 \setminus A_1)\ldots P(A_n \setminus A_1, A_2, \ldots, A_{n-1})$$

مثال 1:

في قسم العلوم الدقيقة بأحد المدارس العليا للأساتذة، يتوزع 400 طالب إلى فوجين A و B حسب التخصص (رياضيات أو فيزياء). يوضح الجدول (18) هذا التوزيع بالنسبة للطلبة الذكور (G) و الطالبات (F).

التخصص / الجنس	رياضيات (M)	فيزياء (T)
ذكور G	130	50
إناث F	140	80

1) تم اختيار طالب عشوائيا، احسب احتمال أن يكون الطالب المختار:

أ. طالبة. ب. يدرس فيزياء.

2) علما أن الطالب المختار أنثى، ما هو احتمال أن تكون تدرس فيزياء؟(بطريقتين)

3) شكل شجرة الاحتمالات.

الحل:

1) أ. احتمال أن يكون الطالب المختار أنثى هو:

$$P(F) = \frac{140+80}{400} = \frac{220}{400} = \frac{11}{20}$$

ب. احتمال أن يكون الطالب المختار يدرس فيزياء هو:

$$P(T) = \frac{50+80}{400} = \frac{130}{400} = \frac{13}{40}$$

2) الطريقة الأولى:

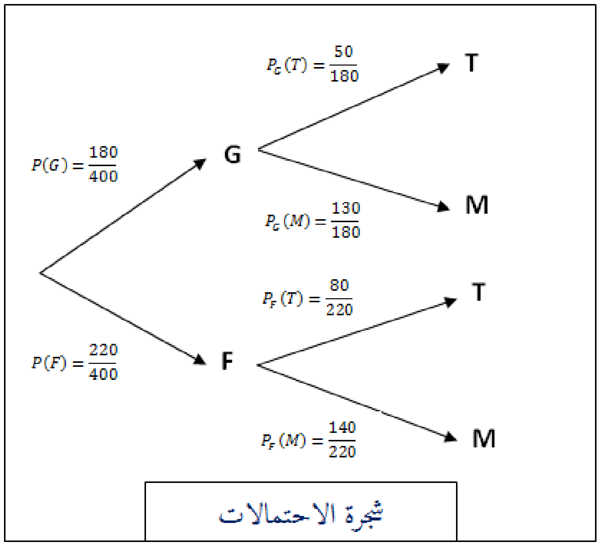
$$P = \frac{\text{عدد الطالبات اللواتي يدرسن فيزياء}}{\text{عدد الطالبات الكلي}} = \frac{80}{220} = \frac{4}{11}$$

الطريقة الثانية: نستخدم قانون الاحتمال الشرطي.

$$P_F(T) = \frac{P(T \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{80}{400}}{\frac{11}{20}} = \frac{4}{11}$$

3) شجرة الاحتمالات:

الشكل (11): شجرة الاحتمالات.



مثال2: علبة مصابيح بها 12 مصباح منها 4 تالفة. اختير عشوائيا ثلاثة مصابيح على التوالي.

. احسب احتمال أن تكون جميعها جيدة.

الحل: نفرض أن: A_1 المصباح الأول جيد.

A_2 المصباح الثاني جيد.

A_3 المصباح الثالث جيد.

أي أن الحادثة $A_1 \cap_2 \cap A_3$ تعني أن المصابيح الثلاثة جيدة. و على ذلك فإن:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2 \setminus A_1).P(A_3 \setminus A_1, A_2)$$
$$= \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

1.3.2 نظرية الاحتمالات الكلية

إن أهمية الاحتمال الشرطي تكمن في تحديد احتمالية الحدوث المشترك لبعض الأحداث من خلال قانون الضرب للاحتمال، كما أنه في بعض التطبيقات المهمة يكون مفيدا في تحديد الاحتمالية للحدث الوحيد.[31]

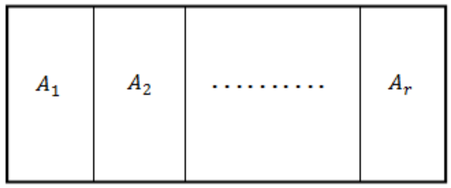
تعريف:

الأحداث $A_1, A_2, \dots A_r$ تمثل تجزئة (Partition) لفضاء العينة Ω، إذا كان $A_i \cap A_j = \emptyset$,$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r = \Omega$ لكل i و j ، وكان $P(A_i) > 0$ لكل $i = 1,2,3,\dots,r$. كما هو موضح بالرسم:[32]

---

[31]جبار عبد مضحي ، مرجع سابق، ص 59

Ω



تجزئة فضاء العينة Ω

مثال: في تجربة رمي زهرة نرد مرة واحدة لدينا الحوادث:

$$B_1 = \{1,3\} \quad , \quad B_2 = \{2,4,5\} \quad , \quad B_3 = \{6\}$$
$$C_1 = \{1,3,5\} \quad , \quad C_2 = \{1,4,5\} \quad , \quad C_3 = \{3,6\}$$

نلاحظ أن: B_1 ،B_2 و B_3 تمثل تجزئة لفضاء العينة، بينما C_1 ،C_2 و C_3 لا تمثل تجزئة لفضاء العينة لأن تقاطعها غير خال.

نظرية:

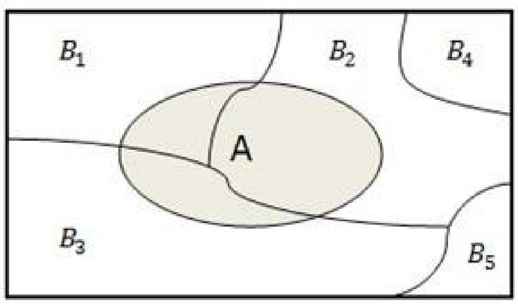
ليكن A حدثا غير خال من فضاء العينة Ω ، و B_1 ،B_2 ... B_r تجزئة لهذا الفضاء فإن:

$$P(A) = P_{B_1}(A).P(B_1) + P_{B_2}(A).P(B_2) + \cdots + P_{B_r}(A).P(B_r)$$

البرهان: لدينا:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \ldots \cup (A \cap B_r)$$

و قد تكون بعض هذه التقاطعات خالية كما هو موضح في الشكل (12):



الشكل (12): تجزئة فضاء العينة

و بتطبيق قانون جمع الاحتمالات نجد:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_r) = \sum_{i=1}^{r} P(A \cap B_i)$$

و بما أن:

$$P(A \cap B_i) = P_{B_i}(A).P(B_i)$$

فإن:

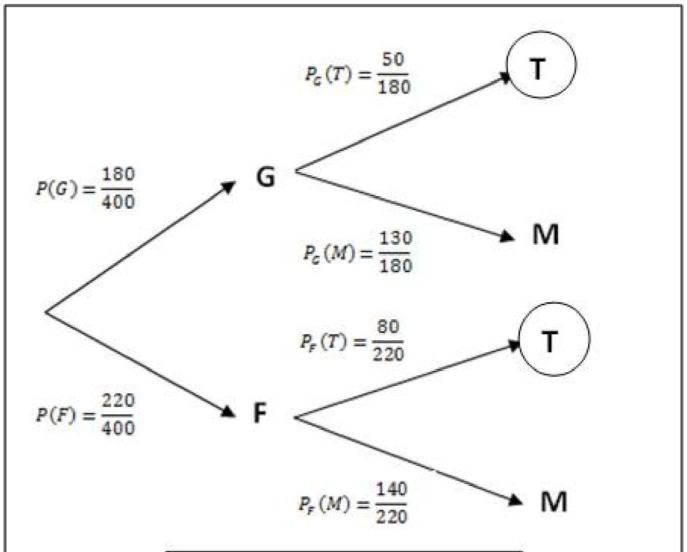
$$P(A) = \sum_{i=1}^{r} P_{B_i}(A).P(B_i)$$

[32]جبار عبد مضحي، مرجع سابق، ص 59

مثال: في مثال سابق خاص بتوزيع 400 طالب إلى فوجين حسب التخصص كما هو مبين في الجدول التالي:

التخصص / الجنس	رياضيات (M)	فيزياء (T)
ذكور G	130	50
إناث F	140	80

و تحصلنا على شجرة الاحتمالات التالية:



شجرة الاحتمالات

لحساب احتمال أن يكون الطالب المختار يدرس فيزياء (T)، نطبق قانون الاحتمالات الكلية:

$$P(T) = P_G(T).P(G) + P_F(T).P(F)$$
$$= \frac{50}{180} \times \frac{180}{400} + \frac{80}{220} \times \frac{220}{400}$$
$$= \frac{13}{40}$$

2.3.2 نظرية بايز (احتمال السبب)

تعتبر نظرية بايز أحد تطبيقات الاحتمالات الشرطية، و هي تهدف إلى حساب احتمالات صحة الفروض بناءا على معلومات ميدانية أو تجريبية.

ليكن A حدثا غير خال من فضاء العينة Ω ، و B_1 ، B_2 ... B_r تجزئة لهذا الفضاء فإن:[33]

$$\boxed{\forall j \in \{1,2,\dots,r\}; \qquad P_A(B_j) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P_{B_j}(A)}{\sum_{i=1}^{r} P(B_i)P_{B_i}(A)}}$$

[33] رامز قدسية ، الاحتمالات و الإحصاء، الجامعة الافتراضية السورية 2018م، ص 75

و هي ما تسمى بقاعدة بايز و التي نعتبر فيها الأحداث $(B_i)_{i=1,2,\dots,r}$ على أنها تمثل دور الأسباب التي أدت إلى وقوع الحدث A.

مثال1:

في المثال السابق الخاص بالطلبة، نحسب احتمال أن يكون الطالب ذكر علما أنه يدرس فيزياء. لدينا:

$$P_T(G) = \frac{P(G\cap T)}{P(T)} = \frac{P(G)P_G(T)}{P(T)}$$
$$= \frac{\frac{180}{400}\times\frac{50}{180}}{\frac{13}{40}}$$
$$= \frac{5}{40}\times\frac{40}{13} = \frac{5}{13} \approx 0.38$$

مثال2:

مع اقتراب عيد الأضحى، اشترت إحدى شركات التسويق بالجملة مناشير كهربائية ترددية لتقطيع الأضاحي من ثلاثة مصانع F_1 ، F_2 و F_3، حيث اقتنت من هذه المصانع على التوالي 20% ، 35%، 45% من إجمالي المناشير. علما أن احتمال إنتاج منشار تالف في هذه المصانع هو على التوالي: 0.12 ، 0.15 ، 0.08.

المطلوب: إذا اشترى شخص منشار من هذه الشركة فاحسب:

1- احتمال أن يكون المنشار تالفا.

2- إذا علم أن المنشار تالفا فما احتمال أن يكون من المصنع F_2.

الحل:

نضع B_i حوادث "المنشار من إنتاج المصنع F_i". $\quad 1 \le i \le 3$

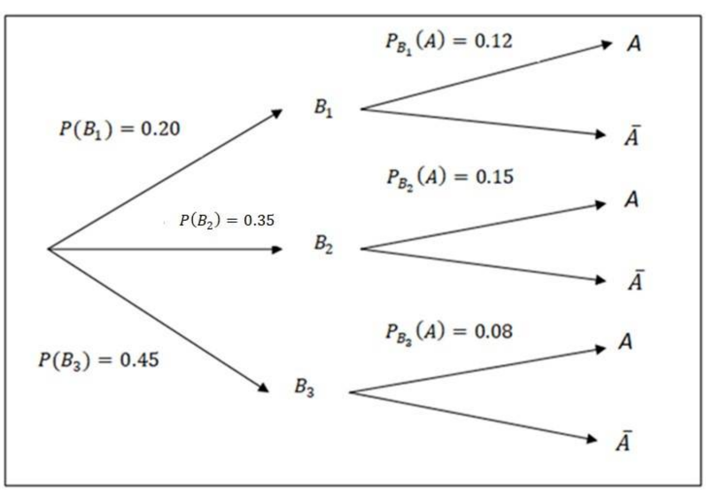
A حادثة "المنشار تالف"

نعلم أن: $P(B_1) = 0.20 \quad , \quad P(B_2) = 0.35 \quad , \quad P(B_3) = 0.45$

$P_{B_1}(A) = 0.12 \quad , \quad P_{B_2}(A) = 0.15 \quad , \quad P_{B_3}(A) = 0.08$

للتوضيح نستعين بشجرة الاحتمالات:

الشكل (13): شجرة احتمالات المناشير الكهربائية.



1- حساب احتمال أن يكون المنشار تالفا:

نطبق قانون الاحتمالات الكلية، لدينا

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P_{B_i}(A) = 0.2 \times 0.12 + 0.35 \times 0.15 + 0.45 \times 0.08 = 0.1125$$

2- حساب احتمال أن يكون المنشار من المصنع F_2 علما أنه تالف:

نطبق قاعدة بايز، لدينا

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{0.35 \times 0.15}{0.1125} \approx 0.47$$

إستقلال الحوادث:

أ) الحدثان المستقلان: نقول عن حدثان A و B أنهما مستقلان إذا كان وقوع الحدث A لا يؤثر في احتمال وقوع B أي:[34]

$$P_A(B) = P(B)$$

نتيجة: نعلم أن: $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ و منه:

$$\boxed{A \text{ و } B \text{ مستقلان} \Leftrightarrow [P(A \cap B) = P(A)P(B)]}$$

مثال1: عند إلقاء زهرة نرد مرتين، فإن كل أحداث المرة الأولى مستقلة عن أحداث المرة الثانية.

مثال2: عند سحب كرات من سلة مرتين مع الإرجاع، فإن الأحداث المتعلقة بالمرة الأولى مستقلة عن أحداث المرة الثانية.

مثال 3: سدد لاعبان مخالفتين على نفس المرمى، احتمال تسجيلهما هدفا هو $\frac{4}{10}$ للأول و $\frac{7}{10}$ للثاني. ما احتمال تسجيل هدف.

نضع: A_1 " تسجيل اللاعب الأول هدفا" A_2 " تسجيل اللاعب الثاني هدفا"

و منه حادثة إصابة هدف هي: $A = A_1 \cup A_2$.

حساب $P(A_1 \cup A_2)$: نعلم أن:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

و بما أن الحدثان A_1 و A_2 مستقلان فإن:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1).P(A_2)$$
$$= \frac{4}{10} + \frac{7}{10} - \frac{28}{100} = 0.82$$

[34] حاكم قصد علي سهام، مرجع سابق، ص 53

مثال4: من بين عائلات مكونة من خمسة أشخاص، تم اختيار عائلة عشوائيا.

لتكن: A "العائلة لها ولدان (ذكور) على الأقل".

B "العائلة لها أطفال من الجنسين".

- هل الحادثتان A و B مستقلتان؟

الحل:

العائلة مكونة من 5 أشخاص أي أن لها ثلاثة أولاد. نرمز للبنت بـ f و للولد بـ g. لدينا:

$$\Omega = (ggg, ggf, gff, fff)$$

A "العائلة لها ولدان (ذكور) على الأقل" أي أن: $A = (ggg, ggf)$

B "العائلة لها أطفال من الجنسين" أي أن: $B = (\, ggf, gff)$

$$A \cap B = (\, ggf)$$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \qquad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

نلاحظ أن: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ و منه الحدثان A و B مستقلان.

مثال 5: نفس السؤال السابق لكن بفرض أن العائلة المختارة من بين العائلات المكونة من 4 أشخاص فقط.

العائلة مكونة من 4 أشخاص أي أن لها ولدين فقط. لدينا:

$$\Omega = (gg, gf, ff)$$

A "العائلة لها ولدان (ذكور) على الأقل" أي أن: $A = (gg)$

B "العائلة لها أطفال من الجنسين" أي أن: $B = (\, gf)$

$$A \cap B = (\emptyset)$$

$$P(A) = \frac{1}{3}; \qquad P(B) = \frac{1}{3}; \qquad P(A \cap B) = 0$$

نلاحظ أن: $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ و منه الحدثان A و B غير مستقلين.

ملاحظة:

في المثال السابق نلاحظ أن الحدثان A وB متنافيان، لذا يجب التنبه لى الفرق بين حدثان متنافيان (غير متلائمين) و حدثان مستقلان، و عموما كل حدثان متنافيان هما حدثان غير مستقلين لأن وقوع أحدهما يدل على عدم وقوع الآخر.

و الآن سنوسع فكرة الاستقلالية لأكثر من حدثين، نبدأ بثلاثة أحداث ثم نعمم الفكرة.

استقلال ثلاثة أحداث:

تعريف: نقول إن الأحداث A، B و C مستقلة إذا و فقط إذا كان:[35]

1. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
2. $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
3. $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
4. $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

مثال: في تجربة لقاء زهرة نرد مرتين، لدينا فضاء العينة هو:

$$|\Omega| = 36 \qquad \text{و} \qquad \Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$$

و لتكن الأحداث التالية:

A_1 "ظهور رقم زوجي في الرمية الأولى"

A_2 "ظهور رقم فردي في الرمية الثانية"

A_2 "مجموع الرقمين زوجي "

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$$
$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\emptyset) = 0$$

و منه هذه الأحداث الثلاث ليست مستقلة، بل مستقلة مثنى مثنى فقط.

مثال2: بائع يقطين، احتمال أن تكون أي من يقطيناته تالفة هو 0.2، باع منها ثلاث يقطينات، ما هو احتمال أن تكون كلها جيدة.

الحل:

بما أن احتمال أن تكون أي من يقطيناته تالفة هو 0.2، فإن احتمال أن تكون أي منها جيدة هو 0.8 . نضع:

A_1 "اليقطينة الأولى جيدة"

A_2 " اليقطينة الثانية جيدة "

A_2 " اليقطينة الثالثة جيدة "

بما أن A_1، A_2 و A_3 حوادث مستقلة فإن:

---

[35] جبار عبد مضحي، مرجع سابق، ص 67

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)$$
$$= 0.8 \times 0.8 \times 0.8 = 0.51$$

التعميم إلى n حادث:

تعريف: نقول عن الحوادث A_1، A_2،...،A_n أنها مستقلة إذا حققت الشروط:

$$P\left(A_i \cap A_j\right) = P(A_i).P\left(A_j\right) \qquad 1 \leq i < j \leq n$$
$$P\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) = P(A_i).P\left(A_j\right).P(A_k) \qquad 1 \leq i < j < k \leq n$$
$$\vdots$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1).P(A_2)\ldots P(A_n)$$

المعادلة الأولى تعبر عن C_2^n شرط و المعادلة الثانية تعبر عن C_3^n شرط و هكذا إلى المعادلة الأخيرة التي تعبر عن C_n^n شرط. أي أن عدد

الشروط الواجب تحققها لكي تكون هذه الحوادث مستقلة هو:

$$C_2^n + C_3^n + \cdots + C_n^n = (1+1)^n - C_1^n - C_0^n = 2^n - n - 1$$

يمكن اختصار التعريف السابق في التعريف التالي:

تعريف: نقول عن الحوادث A_1، A_2،...،A_n أنها مستقلة إذا كان:

$$P(\cap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i) \quad ; \quad I \subset (1,2,\ldots,n)$$

4.2 مسألة مقترحة

الجزء الأول:

شخصان x و y راميا قوس، كل منهما يسدد سهما نحو هدف برمية واحدة فقط.

نعتبر احتمال عدم إصابة الهدف بأي رمية يساوي $\frac{1}{14}$ و احتمال إصابة الأول فقط الهدف يساوي $\frac{1}{7}$.

لتكن A و B حادثتين حيث:

A : حادثة إصابة الأول الهدف B: حادثة إصابة الثاني الهدف.

1- بين أن $P(A) = \frac{2}{3}$ و $P(B) = \frac{11}{14}$.

2- احسب P_1 احتمال إصابة الهدف برميتين.

3- احسب P_2 احتمال إصابة الهدف برمية واحدة على الأقل.

4- إذا علمت أن الهدف قد أصيب فما هو احتمال P_3 كي يكون الرامي الأول قد أصاب الهدف.

5- احسب P_4 احتمال أن يكون الرامي الأول قد أصاب الهدف علما أن الهدف أصيب برمية واحدة فقط.

الجزء الثاني:

الشخصان x و y يتباريان وفق التجربة السابقة.

يعتبر الشخص x هو الفائز إذا كان هو الشخص الوحيد الذي أصاب الهدف و في هذه الحالة تتوقف اللعبة، و كذلك بالنسبة للشخص y .أما في الحالات الأخرى تعاد التجربة مرة ثانية بنفس الكيفية.

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نرمز بـ: A_n: حادثة الشخص x فاز في المرة n

B_n: حادثة الشخص y فاز في المرة n

C_n: حادثة التجربة تستمر بعد المرة n

1) احسب الاحتمالات التالية: $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)$، $\mathrm{P}(\mathrm{B}_1)$ و $\mathrm{P}(\mathrm{C}_1)$.

2) أ- احسب الاحتمال الشرطي $\mathrm{P}_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{C}_{n+1})$ ثم استنتج $P(\mathrm{C}_{n+1})$ بدلالة $\mathrm{P}(C_n)$.

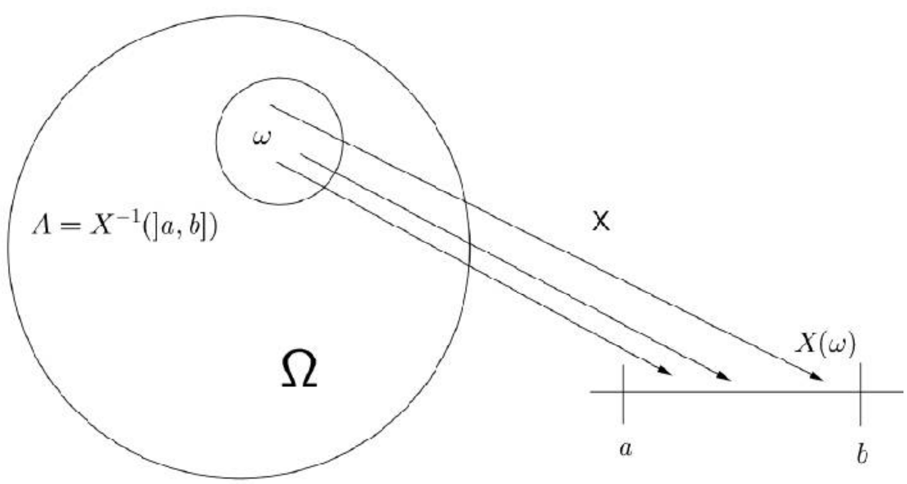
ب- بين أن: $\mathrm{P}(C_n) = \left(\frac{25}{42}\right)^n$

المتغير العشوائي الحقيقي

The real random variables

سنتناول في هذا الفصل:

- قانون الاحتمال، تابع التوزيع.
- التوقع الرياضي، التشتت، متراجحة ماركوف ومتراجحة بينايمي تشيبيشيف.
- التابع المولد للعزوم، التابع المميز. تبديل المتغير



3 الفصل الثالث: المتغير العشوائي الحقيقي

في بعض الأحيان تكون النتائج الممكنة لتجربة عشوائية عبارة عن صفات أو مسميات يصعب التعامل معها رياضيا، لذا نقوم بتحويلها إلى قيم عددية حقيقية تسمى قيم المتغير العشوائي، فالمتغير العشوائي إذن هو دالة تنقل جميع قيم فضاء العينة إلى قيم حقيقية.

و ينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

1. المتغيرات العشوائية المتقطعة Discrete Random Variables: و هي التي تأخذ عددا منتهيا أو قابلا للعد من القيم.
2. المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة) Continuous Random Variables: و هي التي تأخذ كل قيم مجال محدود أو غير محدود.

و يرمز للمتغير العشوائي بشكل عام بحرف من الحروف الأبجدية الكبيرة X, Y, Z,... و للقيم التي يأخذها بالحروف الأبجدية الصغيرة $x, y, z, \ldots$

مثال 1 : عدد البنات في أسرة فيها 5 أولاد X، $X: \{x = 0,1,2,3,4,5\}$

مثال2 : نرمي قطعة نقد مرتين، نجد $\Omega = \{(\mathrm{F},\mathrm{F}), (F,P), (P,F), (P,P)\}$

نعتبر X هو عدد مرات ظهور الوجه

و منه :

$$X(\Omega) = \{0,1,2\}$$

1.3 المتغير العشوائي المتقطع

التوزيع الاحتمالي المتقطع:

التوزيع الاحتمالي(Distribution Probability) أو قانون الاحتمال هو الذي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير.[36] بمعنى آخر هو التكرار النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير.

إذن فقانون احتمال المتغير العشوائي المتقطع X هو التطبيق f المعرف كما يلي:

$$x_i \longrightarrow f(x_i) = p(X = x_i) = p_i$$

حيث $\sum p_i = 1$ و $p(\phi) = 0$ و $p(\mathbb{R}) = 1$

[36] جبار عبد مضحي، مرجع سابق، ص 76

و يمكننا تكوين جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع بالشكل الآتي (الجدول 19) :

X	x_1	x_2	...	x_n	Σ
$P(X=x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$	1

ملاحظة: الدالة $f(x_i)$ تسمى دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع X، و من خصائصها أنها تحقق الشروط التالية:

1) $f(x) \geq 0$ لكل $x \in X$

2) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

مثال 1: في تجربة رمي حجر نرد منتظم، نعرف المتغير العشوائي X بأنه الرقم الذي يظهر على الوجه، اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير X.

حل المثال: لدينا:

$$P(X=1) = P(X=2) \dots = P(X=6) = 1/6$$

و منه نحصل على الجدول التالي:

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

أما إذا رمينا حجري نرد و كان المتغير العشوائي هو مجموع الوجهين فإننا نحصل على الجدول التالي:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

مثال2:

لتكن الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & , x = 0,1,2,3,4 \\ 0 & , \text{غير ذلك} \end{cases}$$

أثبت أنها دالة كتلة احتمالية.

حل:

لإثبات أن $f(x)$ هي دالة كتلة احتمالية نتحقق من الشرطين: لدينا

$$f(0) = 0,\ f(1) = \frac{1}{10},\quad f(2) = \frac{2}{10}\ ,\ f(3) = \frac{3}{10},\ f(4) = \frac{4}{10}$$

أي أن: $f(x) \geq 0$ لكل $x \in X$ و منه **فالشرط الأول محقق.**

كما نلاحظ أن:

$$\sum_{x=0}^{4} f(x) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = 1$$

و منه **فالشرط الثاني محقق.**

بما أن الشرطين محققان فإن الدالة $f(x)$ هي دالة كتلة احتمالية.

دالة التوزيع التراكمي:

تعريف: دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a.

مثال1:الجدول المقابل يبين دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X فأوجد:

.F(2), F(3), F(4), F(4.5), F(5), F(7)

x	3	4	5
$f(x)$	0.5	0.3	0.2

الحل:

$F(2) = P(X \leq 2) = 0$, $F(3) = P(X \leq 3) = 0.5$

$F(4) = P(X \leq 4) = 0.5 + 0.3 = 0.8$, $F(4.5) = P(X \leq 4.5) = 0.8$

$F(5) = P(X \leq 5) = 1$, $F(7) = P(X \leq 7) = 1$

بعض خواص دالة التوزيع التراكمي:

1. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
2. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

مثال: الجدول التالي يبين بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X.

المطلوب: إيجاد كل من:

$a)\ P(1 < X \leq 3)$ $b)\ P(2 < X \leq 5)$ $c)\ P(X > 2)$

x	1	2	3	5
$F(x)$	0.15	0.2	0.6	1

الحل:

$a)\ P(1 < X \leq 3) = F(3) - F(1) = 0.6 - 0.15 = 0.45$

$b)\ P(2 < X \leq 5) = F(5) - F(2) = 1 - 0.2 = 0.8$

$c)\ P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.2 = 0.8$

مثال2:

لتكن $f(x)$ دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع X ، حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{210} & , x = 1,2,\dots,20 \\ 0 & \text{غير ذلك} , \end{cases}$$

- أوجد دالة التوزيع التراكمي، ثم احسب كل من $P(2 < X \leq 4), P(X \leq 3), P(X > 2)$

الحل:

لدينا:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{x} f(n) = \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{210} n = \frac{1}{210} \sum_{n=1}^{x} n = \frac{1}{210} \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x(x+1)}{420}$$

و عليه تكون دالة التوزيع التراكمي كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ \frac{x(x+1)}{420} & , \quad x = 1,2,\dots,20 \\ 1 & , \quad x \geq 20 \end{cases}$$

حساب كل من $P(10 < X \leq 14), P(X \leq 14), P(X > 10)$

$P(X \leq 14) = F(14) = \frac{13\times 14}{420} = \frac{210}{420} = 0.5$

$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - \frac{110}{420} = \frac{31}{42} \approx 0.74$

$P(10 < X \leq 14) = F(14) - F(10) = 0.5 - \frac{11}{42} = \frac{10}{42} \approx 0.24$

التوقع الرياضي:

يوجد مبدأ هام في الإحصاء و الاحتمالات و هو التوقع الرياضي Mathematical expectation للمتغير العشوائي. بالنسبة للمتغيرات العشوائية المنفصلة X و التي تأخذ القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ فإن توقع X (أو القيمة المتوسطة) يعرف كالآتي:

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + \dots + x_n P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

أو يمكن كتابته باستخدام دالة الكتلة الاحتمالية باعتبار $P(X = x_i) = f(x_i)$ أي:

$$E(X) = x_1 f(x_1) + \dots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = \sum_x x f(x)$$

حيث أن الجمع الأخير يؤخذ على كل قيم x.

ملاحظة 1:

نلاحظ أنه إذا كانت كل الاحتمالات متساوية فإن:

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

و التي هي ببساطة الوسط الحسابي للقيم $x_1, x_2, \dots, x_n$.

على سبيل المثال في تجربة رمي زهرة نرد، احتمال ظهور كل رقم من أرقامها هو $\frac{1}{6}$، و منه

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \dots + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{1+2+\dots+6}{6} = 3.5$$

ملاحظة 2:

الوسط الحسابي للمتغير العشوائي X نرمز له بـ μ و هو نفسه التوقع للمتغير العشوائي X و يمثل قياسا لمركز التوزيع X.

مثال1: الجدول المقابل يبين دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	3	4	5
$f(x)$	0.5	0.3	0.2

نحسب التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتقطع X كما يلي:

$$E(X) = \sum_x xf(x) = 3 \times 0.5 + 4 \times 0.3 + 5 \times 0.2 = 3.7$$

مثال 2: في لعبة زهرة نرد غير مزيف، يكسب اللاعب 20 دينارا إذا ظهر الرقم 2، و 40 دينارا إذا ظهر الرقم 4، و يخسر 30 دينارا إذا ظهر الوجه 6، بينما لا يعتبر خاسرا أو رابحا إذا ظهر رقم آخر. فما هو المبلغ المتوقع أن يكسبه.

الحل:

ليكن X المتغير العشوائي الذي يعطي المبلغ الذي يكسبه أو يخسره. و منه

$$, \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, \qquad X(\Omega) = \{0,20,40,-30\}$$

فيكون جدول الاحتمال للمتغير X هو:

X	0	+20	+40	-30
$P(X = x)$	3/6	1/6	1/6	1/6

و منه فالقيمة المتوقعة أو التوقع هو:

$$E(X) = 0 \times \frac{3}{6} + 20 \times \frac{1}{6} + 40 \times \frac{1}{6} - 30 \times \frac{1}{6} = 5$$

و هذا يعني أن اللاعب يتوقع أن يكسب 5 دنانير. لكي تكون اللعبة عادلة ينبغي أن يدفع اللاعب 5 دنانير لكي يلعبها.

تعريف:

ليكن X متغيرا عشوائيا له دالة التوزيع الاحتمالي $f(x)$، فإن قيمة التوقع للدالة $u(X)$ يعرف كالآتي:

$$E[u(X)] = \sum_x u(x)f(x)$$

مثال: لتكن قيم دالة الكتلة الاحتمالية كالآتي:

$$f(3) = \frac{1}{216} \quad ; \quad f(2) = \frac{15}{216} \quad ; \quad f(1) = \frac{75}{216} \quad ; \quad f(0) = \frac{125}{216}$$

و لتكن $u(X)$ دالة معرفة كما يلي:

$$u(X) = \begin{cases} X - 1 & if \quad X = 0,1 \\ X & if \quad X = 2,3 \end{cases}$$

المطلوب: حساب توقع كل من X و $u(X)$.

الحل: نحسب توقع X كما يلي:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{3} xf(x) = 0\left(\frac{125}{216}\right) + 1\left(\frac{75}{216}\right) + 2\left(\frac{15}{216}\right) + 3\left(\frac{1}{216}\right) = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$$

أما توقع $u(X)$ فنحسبه كما يلي:

$$E[u(X)] = \sum_{x=0}^{3} u(x)f(x) = (-1)\left(\frac{125}{216}\right) + 0\left(\frac{75}{216}\right) + 2\left(\frac{15}{216}\right) + 3\left(\frac{1}{216}\right) = -\frac{92}{216} = -\frac{46}{108}$$

خواص التوقع الرياضي:

في حالة وجود التوقع الرياضي فإنه يحقق الخواص الآتية:

1) $E(c) = c$ حيث c ثابت.

2) $E[cu(X)] = cE[u(X)]$ حيث c ثابت و u دالة.

3) إذا كان $c_1, c_2, \dots, c_k$ ثوابت و $u_1, u_2, \dots, u_k$ دوال فإن:

$$E[c_1u_1(X) + c_2u_2(X) + \cdots + c_Ku_K(X)] = c_1E[u_1(X)] + c_2E[u_2(X)] + \cdots + c_KE[u_k(X)]$$

البرهان:

1) لدينا

$$E(c) = \sum_x cf(x) = c\sum_x f(x) = c$$

لأن $\sum_x f(x) = 1$.

2) لدينا:

$$E[cu(X)] = \sum_x cu(x)f(x) = c\sum_x u(x)\,f(x) = cE[u(X)]$$

3) لدينا:

$$\begin{aligned} E[c_1u_1(X) + c_2u_2(X) + \cdots + c_Ku_K(X)] &= c_1\sum_x u_1(x)\,f(x) + c_2\sum_x u_2(x)\,f(x) + \cdots + c_k\sum_x u_k(x)\,f(x) \\ &= c_1E[u_1(X)] + c_2E[u_2(X)] + \cdots + c_KE[u_k(X)] \end{aligned}$$

مثال:

ليكن X متغيرا عشوائيا له دالة التوزيع الاحتمالي الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & ,x = 2,3 \\ 0 & ,\ \text{غير ذلك} \end{cases}$$

ما هو توقع كل من X^2 و $2(X+2)(X-2)$؟

الحل:

$$E(X^2) = \sum_{x=2}^{3} x^2 \frac{x}{5} = \sum_{x=2}^{3} \frac{x^3}{5} = \frac{2^3}{5} + \frac{3^3}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

$$E[2(\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}-2)] = 2\mathrm{E}(\mathrm{X}^2-4) = 2[\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \mathrm{E}(4)] = 2(7-4) = 6$$

تعريف:

التباين (Variance) هو قياس لانحراف قيم المتغير X عن المتوسط μ و يرمز له بالرمز V و يحسب بالعلاقة التالية:

$$\boxed{V(X) = E[(X-\mu)^2] = E(x^2) - E^2(x)}$$ [37]

و لبرهان هذه العلاقة لدينا:

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum (x_i-\mu)^2 f(x_i) = \sum (x_i{}^2 - 2\mu x_i + \mu^2) f(x_i)$$

$$= \sum [x_i{}^2 f(x_i) - 2\mu x_i f(x_i) + \mu^2 f(x_i)] = \sum x_i{}^2 f(x_i) - 2\mu \sum x_i f(x_i) + \mu^2 \sum f(x_i)$$

$$= \sum x_i{}^2 f(x_i) - 2\mu^2 + \mu^2 = \sum x_i{}^2 f(x_i) - \mu^2 = E(x^2) - \mu^2$$

نظرية:

ليكن X متغيرا عشوائيا تباينه $V(x)$، إذن:

1) $V(X+c) = V(X)$

2) $V(cX) = c^2 V(X)$

البرهان:

1) $V(X+c) = V(X)$: لدينا

$$\begin{aligned} V(X+c) &= E(X+c)^2 - E^2(X+c) \\ &= E(X^2 + c^2 + 2Xc) - E(X+c)E(X+c) \\ &= E(X^2) + c^2 + 2cE(X) - [E(X)+c]^2 \\ &= E(X^2) + c^2 + 2cE(X) - E^2(X) - c^2 - 2cE(X) \\ &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= V(X) \end{aligned}$$

2) $V(cX) = c^2 V(X)$: لدينا

$$\begin{aligned} V(cX) &= E(cX)^2 - E^2(cX) \\ &= E(c^2X^2) - E(cX)E(cX) \\ &= c^2E(X^2) - c^2E^2(X) \\ &= c^2[E(X^2) - E^2(X)] \\ &= c^2V(X) \end{aligned}$$

[37] محمد بداوي ، مرجع سابق، ص 73

2.3 المتغير العشوائي المستمر

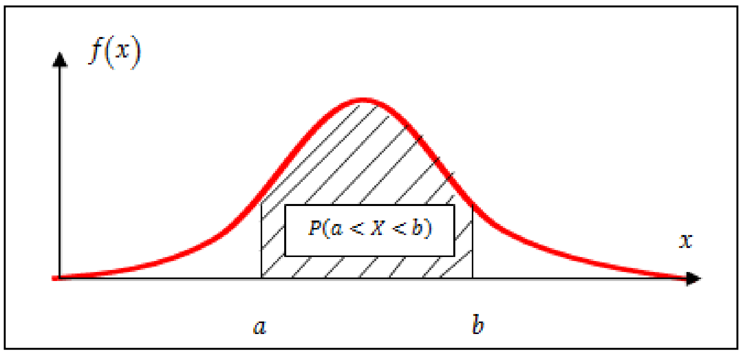
المتغير العشوائي المستمر، هو الذي يأخذ قيما متصلة، و يأخذ عدد لا نهائي من القيم الممكنة له داخل مجاله[38]. على سبيل المثال:

- كمية الألبان التي تنتجها بقرة في اليوم باللتر: $\{X = x: 10 < x < 40\}$
- أوزان الطلبة بالكيلوغرام: $\{X = x: 55 < x < 80\}$

التوزيع الاحتمالي المستمر:

لحساب احتمال أن المتغير العشوائي المستمر X يقع بين قيمتين مختلفتين a و b ، يجب حساب المساحة أسفل المنحنى المحصور بينهما كما هو مبين في الشكل أسفله:

الشكل (14): منحنى التوزيع الاحتمالي المستمر.



و يتم ذلك بحساب التكامل:

$$\boxed{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx}$$

تعريف: دالة توزيع المتغير العشوائي المتصل تكتب على الشكل:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

حيث الدالة $f(x)$ لها الخصائص التالية:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

الدالة $f(x)$ التي تحقق الشرطين السابقين تسمى دالة الكثافة.

مثال: لتكن $f(x)$ دالة حيث:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

1. جد الثابت c لكي تكون الدالة $f(x)$ دالة كثافة احتمال.
2. جد $P(1 < X < 2)$.
3. جد دالة التوزيع التراكمي.

---

[38] جبار عبد مضحي، مرجع سابق، ص 133

الحل:

1. لكي تتحقق الخاصية الأولى يكفي أن يكون الثابت c موجبا، أما بالنسبة للخاصية الثانية فلدينا:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^3 cx^2dx = \frac{cx^3}{3}\Big|_0^3 = 9c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9}$$

و عليه فإن دالة كثافة الاحتمال هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

2. لإيجاد الاحتمال $P(1 < X < 2)$ لدينا:

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{1}{9}x^2dx = \frac{x^3}{27}\Big|_1^2 = \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

3. إيجاد دالة التوزيع التراكمي:

و عليه تكون دالة التوزيع التراكمي كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , & x < 0 \\ \frac{x^3}{27} & , & 0 < x < 3 \\ 1 & , & x \geq 3 \end{cases}$$

3.3 العزوم

العزم (Moment) في علم الاحصاء و الاحتمالات فكرة مجردة مستمدة من مفهوم ميكانيكي (القوة في الذراع) يشير إلى القوة المطبقة حول نقطة مركزية. فالعزم قيمة حقيقية للدالة $f(x)$ للمتغير الحقيقي حول القيمة c.

تستخدم العزوم لاستخراج قوانين حساب الوسط الحسابي، الانحراف المعياري، التباين، و الكثير من مقاييس الشكل... .

العزم الرائي:

أ) العزم الرائي حول نقطة الأصل:

تعريف: يعرف العزم الرائي (العزم من الرتبة r حول نقطة الأصل) للمتغير العشوائي X بأنه التوقع الرياضي ل x قوة r ، و يكتب على الشكل الآتي:

$$m_r = E(x^r), \;\; r = 1,2,3,\dots$$

1- إذا كان X متغير عشوائي متقطع بدلالة كتلة احتمالية P(X) فإن:

$$m_r = E(x^r) = \sum_x x^r P(x)$$

2- إذا كان X متغير عشوائي مستمر بدلالة كثافة احتمالية $f(x)$ فإن:

$$m_r = E(x^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r\, f(x)\, dx$$

استنتاج: من تعريف العزم حول نقطة الأصل نجد أن:

- إذا كان r=1 نجد أن: $m_1 = E(x^1) = \mu$ و يسمى بالعزم الأول حول نقطة الأصل.

ب) العزم المركزي الرائي (أو العزم االرائي حول الوسط الحسابي)

تعريف: يعرف العزم المركزي الرائي (العزم من الرتبة r حول الوسط الحسابي) للمتغير العشوائي X على الشكل التالي:

$$M_r = E(x-\mu)^r,\ \ r = 1,2,3,\dots$$

1- إذا كان Xمتغير عشوائي متقطع بدلالة كتلة احتمالية P(X) فإن:

$$M_r = E(x-\mu)^r = \sum_x (x-\mu)^r P(x)$$

2- إذا كان X متغير عشوائي مستمر بدلالة كثافة احتمالية $f(x)$ فإن:

$$M_r = E(x-\mu)^r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^r\, f(x)\, dx$$

استنتاج: من تعريف العزم المركزي نجد أن:

- إذا كان r=1 نجد أن: $M_1 = E(x-\mu) = 0$ و يسمى بالعزم المركزي الأول أو العزم الأول حول الوسط الحسابي.

- إذا كان r=2 نجد أن: $M_2 = E(x-\mu)^2 = V(x)$ أي أن العزم المركزي الثاني هو نفسه التباين.

الدالة المولدة للعزوم:

سنتعرف الآن على الدالة المولدة للعزوم (*m,g,f*) The Moment generating function ، و التي من خلالها نعرف عدد من العزوم

إلى X، عندما تكون موجودة.

تعريف:

- إذا كان Xمتغير عشوائي متقطع بدلالة كتلة احتمالية P(X) فإن:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} P(x)$$

2- إذا كان X متغير عشوائي مستمر بدلالة كثافة احتمالية $f(x)$ فإن:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\, f(x)\, dx$$

مبرهنة:

إذا كان X متغيرا عشوائيا دالته المولدة للعزوم $M_X(t)$ و كان Y=aX+b، فإن الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي Y تكتب كما يلي:

$$M_Y(t) = e^{tb} M_X(at)$$

بالفعل لدينا:

$$M_Y(t) = E(e^{ty}) = E\left(e^{t(ax+b)}\right) = E(e^{atx+bt}) = E(e^{atx})E(e^{bt}) = e^{tb} M_X(at)$$

مثال1: اوجد الدالة المولدة للعزوم إذا كان X له دالة كثافة احتمالية

$$f(x) = \frac{1}{b} \quad , \ 0 < x < b$$

الحل: لدينا

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_0^b e^{tx}\, f(x)\, dx = \int_0^b \frac{e^{tx}}{b} dx = \frac{1}{bt} e^{tx}\Big|_0^b = \frac{1}{bt}(e^{bt} - e^0) = \frac{1}{bt}(e^{bt} - 1)$$

مثال2: اوجد الدالة المولدة للعزوم إذا كان X له دالة كتلة احتمالية

$$P(X) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad , x = 1,2,3$$

الحل:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=1}^{3} e^{tx} P(x) = e^t\left(\frac{1}{2}\right) + e^{2t}\left(\frac{1}{4}\right) + e^{3t}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{e^t}{2} + \frac{e^{2t}}{4} + \frac{e^{3t}}{8}$$

إيجاد أي عزم حول نقطة الأصل باستخدام الدالة المولدة للعزوم

نقول أن التوزيع الاحتمالي له دالة توليد العزوم إذا وجد عدد حقيقي T بحيث أن $M_X(t)$ تكون محدودة لكل $|t| \leq T$. و في هذه الحالة يمكن ثبات أن كل العزوم متواجدة و يمكن الحصول عليها بالاشتقاق المتتالي عند $t = 0$ لدالة توليد العزوم.

لدينا:

$$M_X(t) = E(e^{tx})$$
$$\frac{d}{dt} M_X(t) = E\left(\frac{d}{dt} e^{tx}\right) = E(xe^{tx})$$
$$\frac{d^2}{dt^2} M_X(t) = E\left(\frac{d}{dt} xe^{tx}\right) = E(x^2 e^{tx})$$

.

.

$$\frac{d^r}{dt^r} M_X(t) = E\left(\frac{d}{dt} x^{r-1} e^{tx}\right) = E(x^r e^{tx})$$

و عليه ينتج لنا:

$$\frac{d}{dt}[M_X(t)]_{t=0} = E(X) = m_1$$
$$\frac{d^2}{dt^2}[M_X(t)]_{t=0} = E(X^2) = m_2$$

.

.

.

$$\frac{d^r}{dt^r}[M_X(t)]_{t=0} = E(X^r) = m_r$$

مثال: ليكن X متغير عشوائي له دالة كثافة احتمالية

$$f(x) = 2e^{-2x} \quad , x \geq 0$$

أوجد:

1. الدالة المولدة للعزوم للمتغير X.
2. التباين للمتغير X باستخدام الدالة المولدة للعزوم.

الحل:

1) حساب الدالة المولدة للعزوم للمتغير X:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_0^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{tx} (2e^{-2x}) dx = 2\int_0^{+\infty} e^{(t-2)x}\, dx$$
$$= \frac{2}{t-2}(e^{\infty} - e^0) = \frac{-2}{t-2} = 2(2-t)^{-1}$$

2) حساب التباين:

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$
$$E(x) = m_1 = \frac{d}{dt}[M_X(t)]_{t=0} = \frac{d}{dt}[2(2-t)^{-1}]_{t=0} = 2(2-t)^{-2}|_{t=0} = \frac{2}{(2-0)^2} = \frac{1}{2}$$
$$E(x^2) = m_2 = \frac{d^2}{dt^2}[M_X(t)]_{t=0} = 4(2-t)^{-3}|_{t=0} = \frac{4}{(2-0)^3} = \frac{1}{2}$$
$$V(x) = E(x^2) - \big(E(x)\big)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

نتيجة:

إن أهمية الدوال المولدة للعزوم تأتي من كونها ترتبط مع دوال التوزيع بعلاقة وحيدة التعيين، أي أنه لكل توزيع احتمالي دالة مولدة للعزوم خاصة به.

4.3 متباينتي تشيبتشيف و ماركوف

من خلال ما سبق تعلمنا أنه يمكننا حساب المقادير المميزة للتوزيع الاحتمالي و التي هي التوقع الرياضي و التباين انطلاقا من الدالة الاحتمالية $f_X(x)$ للمتغير العشوائي X، لكن هل العكس صحيح؟ أي إذا علمنا بمقادير هذه القيم هل نستطيع معرفة التوزيع الاحتمالي؟ الجواب لا يمكننا ذلك، إلا أنه من خلال متباينة تشيبتشيف نستطيع حساب حد أعلى (أو حد أدنى) لهذه الاحتمالات.

سنتطرق أولا لمتباينة ماركوف و التي سنعتمد عليها لإثبات متباينة تشيبيتشيف.

أ- متباينة ماركوف Inégalité de Markov:

مبرهنة:

ليكن X متغير عشوائي يأخذ قيما موجبة له توقع E(X) عندئذ من أجل كل عدد $k > 0$ يكون:

$$P(X \geq k) \leq \frac{E(X)}{k}$$

الإثبات:[39]

سنذكر البرهان من أجل X متغيرا مستمرا كثافته $f(x)$، لدينا

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{k} xf(x)dx + \int_k^{\infty} xf(x)dx \geq \int_k^{\infty} xf(x)dx \geq \int_k^{\infty} kf(x)dx = k\int_k^{\infty} f(x)dx$$

أي أن:

$$E(X) \geq kP(X \geq k)$$

ب- متباينة تشيبيتشيف Inégalité de Tchebnychev:

مبرهنة:

ليكن X متغير عشوائي له توقع $E(X) = \mu$ و تباين $V(X) = \sigma^2$، فإنه مهما يكن $\varepsilon > 0$ يكون:

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

الإثبات:

بما أن $(X - \mu)^2$ يأخذ قيما موجبة فقط فإنه يمكننا تطبيق متباينة ماركوف، نضع $k = \varepsilon^2$ فنجد:

$$P((X - \mu)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(X - \mu)^2}{\varepsilon^2}$$

و منه:

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

مثال:

نفرض أن متوسط طول مجموعة من الطلبة هو $160cm$ مع تباين يساوي $12.5cm$، بين أن احتمال أن ينحصر طول شخص ما بين $155cm$ و $165cm$ يساوي على الأقل 50% .

الحل: لدينا

$$p(155 < X < 165) = P(|X - \mu| < 5) = 1 - P(|X - \mu| \geq 5)$$

[39] محمد بداوي، مرجع سابق، ص 86

باستخدام متباينة تشيبتشيف نجد:

$$P(|X-\mu|\geq 5)\leq \frac{V(X)}{5^2}=\frac{12.5}{25}=\frac{1}{2}$$

و منه:

$$p(155<X<165)\geq 1-\frac{1}{2}=0.5$$

5.3 تمارين مقترحة

التمرين الأول:

صندوق به 3 كريات حمراء و 5 كريات بيضاء، سحبنا عينة من 4 كريات، إذا كان X يمثل عدد الكريات البيضاء في العينة فأوجد:

1. دالة الكتلة الاحتمالية.
2. احتمال أن تحوي العينة على كريتين لونهما أبيض.
3. احتمال أن العينة تحوي على الأقل 3 كرات لونها أبيض.

التمرين الثاني:

لتكن f دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع X و المعرفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{55}x & ; x=1,2,\dots,10\\ 0 & ; \text{غير ذلك}\end{cases}$$

1. أوجد دالة التوزيع.
2. احسب كلا من: $P(2\leq x\leq 4)$; $P(x\leq 3)$; $P(x>2)$.

التمرين الثالث:

إذا كان المطلوب اختيار طالبين بطريقة عشوائية من بين 3 طلاب و 3 طالبات، و كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الطلبة الذكور الذين سيتم اختيارهم.

1) جد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي و دالة توزيعه التراكمي.
2) جد التوقع الرياضي و الانحراف الرياضي لهذا المتغير.

التمرين الرابع:

وعاء به 4 كريات خضراء و 6 حمراء، نسحب 3 كريات على التوالي من هذا الوعاء. ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

1) جد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي و مثله بيانيا.
2) جد دالة التوزيع التراكمي و مثلها بيانيا.

التمرين الخامس:

ليكن المتغير العشوائي X المعرف بدالة توزيعه التراكمي كما يلي:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & ; x<-5\\ \frac{2}{15} & ; -5\le x<-3\\ \frac{7}{15} & ; -3\le x<0\\ \frac{13}{15} & ; 0\le x<2\\ 1 & ; x\ge 2\end{cases}$$

1. جد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.
2. احسب كلا من: $P(-3\le x\le 2)\ ;\ P(x<0)\ ;\ P(x\ge -3)$.

التمرين السادس:

لتكن f دالة معرفة كما يلي:

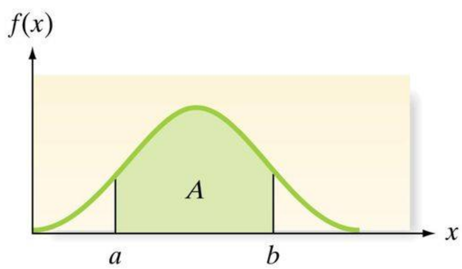
$$f(x)=\begin{cases}ke^{-3x} & ;\ x=1,2,\dots,10\\ 0 & ;\ \text{غير ذلك}\end{cases}$$

1. جد قيمة k التي تجعل الدالة $f(x)$ دالة كتلة احتمال، ثم جد $P(0.5<x\le 1)$.
2. جد دالة التوزيع التراكمي ثم تأكد من حساب $P(0.5<x\le 1)$.

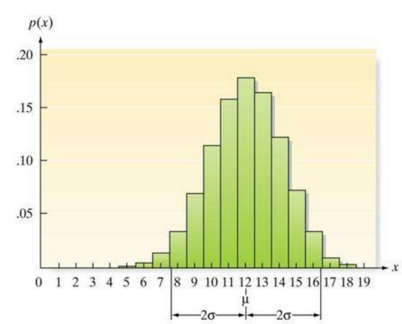
بعض التوزيعات الاحتمالية الشهيرة

توزيع برنولي، توزيع ذي الحدين (ثنائي الحد)،

توزيع بواسون، التوزيع الطبيعي...



توزيع متصل



توزيع منفصل

4 الفصل الرابع: بعض التوزيعات الاحتمالية الشهيرة

في كثير من النواحي التطبيقية تتبع بعض الظواهر توزيعات احتمالية خاصة، و التي من خلالها يمكننا حساب احتمالات قيم المتغير العشوائي. سنتعرف في هذا الفصل على بعض التوزيعات الخاصة في الاحتمالات، منها التوزيعات المتقطعة كتوزيع برنولي، توزيع ذي الحدين و توزيع بواسون ... و منها التوزيعات المستمرة كالتوزيع الطبيعي...

1.4 التوزيعات المتقطعة

في مجالات عدة من حياتنا اليومية هناك الكثير من التجارب ثنائية النتائج، سنتطرق لأهم القوانين الاحتمالية التي ترتبط ارتباطا وثيقا بهذه التجارب و هي:

1.1.4 توزيع برنولي

تجربة برنولي هي تجربة عشوائية تحقق الشروط التالية:

- لها نتيجتين فقط إما نجاح نرمز له بـ S (Succès) أو فشل نرمز له بـ E (Echec). $S \cap E = \emptyset \;,\; S \cup E = \Omega$

- احتمال النجاح هو p و منه فإن احتمال الفشل هو q=1-p.

- عند تكرار التجربة عدد من المرات تكون المحاولات مستقلة عن بعضها البعض.

إذا عرفنا المتغير العشوائي X الذي يمثل النجاح خلال تجربة برنولي فإنه سيأخذ القيمة 0 إذا كانت نتيجة التجربة فشل و يأخذ 1 في حالة النجاح. و بناءا على ذلك فإن المتغير X يتبع توزيع برنولي بمعلمة p و نكتب: $X \sim Ber\ (p)$

و القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X معرف كما يلي:

$$P(X=x)=\begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} \;, & x_i=0,1 \\ 0 \;, & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

خواص:

التوقع الرياضي لـ X هو: $\boxed{E(X)=p}$

بالفعل لدينا:

$$\mu=E(X)=\sum xf(x)=\sum_{x=0,1} xp^x q^{1-x}=p$$

تباين X هو: $\boxed{\sigma^2=pq}$

بالفعل لدينا العزم الثاني هو:

$$E(X^2) = \sum x^2 f(x) = \sum_{x=0,1} x^2 p^x q^{1-x} = p$$

و على ذلك فإن تباين هذا التوزيع هو:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

دالة توليد العزوم هي: $\boxed{M_X(t) = q + pe^t}$

بالفعل لدينا:

$$M_X(t) = E(e^{xt}) = \sum_{x=0,1} e^{xt} p^x q^{1-x} = q + pe^t$$

العزوم: $\boxed{m_r = p}$

و ذلك لأن:

$$m_r = \frac{d^r}{dt^r}[M_X(t)]_{t=0} = p$$

أي أن جميع عزوم هذا التوزيع حول نقطة الأصل متساوية و تساوي p.

مثال:

إذا علمت أن $X \sim Ber\ (p)$، جد كلا من توقع و تباين Y حيث $Y = a + bX$.

الحل:

بالنسبة للتوقع لدينا التوقع:

$$E(Y) = E(a + bX) = E(a) + E(bX) = a + bE(X) = a + bp$$

أما التباين فلدينا:

$$V(Y) = V(a + bX) = V(a) + V(bX) = b^2 V(X) = b^2 pq$$

2.1.4 توزيع ذي الحدين (ثنائي الحد)

يعتبر توزيع ذي الحدين (Distribution binomial) من أكثر التوزيعات استخداما و خاصة مع التجارب التي يكون لها نتيجتين فقط و ينشأ هذا التوزيع عند تكرار محاولة برنولي عدد من المرات و بصفة مستقلة و التي تسمى في تلك الحالة بتجربة ذات الحدين و التي يمكن تعريفها على أنها تجربة تحقق الشروط التالية:

- تجربة يمكن إجراؤها $n > 1$ من المرات.

- كل اختبار فيها له نتيجتين، نجاح S، فشل E.

- احتمال النجاح ثابت في كل اختبار و نرمز له بـ p

- احتمال الفشل ثابت في كل اختبار و نرمز له بـ $q=1-p$

- نتيجة كل اختبار مستقلة عن الأخرى.

إذا عرفنا متغير عشوائي Y يمثل عدد مرات الحصول على النجاح في تجربة ذات الحدين فإن Y يسمى متغير له توزيع ذو الحدين و نكتب: $Y \sim B\ (n, p)$، و تكون دالة الكتلة الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$p(Y = y) = C_n^y p^y (1-p)^{n-y}, y \in \{0,1,2, \dots, n\}$$

إذا كان $n=1$ تحصل على قانون احتمال برنولي.

خواص:

التوقع الرياضي لـ Y هو: $E(Y) = np$

تباين Y هو: $\sigma_Y^2 = npq$

مثال 1:

في مسابقة رمي السهم نحو الهدف، إذا كان احتمال إصابة أحد اللاعبين للهدف هو 0.2، و أتيحت له فرصة الرماية 10 مرات:

1. ما هو احتمال إصابة الهدف أكثر من مرتين.
2. ما هو احتمال عدم إصابة الهدف.
3. ما هو احتمال إصابة الهدف 4 مرات على الأكثر.
4. ما هو العدد المتوقع لإصابة الهدف.
5. جد قيمة التباين.

حل: نرمز بـ S للنجاح و هو إصابة الهدف و E الفشل أي عدم إصابة الهدف.

لدينا $S \cup E = \Omega$, $S \cap E = \emptyset$, $\mathrm{P(S)} = 0.2$ و $\mathrm{P(E)} = 0.8$

تجربة التصويب نحو الهدف هي تجربة برنولي، هذه التجربة تتكرر 10 مرات و بصفة مستقلة و ليكن X متغير عشوائي يحسب عدد مرات إصابة الهدف فإن: $X \sim B(10; 0.2)$

و قانون احتماله هو:

$$P(X = x) = C_{10}^x (0.2)^x (0.8)^{10-x}, x \in \{0,1,2, \dots, 10\}$$

1) احتمال إصابة الهدف أكثر من مرتين:

$$p(X > 2) = 1 - p(X \leq 2) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)] = 0.325$$

2) احتمال عدم إصابة الهدف:

3) احتمال إصابة الهدف 4 مرات على الأكثر:

$$p(X \leq 4) = \sum_{x=0}^{4} p(X = x) = 0.966$$

4) العدد المتوقع لإصابة الهدف:

$$E(X) = np = 10 \times 0.2 = 2$$

5) ايجاد قيمة التباين:

$$\sigma_X^2 = npq = 10 \times 0.2 \times 0.8 = 1.6$$

3.1.4 توزيع بواسون

توزيع بواسون (Poisson Distribution) هو توزيع احتمالي منفصل يعبر عن احتمالية حدوث عدد من الأحداث ضمن فترة محددة من الوقت إذا حدثت هذه الأحداث بمعدل وسطي معروف وغير متعلقة بزمن حدوث آخر حدث.

مثلا: يتلقى أحد مكاتب استعلامات متعامل موبيليس 180 اتصالا في المتوسط في الساعة، عدد المكالمات التي يتلقاها خلال أي دقيقة له توزيع احتمالية بواسون، عدد الاتصالات الأكثر احتمالا هو 3 اتصالات في الدقيقة، و لكن من المحتمل أيضا أن يكون عدد الاتصالات 2 أو 4، كما أنه يمكن أن لا يحدث أي اتصال و هو احتمال ضئيل، و احتمال صغير جدا أن تتم 10 اتصالات أو أكثر خلال دقيقة واحدة.

تعريف: يقال عن المتغير العشوائي X أنه يتبع توزيع بواسون بمعلمة λ إذا كانت دالته الاحتمالية هي :

$$\boxed{f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,\dots}$$

و نكتب:

$$\boxed{X \sim Poi(\lambda)}$$

ملاحظة 1: يمكن التحقق أن هذه الدالة تحقق شروط دالة الكتلة الاحتمالية لأن:

1. $\forall x \in \mathbb{N}, f(x) \geq 0$
2. $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$

ملاحظة 2: إذا كان للمتغير X توزيع بواسون فإن:

$$\boxed{E(X) = V(X) = \lambda}$$

مثال 1: إذا كان متوسط عدد الأيام التي تعطل فيها الدراسة في مدرسة معينة في مدينة ما بسبب نزول الثلج في فصل الشتاء هو 4 أيام فما هو احتمال أن المدارس في هذه المدينة ستعطل فيها الدراسة لمدة ستة أيام خلال الشتاء؟.

الحل: ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الأيام التي تعطل فيها الدراسة بسبب نزول الثلج، بما أن هذه الظاهرة متعلقة بالزمن (فصل الشتاء) فإنها تتبع توزيع بواسون، لدينا:

$$E(X) = \lambda = 4$$

و منه احتمال أن المدارس في هذه المدينة ستعطل فيها الدراسة لمدة ستة أيام خلال الشتاء هو:

$$P(X = 6) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-4}\frac{4^6}{6!} = 0.104$$

4.1.4 تقريب توزيع ذي الحدين بتوزيع بواسون

يمكن أن نحصل على توزيع بواسون بتقريب للتوزيع الثنائي $X \sim B(n;p)$ و ذلك عندما تكون n كبيرة و p صغيرة كما يلي:

لدينا:

$$f(x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, x \in \{0,1,2,\dots,n\}$$

نضع $np = \lambda$ أي أن $p = \frac{\lambda}{n}$ و منه:

$$f(x) = \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{n^x\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!}\frac{\lambda^x}{n^x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

لما $n \to +\infty$ فإن:

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x} \to e^{-\lambda}.1 = e^{-\lambda}$$

و منه نتحصل على نهاية التوزيع:

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,\dots$$

ملاحظة: يكون هذا التقريب مقبول من أجل $n > 30$ و $np \leq 5$.

مثال 2: قبل اختراع لقاح فيروس كورونا (كوفيد 19) سعت دول العالم لاستخدام دواء **كلوروكين(Chloroquine)** لعلاج المصابين بفيروس كورونا و هو دواء يستخدم للوقاية من ولمعالجة مرض الملاريا.- Malaria

الأعراض الجانبية الشائعة تشمل:الغثيان، الصداع، الإسهال وانقباضات في البطن. وفي بعض الأحيان يظهر طفح جلدي.

أعطينا هذا الدواء لـ 2000 شخص. إذا كان احتمال ظهور طفح جلدي ضد هذا الدواء هو ‰1.

ما هو احتمال:

1) أن يظهر طفح جلدي عند ثلاثة أشخاص.

2) احتمال أن يظهر طفح جلدي عند أكثر من شخصين.

الحل:

نضع X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد المرضى الذين يظهر عليهم طفح جلدي.

لدينا: n=2000 و $p = \frac{1}{1000}$ إذن X يخضع لتوزيع ثنائي الحد أي $X \sim B(2000; 0.001)$

لكن نلاحظ أن $n > 30$ و $np = 2 \leq 5$ و منه يمكن أن نقربه لتوزيع بواسن أي $X \sim Poi(\lambda) = Poi(2)$

و عليه:

$$P(X = x) = e^{-2} \frac{2^x}{x!}$$

1) حساب احتمال أن يظهر طفح جلدي عند ثلاثة أشخاص:

$$P(X = 3) = e^{-2} \frac{2^3}{3!} = 0.18$$

2) حساب احتمال أن يظهر طفح جلدي عند أكثر من شخصين:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$
$$= 1 - (e^{-2} + 2e^{-2} + 2e^{-2}) = 1 - 5e^{-2}$$

أي أن: $P(X > 2) = 0.32$

استخداماته: توزيع بواسون كثير الاستخدام في الحياة العملية فهو بجانب أنه يصف الظواهر النادرة مثل عدد الزلازل السنوية أو عدد الحرائق الشهرية فإنه يصف كثيرا من الظواهر التي تحدث في الزمن أو المكان مثل عدد الجزيئات المنبعثة من مصدر مشع على منطقة معينة في فترة زمنية معينة، أو عدد السلع التالفة التي ينتجها مصنع ما في فترة معينة.

2.4 التوزيعات المستمرة

1.2.4 التوزيع الطبيعي

يعتبر هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما في النواحي التطبيقية، و ترجع أهمية هذا التوزيع إلى أنه يصف معظم الظواهر الطبيعية مثل الطول، الوزن، الدخل، درجات الطلاب، درجات الحرارة،...حيث تتركز معظم التكرارات حول الوسط و تقل في الأطراف .

معظم التوزيعات الإحتمالية مثل توزيع ذات الحدين وتوزيع بواسون وغيرها من التوزيعات يمكن تقريبها إلى التوزيع الطبيعي عندما يكون فضاء العينة كبير جدا.

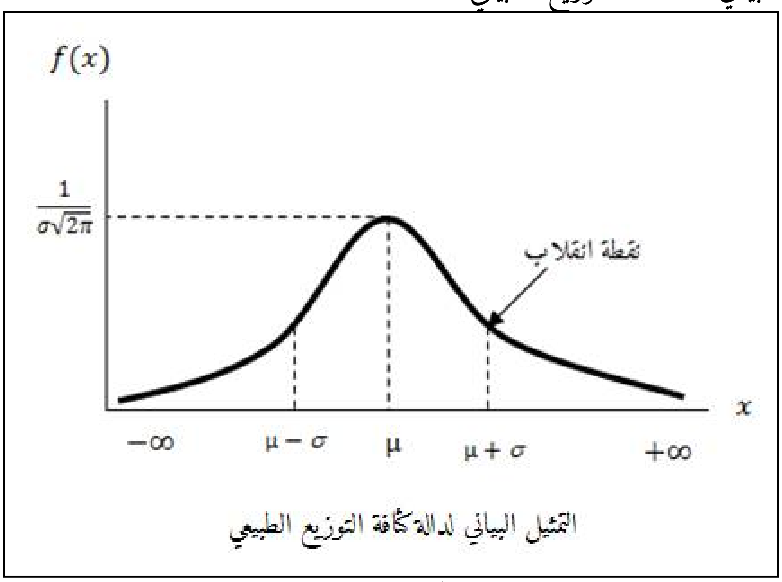
تعريف: نقول عن متغير عشوائي مستمر X بأنه يتبع التوزيع الطبيعي إذا كانت دالة كثافة احتماله معرفة كما يلي:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \qquad x \in \mathbb{R}}$$

حيث μ توقع X و σ الانحراف المعياري، و نكتب: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

و هذا التوزيع منحناه متماثل على جانبي الوسط الحسابي كما هو موضح في الشكل التالي:

الشكل (15): التمثيل البياني لدالة كثافة التوزيع الطبيعي.



نلاحظ تساوي كل من الوسط و الوسيط و المنوال. كما أن قيمة انحراف التوزيع σ تحدد درجة تفلطح التوزيع، فإذا زادت قيمة σ زاد التفلطح مما يعني زيادة تشتت البيانات.

ملاحظة: يمكن أن نبرهن أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

نضع : $y=\frac{x-\mu}{\sigma}$ فنتحصل على:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

نفرض أن التكامل أعلاه يساوي A. و منه يكون:

$$A^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y^2+z^2)}{2}}\,dydz$$

باستخدام الاحداثيات القطبية نجد:

$$A^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,rdrd\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta=\frac{2\pi}{2\pi}=1$$

أي أن:

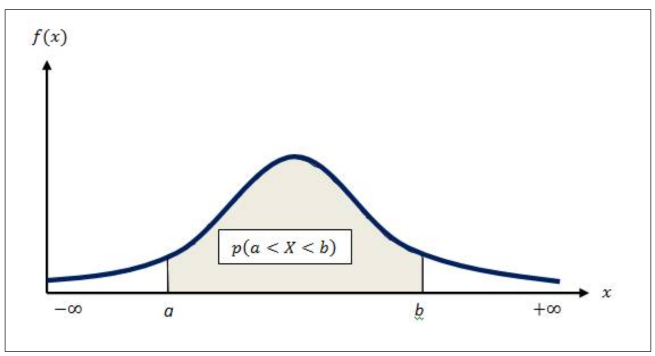
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\,dx=1$$

حساب قيمة الاحتمال:

إذا كان لدينا متغير عشوائي X يخضع لتوزيع طبيعي أي $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ فإن حساب الاحتمالات من النوع $p(a<X<b)$ يتطلب حساب التكامل التالي:

$$p(a<X<b)=\int_a^b f_X(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

و هو يمثل المساحة التالية:



و نظرا لصعوبة حساب هذا التكامل نقوم بتحويل التوزيع الطبيعي $N(\mu;\sigma^2)$ إلى ما يسمى بـ: التوزيع الطبيعي المعياري و نرمز له بـ: $N(0;1)$.

2.2.4 التوزيع الطبيعي المعياري

المتغير العشوائي المستمر الذي يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu=0$ و انحراف معياري $\sigma=1$ يرمز له بـ Z و يقال بأنه يتبع التوزيع الطبيعي المعياري $N(0;1)$ أي $Z\sim N(0,1)$ و تأخذ دالة كثافته الاحتمالية الشكل التالي:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}}$$

حساب احتمال التوزيع $N(0;1)$ هو:

$$p(a < Z < b) = \int_a^b f(z)dz = \int_{-\infty}^b f(z)dz - \int_{-\infty}^a f(z)dz = F(b) - F(a)$$

و قد أعد الاحصائيون جدول يسمى بجدول التوزيع الطبيعي المعياري و يستخدم لتعيين قيمة $F(z) = p(Z < z)$ و الذي يحسب المساحات. (الجدول مرفق في آخر المطبوعة).

مثال 1: إذا كان Z متغير عشوائى له التوزيع الطبيعي المعيارى. احسب الاحتمالات الآتية:

1. $P(Z < 0.82)$ 2. $P(Z < -2.82)$ 3. $P(0.32 < Z < 1.24)$

الحل:

1) إيجاد $P(Z < 0.82)$:

لإيجاد هذا الاحتمال نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري كما يلي:

z	.00	.01	.02
0.0	0.5000	0.5040	0.5080
0.1	0.5398	0.5438	0.5478
0.2	0.5793	0.5832	0.5871
0.3	0.6179	0.6217	0.6255
0.4	0.6554	0.6591	0.6628
0.5	0.6915	0.6950	0.6985
0.6	0.7257	0.7291	0.7324
0.7	0.7580	0.7611	0.7642
0.8	0.7881	0.7910	$\boxed{0.7939}$
0.9	0.8159	0.8186	0.8212

و منه: $P(Z < 0.82) = 0.7939$

2) إيجاد $P(Z < -2.82)$:

لإيجاد هذا الاحتمال نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري كما يلي:

z	.00	.01	.02
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018
−2.8	0.0026	0.0025	$\boxed{0.0024}$
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033

و منه: $P(Z < -2.82) = 0.0024$

3) حساب $P(0.32 < Z < 1.24)$:

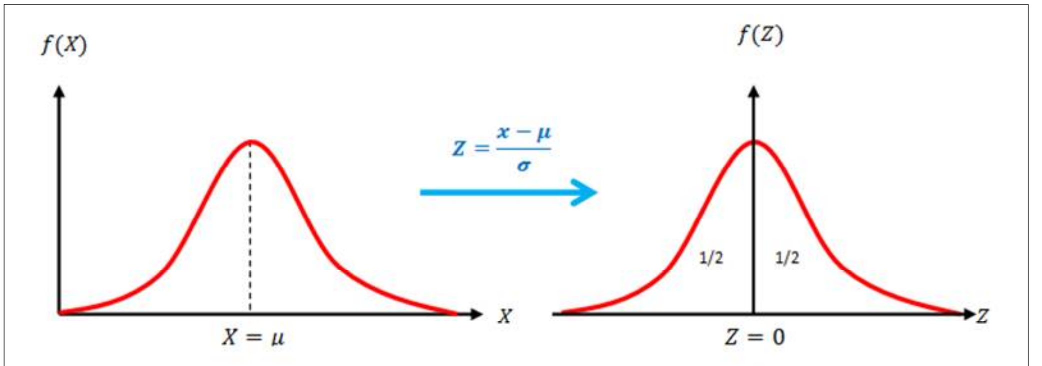
بالاستعانة بجدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد:

$$P(0.32 < Z < 1.24) = P(Z < 1.24) - P(Z < 0.32) = 0.8925 - 0.6255 = 0.267$$

3.2.4 التحويل من $N(\mu;\sigma^2)$ إلى $N(0;1)$

إذا كان X متغير عشوائي مستمر يخضع إلى التوزيع الطبيعي $N(\mu;\sigma^2)$ فإن المتغير العشوائي Z حيث $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري، و تسمى Z بالقيمة المعيارية للمتغير X.

الشكل (16): تحويل متغير طبيعي X إلى متغير Z (معايرة).



تحويل متغير طبيعي X إلى متغير Z (معايرة)

مثال 1:

إذا كان X متغيرا عشوائيا يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 3$، و انحراف معياري $\sigma^2 = 16$

- احسب $p(-6 < X < 9)$

حل: لدينا: $X \sim N(3,16)$

ليكن Z متغيرا عشوائيا حيث: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-3}{4}$ ، $Z \sim N(0,1)$

$$p(-6 < X < 9) = p\left(\frac{-6-3}{4} < \frac{X-3}{4} < \frac{9-3}{4}\right) = p\left(\frac{-9}{4} < Z < \frac{3}{2}\right) = p(-2.25 < Z < 1.5)$$
$$= p(Z < 1.5) - p(Z < -2.25) = 0.9332 - 0.0122 = 0.921$$

و منه: $p(-6 < X < 9) = 0.921$

مثال 2:

إذا علمت أن كمية الأمطار التي تسقط على إحدى المدن خلال شهر ديسمبر لها التوزيع الطبيعي بمتوسط 30.8 مليمتر و انحراف معياري 6.2 مليمتر.

- ما هو احتمال أن تكون كمية الأمطار التي تسقط خلال شهر ديسمبر التالي بين 25 إلى 40 مليمتر؟

حل: ليكن X متغير عشوائي يعبر عن كمية الأمطار خلال شهر ديسمبر، X يتبع توزيع طبيعي حيث:

$\sigma^2 = 6.2^2 = 38.44$ و $\mu = 30.8$

أي $X \sim N(30.8; 38.44)$.

حساب $p(25 < X < 40)$:

ليكن Z متغيرا عشوائيا حيث: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-30.8}{6.2}$ ، $Z \sim N(0,1)$

$$p(25 < X < 40) = p\left(\frac{25-30.8}{6.2} < \frac{X-30.8}{6.2} < \frac{40-30.8}{6.2}\right) = p(-0.94 < Z < 0.19)$$
$$= p(Z < 0.19) - p(Z < -0.94) = 0.5753 - 0.1736 = 0.4017$$

و منه احتمال أن تكون كمية الأمطار التي تسقط خلال شهر ديسمبر التالي بين 25 إلى 40 مليمتر هو:

$$p(25 < X < 40) = 0.4017$$

4.2.4 تقريب توزيع ثنائي الحد إلى التوزيع الطبيعي

إذا كان عدد عناصر العينة كبيرا و لم تكن أيا من p و q قريبة من الصفر فإنه يمكننا تقريب توزيع ثنائي الحد إلى التوزيع الطبيعي.

مبرهنة:

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع توزيع ثنائي الحد بمتوسط $\mu = np$ و بتشتت $\sigma^2 = npq$ ، فإنه يكون توزيع المتغير $Z = \frac{X-np}{\sqrt{npq}}$ يتبع التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ عندما تؤول n إلى اللانهاية.

ملاحظة1:

يكون تقريب توزيع ثنائي الحد إلى توزيع طبيعي جيدا إذا كانت قيمة n كبيرة و كل من np و nq أكبر أو يساوي 5.

و لإجراء هذا التقريب نحتاج إلى ما يسمى بتصحيح الاستمرار Correction for Continuity لتحسين التقريب. و هو كالآتي:

في حالة استخدام التوزيع المستمر كتقريب للتوزيع المتقطع فإنه من أجل كل قيمة عددية صحيحة x من قيم المتغير العشوائي المتقطع يناظرها الفترة $(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$ أي أن:

(في حالة التوزيع المتقطع) $P(X = x) \approx P(x - \frac{1}{2} \leq X \leq x + \frac{1}{2})$ (في حالة التوزيع المستمر)

و على ذلك فإن:

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) \approx P(a - \frac{1}{2} \leq X \leq b + \frac{1}{2})}$$

مثال 1: ليكن X متغير عشوائي حيث: $X \sim B(30; 0.4)$.

- احسب $P(7 \leq X \leq 18)$.

الحل:

حساب $P(7 \leq X \leq 18)$:

لدينا $n = 30$ ، $np = 30 \times 0.4 = 12 > 5$ و $nq = 30 \times 0.6 = 18 > 5$ و منه يمكن تقريب توزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي أي: $X \sim N(\mu; \sigma^2) = N(np; npq) = N(12; 7.2)$ و عليه:

$$P(7 \leq X \leq 18) \approx P(6.5 \leq X \leq 18.5) = P\left(\frac{6.5-12}{2.68} \leq Z \leq \frac{18.5-12}{2.68}\right)$$
$$= P(-2.05 \leq Z \leq 3.43) = 0.9925 - 0.0202 = 0.9723$$

مثال 2:

إذا كان احتمال تعافي المصابين بفيروس كورونا (Covid 19) في قسم العناية المركزة هو 0.6، فما هو احتمال أن يتماثل أكثر من نصف عدد المرضى إلى الشفاء من بين 100 مريض؟

حل:

ليكن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الحالات المتماثلة للشفاء، و هو يتبع توزيع ذي الحدين أي: $X \sim B(100; 0.6)$

لدينا $n = 100$ ، $np = 100 \times 0.6 = 60 > 5$ و $nq = 100 \times 0.4 = 40 > 5$ و منه يمكن تقريب توزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي أي: $X \sim N(\mu; \sigma^2) = N(np; npq) = N(60; 24)$ و عليه:

$$P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50) \approx 1 - P\left(Z \leq \frac{50.5 - 60}{4.9}\right)$$
$$= 1 - P(Z \leq -1.94) = 1 - 0.0262 = 0.9738$$

5.2.4 تقريب توزيع بواسون بالتوزيع الطبيعي

إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بمعلمة λ و كانت λ كبيرة فإن: $Z = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ يتبع توزيع طبيعي قياسي.

ملاحظة: عمليا نعتبر λ كبيرة إذا كانت أكبر أو تساوي 20.

مثال: إذا كان X يتبع توزيع بواسون بمعلمة 40 فاحسب $P(38 \leq X \leq 40)$ بالضبط و بالتقريب.

الحل:

لدينا $X \sim Poi(\lambda)$ و دالة كثافته هي:

$$f(x) = \frac{e^{-40}40^x}{x!},\ x = 0,1,2, \ldots$$

و منه القيمة المضبوطة لهذا الاحتمال هي:

$$P(38 \leq X \leq 40) = f(38) + f(39) + f(40) = 0.0614 + 0.0629 + 0.0629 = \mathbf{0.1872}$$

بما أن $\lambda = 40 > 20$ يمكن تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي $X \sim N(\mu; \sigma^2) = N(\lambda; \lambda) = N(40; 40)$، و باستخدام تصحيح الاستمرار نجد:

$$P(38 \leq X \leq 40) \approx P(37.5 \leq X \leq 40.5) = P\left(\frac{37.5-40}{\sqrt{40}} \leq Z \leq \frac{40.5-40}{\sqrt{40}}\right)$$
$$= P(-0.40 \leq Z \leq 0.08) \approx 0.5319 - 0.3446 = \mathbf{0.1873}$$

تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

وجد فى إنتاج أحد المصانع أنه من بين 1000 وحدة إنتاج يوجد 150 وحدة معيبة. أخذت عينة بإرجاع مكونة من 5 وحدات، أوجد الاحتمالات التالية:

1 -الوحدات المختارة كلها سليمة.

2 -على الأكثر توجد واحدة معيبة.

3 -على الأقل توجد وحدتان معيبتان.

التمرين الثاني:

إذا كان متوسط عدد الزلازل السنوية في حدى الدول هو 0.6 فأوجد التوزيع الاحتمالي لعدد الزلازل ثم احسب:

1. الاحتمالات المختلفة.
2. دالة التوزيع التراكمية.

التمرين الثالث:

إذا كانت X تتبع توزيع بواسون و كانت: $P(X=1)=2P(X=0)$ فاحسب $P(X=4)$.

التمرين الرابع:

1) إذا كانت X تتبع توزيع ذي الحدين بمعالم P=0.1 ، n=20. فاحسب $P(X=3)$ باستخدام توزيع ذي الحدين ثم بتوزيع بواسون.

2) نفس السؤال من أجل P=0.05. ماذا تلاحظ؟

التمرين الخامس:(كيفية استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري)

إذا كان المتغير Z يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري $N(0;1)$، احسب الاحتمالات التالية:

-1 $P(Z \leq -1.25)$

-2 $P(Z > 1.25)$

-3 $P(Z > 1)$

-4 $P(0.46 < Z < 1.75)$

-5 $P(-1 < Z < 1.5)$

التمرين السادس:

بفرض أن X له التوزيع $N(10,4)$ فأوجد :

1. $P(-3 < X < 12)$ 2. $P(|X| \leq 5)$

التمرين السابع:

إذا كانت $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فاحسب: $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$

التمرين الثامن:

1) إذا علمت أن درجات طلاب جامعة تتبع توزيعا طبيعيا، و كان 10% منهم راسبون و 5% حاصلون على تقدير ممتاز.

- احسب متوسط درجات الطلاب و الانحراف المعياري لها (علما أن الرسوب أقل من 60 درجة و الامتياز 90 درجة فأكثر).

2) نفرض أن أطوال الطلاب تتبع أيضا توزيعا طبيعيا وسطه 168 سم و انحرافه المعياري 6 سم. اخترنا عشوائيا أحد الطلبة فما احتمال أن يكون طوله.

أ) أكبر من 184 سم.

ب) أقل من 156 سم.

ج) ينحصر بين 165 و 174 سم.

مسألة:

تفشى مرض معدي في مدينة ما، احتمال أن يتعافى مريض من هذا المرض هو 0.4.

الجزء الأول:

أصيب 100 شخص بهذا المرض، ما هو احتمال أن يبقى أقل من 30 شخص على قيد الحياة.

الجزء الثاني:

بعد توعية المواطنين بالإجراءات الوقائية انخفض عدد المصابين إلى 15 شخص.

1) ما هو احتمال:

أ. 5 أشخاص يبقون على قيد الحياة.

ب. 10 أشخاص على الأقل يبقون على قيد الحياة.

2) أوجد التوقع الرياضي و التشتت، ثم استخدم متباينة تشيبيشيف لتبين أن نسبة انحصار عدد المتعافين بين 3 و 9 أشخاص تساوي على الأقل 60%. (أي أن $P(3 < X < 9) \geq 0.6$)

الفصل الخامس : الثنائية العشوائية

سنتناول في هذا الفصل:

1) قانون الاحتمال.
2) القوانين الهامشية، استقلال المتغيرات العشوائية.
3) التغاير و معامل الارتباط.

5 الفصل الخامس: الثنائية العشوائية

في كثير من الحالات نحتاج إلى استخدام أكثر من متغير عشوائي مثلا عندما نلقي حجري نرد في نفس الوقت يمكن أن نرمز لجداء رقمي الوجهين الظاهرين بـ X، و نرمز للقيمة العظمى لهذين الرقمين بـ Y، فمجموعة نتائج هذه التجربة يمكن أن ندل عليها بواسطة الثنائيات (X,Y).

تعريف: نسمي زوج عشوائي، الزوج (X,Y) للمتغيرات العشوائية المعرفة في نفس فضاء الاحتمال $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ، الزوج (X,Y) يدعى كذلك بالشعاع العشوائي.

1.5 التابع التوزيعي المشترك

تعريف: ليكن (X,Y) زوج لمتغير عشوائي، نسمي الدالة التوزيعية المشتركة لـ (X,Y)، و نرمز لها بـ F_{XY}، الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

التابع التوزيعي الهامشي :

يمكننا استنتاج التابع التوزيعي لـ X بالنسبة للتابع التوزيعي المشترك F_{XY} كما يلي:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \leq +\infty) \\ &= P\left(\lim_{y\to\infty} \{X \leq x, Y \leq y\}\right) \\ &= \lim_{y\to\infty} P(\{X \leq x, Y \leq y\}) \\ &= \lim_{y\to\infty} F_{XY}(x, y) = F(x, +\infty) \end{aligned}$$

بطريقة مماثلة التابع التوزيعي لـ Y :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X \leq \infty, Y \leq y) \\ &= P(\lim_{x\to\infty} \{X \leq x, Y \leq y\}) \\ &= \lim_{x\to\infty} P(\{X \leq x, Y \leq y\}) \\ &= \lim_{x\to\infty} F_{XY}(x, y) = F(+\infty, y) \end{aligned}$$

التوابع F_X و F_Y يطلق عليها بالتابع التوزيعي الهامشي لـ X وY .

خصائص التابع التوزيعي المشترك :

1. $P(X > x, Y > y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{XY}(x, y)$
2. $P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$

2.5 المتغيرات العشوائية المتقطعة

قانون الثنائية (أو الزوج) :

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين حقيقيين قانونا احتمالهما معرفان كما يلي:

$$P(X = x_i) = P_i \quad , \quad \forall i \in I$$

$$P(Y = y_j) = P_j \quad , \quad \forall j \in J$$

حيث I و J مجموعتان منتهيتان أو قابلتان للعد.

تعريف: نقول أن الزوج العشوائي (X,Y) متقطع إذا كانت مجموع القيم التي يأخذها مجموعة منتهية أو قابلة للعد.

تعريف: يعرف القانون المشترك للزوج (X,Y) بالمجموعة $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ حيث:

$$X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{(x_i, y_j) : i \in I, j \in J\}$$

المتتالية الثنائية P_{ij} للأعداد الحقيقية حيث:

$$\forall i \in I, \forall j \in J \qquad P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$\begin{cases} \forall i \in I, \forall j \in J, \quad P_{ij} \geq 0 \\ \sum_{(i,j)\in I\times J} P_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} P_{ij} = 1 \end{cases}$$

القوانين الهامشية:

نهتم فقط بإحدى المركبتين، و نكتب:

$$\begin{cases} \forall i \in I, \qquad P_{i.} = \sum_{j\in J} P_{ij} = P(X = x_i) \\ \forall j \in J, \qquad P_{.j} = \sum_{i\in I} P_{ij} = P(Y = y_j) \end{cases}$$

المجموعة $\{(x_i, P_{i.}) , i \in I\}$ تعرف بالقانون X و تدعى بالقانون الهامشي لـ X.

المجموعة $\{(y_j, P_{.j}) , j \in J\}$ تعرف بالقانون Y و تدعى بالقانون الهامشي لـ Y.

و يمكن عرض قانون الثنائية في شكل جدول كما يلي:

الجدول رقم (2.2): قانون الثنائية

x \ y	y_1	y_2	...	y_j	...	المجموع
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	...	$f(x_1, y_j)$	...	$\sum_{j\in J} f(x_1, y_j)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	...	$f(x_2, y_j)$	...	$\sum_{j\in J} f(x_2, y_j)$
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
x_i	$f(x_i, y_1)$	$f(x_i, y_2)$	...	$f(x_i, y_j)$	...	$\sum_{j\in J} f(x_i, y_j)$
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
المجموع	$\sum_{i\in I} f(x_i, y_1)$	$\sum_{i\in I} f(x_i, y_2)$	...	$\sum_{i\in I} f(x_i, y_j)$	...	1

مثال: ليكن X و Y متغيران عشوائيان لهما جدول التوزيع المشترك التالي:

x \ y	2	4	6	المجموع
1	0.05	0.2	0.05	0.3
2	0.3	0.3	0.1	0.7

المجموع	0.35	0.5	0.15	1

التوزيع الهامشي لـ X

$$L(X) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

التوزيع الهامشي لـ Y

$$L(Y) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ 0.35 & 0.5 & 0.15 \end{pmatrix}$$

القوانين الشرطية:

إذا كان X و Y متغيران عشوائيان لهما توزيع مشترك، فإن القوانين الشرطية لـ X بالنسبة لـ Y و Y بالنسبة لـ X معرفة كما يلي:

$$P\left[(X = x_i)\backslash\left(Y = y_j\right)\right] = \frac{P\left[(X=x_i),(Y=y_j)\right]}{P\left(Y=y_j\right)} = \frac{P\left(x_i,y_j\right)}{P_Y\left(y_j\right)}\ , P\left(Y = y_j\right) \neq 0$$

$$P\left[\left(Y = y_j\right)\backslash(X = x_i)\right] = \frac{P\left[(X=x_i),(Y=y_j)\right]}{P(X=x_i)} = \frac{P\left(x_i,y_j\right)}{P_X(x_i)}\ , P(X = x_i) \neq 0$$

مثال: بالعودة للمثال السابق لدينا:

$$P[(Y = y_1)\backslash(X = x_2)] = \frac{P[(X=x_2)\cap(Y=y_1)]}{P(X=x_2)} = \frac{0.3}{0.7} \approx 0.43$$

استقلالية المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة):

تعريف:

نقول عن متغيرين عشوائيين X و Y أنهما مستقلين إذا كان:

1. $P\left[(X = x_i)\backslash\left(Y = y_j\right)\right] = P(X = x_i)$ أو
2. $P\left[\left(Y = y_j\right)\backslash(X = x_i)\right] = P\left(Y = y_j\right)$ أو
3. $P\left[(X = x_i) \cap \left(Y = y_j\right)\right] = P(X = x_i).P\left(Y = y_j\right)$

مثال:

بالعودة للمثال السابق لدينا:

$$L(Y) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ 0.35 & 0.5 & 0.15 \end{pmatrix},$$

$$L\left(Y\backslash(X = x_1)\right) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ 0.05/0.3 & 0.2/0.3 & 0.05/0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$$P(Y = y_1) = 0.35 \neq P[(Y = y_1)\backslash(X = x_1)] = 1/6$$

3.5 المتغيرات العشوائية المستمرة

القوانين الهامشية :

قضية: إذا كانت (X, Y) ثنائية لمتغيرات عشوائية بكثافة مشتركة $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ ، فإن لكل من المتغيرين العشوائيين X و Y كثافة نرمز لها على التوالي f_X و f_Y تعطى بـ:

$$f_Y(y) = \int_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)dx \quad , \quad f_X(x) = \int_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)dy$$

القوانين الشرطية :

تعريف: إذا كان X و Y متغيران عشوائيان لهما توزيع مشترك، فإن القوانين الشرطية لـ X بالنسبة لـ Y و Y بالنسبة لـ X معرفة كما يلي:

تابع كثافة الاحتمال الشرطي للمتغير X هو:

$$f(X\backslash Y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}$$

تابع كثافة الاحتمال الشرطي للمتغير Y هو:

$$f(Y\backslash X)=\frac{f(x,y)}{f(x)}$$

استقلالية المتغيرات العشوائية المستمرة:

تعريف: نقول عن متغيرين عشوائيين X و Y كثافتاهما على التوالي f و g أنهما مستقلين، إذا و فقط إذا كان قانون الاحتمال للزوج (X,Y) يقبل كثافة، هذه الكثافة تكون وفقا للتابع الآتي:

$$(X,Y)\mapsto f(x)g(y)$$

مثال:

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين و ليكن التابع f حيث:

$$f(x,y)=\begin{cases}cxy & ;0<x<3\,,1<y<2\\ 0 & ;\qquad \text{غير ذلك}\end{cases}$$

1. جد الثابت C بحيث يكون $f(x,y)$ تابع الكثافة المشتركة للمتغيرين العشوائيين X و Y.
2. جد تابع كثافة الاحتمال الهامشية للمتغيرين العشوائيين X و Y.
3. جد تابع كثافة الاحتمال الشرطي للمتغيرين العشوائيين X و Y.

ماذا تستنتج؟

الحل:

لكي يكون $f(x,y)$ تابع الكثافة المشتركة للمتغيرين العشوائيين X و Y يجب أن يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$$

لدينا:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=c\int_0^3\left[\int_1^2 xy\,dy\right]dx=c\int_0^3\left[\frac{xy^2}{2}\right]_1^2dx$$

$$=\frac{c}{2}\int_0^3(4x-x)\,dx=\frac{3c}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\frac{27c}{4}=1$$

و منه نجد: $\boxed{c=\frac{4}{27}}$

2) تابع كثافة الاحتمال الهامشي للمتغير X:

$$f_X(x)=\int_{y\in\mathbb{R}}f(x,y)dy=\int_1^2\frac{4}{27}xydy=\frac{2}{9}x$$

تابع كثافة الاحتمال الهامشي للمتغير Y:

$$f_Y(y)=\int_{x\in\mathbb{R}}f(x,y)dy=\int_0^3\frac{4}{27}xydx=\frac{2}{3}y$$

3) تابع كثافة الاحتمال الشرطي للمتغير x:

$$f(x\backslash y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{\frac{4}{27}xy}{\frac{2}{3}y}=\frac{2}{9}x$$

تابع كثافة الاحتمال الشرطي للمتغير y:

$$f(y\backslash x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\frac{\frac{4}{27}xy}{\frac{2}{9}x}=\frac{2}{3}y$$

نستنتج أن x و y مستقلان لأن $f(x,y)=f(x).f(y)$

4.5 التوقع للدوال ذات المتغيرين العشوائيين

في هذه الحالة نقوم بتوسيع مفهوم التوقع ليشمل التوقع للمتغيرين العشوائيين، نذكر أولا أن التوقع الرياضي لـ X هو العدد $E(X)$ و عادة نرمز له بـ μ، و المعرف بـ:

إذا كان X متغير عشوائي متقطع (منتهي) فإن:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\,P(X=x_i).$$

إذا كان X متغير عشوائي مستمر فإن:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx.$$

نظرية:

إذا كان (X,Y) متغير عشوائي ثنائي له دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة $f(x,y)$، فإن توقع الدالة $U=u(X,Y)$ يعطى بالصيغة الآتية:

$$E(U)=E[u(X,Y)]=\sum_{(x,y)\in R_{X,Y}}\sum\ u(x,y)P(x,y)$$

في حالة المتغير العشوائي المتقطع.

أما في حالة المتغير العشوائي المستمر فيعطى بالصيغة الآتية:

$$E(U)=E[u(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y)f(x,y)dxdy$$

مثال: ليكن X و Y متغيران عشوائيان لهما جدول التوزيع المشترك التالي:

x \ y	2	3	4	المجموع
1	0.1	0.1	0.2	0.4
2	0.3	0.2	0.1	0.6
المجموع	0.4	0.3	0.3	1

المطلوب: احسب ما يلي: $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$, $E(X+Y)$

الحل:

y_j	2	3	4	المجموع
$P(y_j)$	0.4	0.3	0.3	1

x_i	1	2	المجموع
$P(x_i)$	0.4	0.6	1

$E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i\, P(x_i) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.6 = 1.6$
$E(Y) = \sum_{j=1}^{3} y_j\, P(y_j) = 2 \times 0.4 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.3 = 2{,}9$
$E(X+Y) = \sum_i \sum_j (x+y)P(x,y) = (1+2).\,0.1 + (1+3).\,0.1 + \cdots + (2+4).\,0.1 = 4.5$
$E(XY) = \sum_i \sum_j (x_i y_j) P(x_i, y_i) = 2 \times 0.1 + 3 \times 0.1 + \cdots + 8 \times 0.1 = 4.5$

مثال 2: ليكن $f(x,y)$ تابع كثافة مشتركة لمتغيرين عشوائيين X و Yحيث:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{9}{992} x^2 y^2 \,; & 0 < x < 2; 1 < y < 5 \\ 0 & \text{غير ذلك} \,; \end{cases}$$

المطلوب: حساب كل من $E(3X+2Y)$, $E(XY)$, $E(Y)$, $E(X)$

الحل:

$\mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y) dxdy = \int_1^2 \int_1^5 \frac{9}{992} x^3 y^2\, dxdy = 1.5$
$\mathrm{E(Y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y) dxdy = \int_1^2 \int_1^5 \frac{9}{992} x^2 y^3\, dxdy = 3.77$
$\mathrm{E(XY)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x,y) dxdy = \int_1^2 \int_1^5 \frac{9}{992} x^3 y^3\, dxdy = 5.66$
$\mathrm{E(3X+2Y)} = \int_1^2 \int_1^5 \frac{9}{992} (3x^3y^2 + 2x^2y^3)\, dxdy = 12.04$

نظرية:

ليكن (X,Y) متغير عشوائي ثنائي له دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة $f(x,y)$، و $U = a_1X + a_2Y$ فإن U هو:

$$E(U) = a_1E(X) + a_2E(Y)$$

البرهان:

$$\begin{aligned} E(U) = E(a_1X + a_2Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (a_1x + a_2y) f(x,y) dxdy \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dydx + a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dxdy \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) + a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y) \end{aligned}$$

حيث $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = f(x)$ و $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = f_2(y)$ هما الدوال الهامشية للمتغيرين العشوائيين X و Y. و بما أن $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) = E(X)$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(y) = E(Y)$ فإن:

$$E(U) = a_1E(X) + a_2E(Y)$$

مثال:

في المثال السابق وجدنا $\mathrm{E(X)}=1.5$ و $\mathrm{E(Y)}=3.77$ و منه:

$$E(3X+2Y) = 3E(X) + 2E(Y) = 3 \times 1.5 + 2 \times 3{,}77 = 12.04$$

نظرية:

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين لهما دالة التوزيع المشتركة $f(x,y)$. إذا كان X و Y مستقلين فإن:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

البرهان:

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين فإن:

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x)f(y)dxdy$$
$$=\left[\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy\right]=E(X)E(Y)$$

بنفس الطريقة نبرهن عن العلاقة في حالة X و Y متغيرين عشوائيين متقطعين.

5.5 التباين المشترك (التغاير) بين متغيرين عشوائيين

نذكر أولا بمبرهنة كوينيغ-هيوغنس الخاصة بعلاقة حساب تباين متغير عشوائي X.

مبرهنة: كوينيغ-هيوغنس (Koening-Huyghens)

تباين متغير عشوائي يمكن حسابه بالعلاقة التالية:

$$V(X)=E(X^2)-\mu^2$$

تعريف:

ليكن لدينا متغيرين عشوائيين معرفين على نفس الفضاء الاحتمالي، نسمي التباين المشترك (التغاير) بين X و Y العدد Cov(X,Y)، و يعرف وفقا للعلاقة التالية:

$$Cov(X,Y)=E\left[(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right]$$

حيث μ_x يرمز لتوقع X، μ_y يرمز لتوقع Y.

قضية:

يمكن كتابة علاقة التباين المشترك السابقة كما يلي:

$$Cov(X,Y)=E(XY)-\mu_x\mu_y$$

البرهان:

$$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=E\left[(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right]\\&=E\left[XY-\mu_xY-\mu_yX+\mu_x\mu_y\right]\\&=E(XY)-\mu_xE(Y)-\mu_yE(X)+\mu_x\mu_y\\&=E(XY)-\mu_x\mu_y-\mu_y\mu_x+\mu_x\mu_y\\&=E(XY)-\mu_x\mu_y\end{aligned}$$

خواص التباين المشترك:

1) إذا كان $X=Y$ فإن $Cov(X,Y)=V(X)$

2) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$ ، و هذا مايسمى بالتماثل.

3) $Cov(aX+b,cY+d)=ac.Cov(X,Y)$

6.5 الارتباط بين متغيرين عشوائيين

تعريف:

معامل الارتباط بين متغيرين عشوائيين X و Y هو العدد الحقيقي:

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov\ (X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

حيث V(X) و V(Y) غير معدومين.

ملاحظة: $\rho(X,Y) \in [-1,1]$

مثال:

صندوق به 5 بطاقات عليها أرقام، حيث أن بطاقتين تحملان الرقم 2، و بطاقتين تحملان الرقم 4، و البطاقة المتبقية تحمل الرقم 6.

نسحب بدون إرجاع بطاقتين من الصندوق، ليكن X و Y متغيرين عشوائيين حيث:

X: يدل على مجموع الرقمين المسحوبين.

Y: يدل على أكبر الرقمين المسحوبين.

1) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي لـ X و Y.

2) اوجد معامل الارتباط.

الحل:

لدينا فضاء العينة يتكون من $C_5^2 = 10$ أحداث، و هي:

$$\{(2,2),(2,4),(2.4),(2,6),(2,4),(2,4),(2,6),(4,4),(4,6),(4,6)\}$$

و قيم X هي $\{4,6,8,10\}$، أما قيم Y فهي $\{2,4,6\}$، و عليه فإن جدول التوزيع المشترك يكون كالآتي:

X \ Y	2	4	6	المجموع M(X)
4	0.1	0	0	0.1
6	0	0.4	0	0.4
8	0	0.1	0.2	0.3
10	0	0	0.2	0.2
المجموع M(Y)	0.1	0.5	0.4	1

بالنسبة لطريقة ملأ الجدول فمثلا لإيجاد $f(8,6)$ أي احتمال $P[(X=8),(Y=6)]$ و هو احتمال مجموع العددين 8 و القيمة العظمى 6، فلدينا إذن حدثين من بين 10 أحداث أي: $f(8,6) = \frac{2}{10} = 0.2$.

2) حساب معامل الارتباط:

$$E(X) = \sum_x xf(x_i) = 4 \times 0.1 + 6 \times 0.4 + 8 \times 0.3 + 10 \times 0.2 = 7.2$$
$$\mathrm{E(Y)} = \sum_y yf(y_i) = 2 \times 0.1 + 4 \times 0.5 + 6 \times 0.4 = 4.6$$
$$E(XY) = \sum_i \sum_j (x_i y_i) f(x_i, y_i) = 8 \times 0.1 + 24 \times 0.4 + 32 \times 0.1 + 48 \times 0.2 + 60 \times 0.2 = 35.2$$
$$E(X^2) = \sum_x x^2 f(x_i) = 16 \times 0.1 + 36 \times 0.4 + 64 \times 0.3 + 100 \times 0.2 = 55.2$$
$$\mathrm{E(Y^2)} = \sum_y y^2 f(y_i) = 4 \times 0.1 + 16 \times 0.5 + 36 \times 0.4 = 22.8$$
$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 35.2 - 7.2 \times 4.6 = 2.08$$
$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 55.2 - (7.2)^2 = 3.36$$
$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 22.8 - (4.6)^2 = 1.64$$

و منه معامل الارتباط هو:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov\ (X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{2.08}{\sqrt{3.36 \times 1.64}} = 0.88$$

7.5 تمارين مقترحة

تمرين 1: يعطى جدول التوزيع المشترك للمتغيرين العشوائيين X و Y:

X \ Y	2	3	4	$L(x)$
1	0.1	0.1	0.2	0.4
2	0.3	0.2	0.1	0.6
L(y)	0.4	0.3	0.3	1

1. جد التوزيع الاحتمالي الهامشي للمتغيرين العشوائيين X و Y؟
2. جد التوزيع الاحتمالي الشرطي للمتغيرين العشوائيين X و Y؟
3. هل المتغيرين X و Y مستقلين؟

تمرين 2:

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين و ليكن التابع f حيث:

$$f(x,y)=\begin{cases} cx^2y^2 & ;0<x<2\ ;\ 2<y<3 \\ 0 & ;\qquad \text{غير ذلك} \end{cases}$$

1. جد الثابت C بحيث يكون $f(x,y)$ تابع الكثافة المشتركة للمتغيرين العشوائيين X و Y.
2. جد احتمال $P(X=1,Y=2)$.
3. جد تابع كثافة الاحتمال الهامشية للمتغيرين العشوائيين X و Y.
4. جد تابع كثافة الاحتمال الشرطي للمتغيرين العشوائيين X و Y.
5. هل المتغيرين X و Y مستقلين؟
6. جد $P(X\geq 1,Y\leq 3)$.

تمرين 3:

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين و كان:

$$Cov(X,Y)=8,\quad V(Y)=9,\quad V(X)=16$$

أوجد: $V(X-Y), V(X+Y), V(3X-2Y), Cov\,(3X,2Y)$

المراجع

1. جبار عبد مضحي، **مقدمة في نظرية الاحتمالات**، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر و التوزيع، عمان 2011م
2. جلال مصطفى الصياد، **نظرية الاحتمالات**، الطبعة السادسة، دار حافظ للنشر و التوزيع، جدة 2008م
3. حاكم قصد علي سهام ، **الاحتمالات و الإحصاء**، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة البشير البراهيمي، 2008/2007م
4. خالد أحمد فرحان المشهداني ورائد عبد الخالق عبد االله العبيدي: **مبادئ الإحصاء** ، دار الأيام، الأردن، 2013
5. رامز قدسية ، **الاحتمالات و الإحصاء**، الجامعة الافتراضية السورية 2018م
6. صبحي أبو صالح وعدنان محمد عوض، **مقدمة في الإحصاء**، مركز الكتب الأردني، الأردن، 1997
7. علي عبد السلام العماري و العجيلي علي حسين: **الإحصاء والاحتمالات النظرية والتطبيق**، منشورات 2000. ،مالطا، ELGA
8. محمد بداوي ، **الاحصاء و الاحتمالات 1**، مطبوعة في مقياس ر314، المدرسة العليا للأساتذة الأغواط، 2018/2017م
9. محمد راتول، **الإحصاء الوصفي**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثانية 2006.
10. مصطفى يوسف كافي وآخرون، **الإحصاء في الإدارة والاقتصاد**، مكتبة المجتمع العربي، الأردن، الطبعة الأولى 2012م.

الملاحق

1) قائمة ولايات الجزائر حسب المساحة قبل التقسيم الإداري الجديد للجزائر (ترقية 10 ولايات منتدبة إلى ولايات كاملة بقرار مجلس الوزراء في 26 نوفبر 2019م).

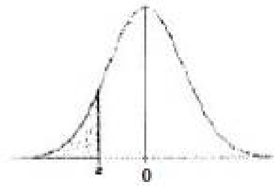
قائمة ولايات الجزائر حسب المساحة

الترتيب	الاسم	المساحة	النسبة
1°	ولاية تمنراست	557,906 كم²	23.42%
2°	ولاية أدرار	427,368 كم²	17.94%
3°	ولاية إليزي	284,618 كم²	11.94%
4°	ولاية ورقلة	211,980 كم²	8.90%
5°	ولاية بشار	162,200 كم²	6.81%
6°	ولاية تيندوف	159,000 كم²	6.68%
7°	ولاية غرداية	86,105 كم²	3.61%
8°	ولاية البيض	78,870 كم²	3.31%
9°	ولاية الجلفة	66,415 كم²	2.79%
10°	ولاية الوادي	54,573 كم²	2.29%
11°	ولاية النعامة	29,950 كم²	1.26%
12°	ولاية الأغواط	25,057 كم²	1.05%
13°	ولاية بسكرة	21,509.8 كم²	0.90%
14°	ولاية تيارت	20,673 كم²	0.87%
15°	ولاية المسيلة	18,718 كم²	0.79%
16°	ولاية تبسة	14,227 كم²	0.60%
17°	ولاية باتنة	12,192 كم²	0.51%
18°	ولاية خنشلة	9,811 كم²	0.41%

قائمة ولايات الجزائر حسب المساحة

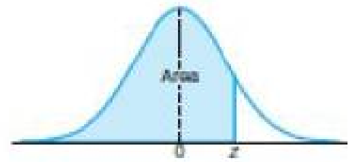
الترتيب	الاسم	المساحة	النسبة
19°	ولاية ميلة	9,375 كم²	0.39%
20°	ولاية سيدي بلعباس	9,150 كم²	0.38%
21°	ولاية تلمسان	9,061 كم²	0.38%
22°	ولاية المدية	8,866 كم²	0.37%
23°	ولاية أم البواقي	7,638 كم²	0.32%
24°	ولاية سعيدة	6,764 كم²	0.28%
25°	ولاية سطيف	6,504 كم²	0.27%
26°	ولاية معسكر	5,941 كم²	0.24%
27°	ولاية عين الدفلى	4,897 كم²	0.21%
28°	ولاية غليزان	4,870 كم²	0.20%
29°	ولاية الشلف	4,791 كم²	0.20%
30°	ولاية سوق أهراس	4,541 كم²	0.19%
31°	ولاية البويرة	4,439 كم²	0.19%
32°	ولاية برج بوعريريج	4,115 كم²	0.17%
33°	ولاية قالمة	4,101 كم²	0.17%
34°	ولاية سكيكدة	4,026 كم²	0.17%
35°	ولاية الطارف	3,339 كم²	0.14%
36°	ولاية بجاية	3,268 كم²	0.14%
37°	ولاية تيسمسيلت	3,152 كم²	0.13%
38°	ولاية تيزي وزو	2,958 كم²	0.12%
39°	ولاية جيجل	2,577 كم²	0.11%
40°	ولاية عين تموشنت	2,379 كم²	0.11%
41°	ولاية قسنطينة	2,187 كم²	0.09%
42°	ولاية مستغانم	2,175 كم²	0.09%
43°	ولاية تيبازة	2,166 كم²	0.09%
44°	ولاية وهران	2,121 كم²	0.09%
45°	ولاية بومرداس	1,591 كم²	0.07%
46°	ولاية البليدة	1,478 كم²	0.06%
47°	ولاية عنابة	1,439 كم²	0.06%
48°	ولاية الجزائر	809 كم²	0.03%
	المجموع	2,381,741 كم²	100%

2) جدول التوزيع الطبيعي المعياري:



Standard Normal DistributionTable

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641



Standard Normal Distribution Table

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998