الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ecole Normale Supérieure
Bou-Saada
Dép. Sciences Exactes

المدرسة العليا للأساتذة – بوسعادة
المجاهد الفريق أحمد قايد صالح
قسم: العلوم الدقيقة

Théorie de la Mesure

Cours et exercices corrigés

Mesure signée, théorème de Radon-Nikodym et mesure de Radon

Auteur du polycopié: Dahia Elhadj

2020-2021

Table des matières

0.1 Introduction

Le présent polycopié reprend un cours de première année Master académique filière Mathématiques de spécialité Analyse Fonctionnelle donné à l'Université de Mohamed Boudiaf-M'sila pendant les années 2016-2018. Le but de ce cours était de présenter aux étudiants les notions de base concernant la théorie de la mesure signée, théorème de Radon-Nikodym et mesure de Radon.

Nous supposons que le lecteur a une bonne connaissance de la topologie générale, topologie usuelle de $\mathbb{R}$ et les premiers principes de la théorie de la mesure positive.

Comme ce polycopié est un cours, nous avons pris le parti de démontrer presque tous les résultats de façon complète, c'est-à-dire sans renvoyer au cours de la preuve à un résultat bien connu ou en admettant un résultat auxiliaire difficile. Les chapitres de ce polycopié ce terminent par un nombre considérable d'exercices tels qu'ils ont été testés dans le cadre de travaux dirigés, ou ont fait l'objet de devoirs de réflexion ou de contrôle des connaissances. Des solutions détaillées pour ces exercices se trouvent dans la fin de la polycopié. Il va de soi que le lecteur aura intérêt à essayer de résoudre le problème sans lire la solution au préalable.
L'originalité de ce polycopié réside dans son contenu, inspiré sans vergogne de la littérature existante.

Venons-en à une description plus précise de ce que l'on trouvera dans ce polycopié.
Dans le premier chapitre, nous donnerons les propriétés utiles concernant la topologie générale, la théorie de la mesure positive. Nous offrirons une étude concernant la mesure positive régulière.
Nous donnerons, dans le second chapitre, les propriétés générales de la mesure signée notamment la décomposition d'une mesure signée.
Dans le troisième chapitre, nous aborderons et traiterons les théorèmes de Radon-Nikodym et quelques applications.
Nous consacrons dans le quatrième chapitre à l'étude de la mesure Radon notamment le

dual de l'espace $C(K)$.

On termine ce polycopié par le chapitre 5, nous donnerons les solutions détaillée des exercices proposés dans les chapitres précedents.

Comme toute entreprise humaine n'est infaillible, nous tenons, à la fin de cette petite introduction, à solliciter la haute bienveillance de nos lecteurs de nous faire parvenir toutes leurs remarques via notre adresse E-mail : hajdahia@gmail.com

Chapitre 1

Préliminaires topologiques et de théorie de la mesure positive

1.1 Préliminaires topologiques

Définitions 1.1.1

Soit X un espace topologique.

1) Ensemble fermé : *Un sous-ensemble $E \subset X$ est fermé si son complémentaire E^c est ouvert. (Ainsi, $\emptyset$ et X sont des fermés, les réunions finies de fermés sont des fermés, les intersections quelconques de fermés sont des fermés).*

2) Adhérence d'un ensemble : *L'adhérence (ou la fermeture) $\overline{E}$ d'un sous-ensemble $E \subset X$ est le plus petit ensemble fermé de X contenant E.*

3) Espace séparé : *X est un espace séparé (ou de Hausdorff) lorsque l'on a la propriété suivante : pour tout $x, y \in X$ avec $x \neq y$, il existe un voisinage U de x et un voisinage V de y tel que $U \cap V = \emptyset$.*

Tout espace métrique est un espace séparé.

4) Ensemble compact : *Un sous-ensemble $K \subset X$ est compact si tout recouvrement ouvert de K contient un sous- recouvrement fini. De façon explicite, si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de X tels que $K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$, alors il existe $J \subset I$ avec J fini et $K \subset \bigcup_{i\in J} O_i$.*

5) Espace localement compact : *X est localement compact si tout point de X possède un voisinage dont la fermeture est compacte.*

Naturellement, tout espace compact est localement compact.

Les sous-ensembles compacts dans $\mathbb{R}^n$ sont précisément les sous-ensembles bornés et fermés.

Il s'ensuit que $\mathbb{R}^n$ est un espace localement compact séparé.

Théorème 1.1.2

Soit K un sous-espace compact et F un sous-ensemble fermé d'un espace topologique X. Si $F \subset K$, F est également compact.

Corollaire 1.1.3

Si $A \subset B$ et si $\overline{B}$ est compact, il en est de même pour $\overline{A}$.

Théorème 1.1.4

Soit X un espace séparé et K un sous-espace compact de X. Soit $x \in K^c$. Il existe des ensembles ouverts U et W tels que $x \in U$, $K \subset W$ et $U \cap W = \emptyset$.

Preuve.

Si $y \in K$, comme X est séparé, il existe des ouverts disjoints U_y et V_y, de sorte que $x \in U_y$ et $y \in V_y$. Comme K est compact, il existe un nombre fini de points $y_1, ..., y_n \in K$ tels que

$$K \subset V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}.$$

Le théorème est démontré en prenant pour U et W les ouverts définis par,

$$U = U_{y_1} \cup ... \cup U_{y_n} \quad \text{et} \quad W = V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}.$$

■

Corollaire 1.1.5

(a) Les sous-ensembles compacts d'un espace séparé sont fermés.

(b) Si F est fermé et si K est un sous-ensemble compact dans un espace séparé, $F \cap K$ est alors compact.

Le corollaire (b) provient de (a) et du Théorème 1.1.2.

Définition 1.1.6

Un espace topologique séparé X est dit régulier si pour toute partie fermée F de X et pour tout point x de X tels que $x \in F$, il existe deux ouverts disjoints U et V dans X tels que $x \in U$ et $F \subset V$.

Définition 1.1.7

Un espace topologique séparé X est dit normal si pour tout fermés F, G de X, disjoints il *existe des ensembles ouverts U et W de X tels que*

$$F \subset U, \quad G \subset W \ \textit{et} \quad U \cap W = \emptyset.$$

Autrement dit, dans un tel espace, deux fermés disjoints peuvent être séparées par deux ouverts disjoints.

Proposition 1.1.8 *[10, Proposition 1.9.1]*
Soit X un espace topologique séparé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.
(i) L'espace X est régulier.
(ii) Pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage V_x de x dans X, il existe un ouvert O_x dans X tel que

$$x \in O_x \subset \overline{O_x} \subset V_x,$$

autrement dit, tout point x de X admet une base de voisinages formée d'ensembles fermés.
(iii) Pour tout $x \in X$ et pour toute partie fermée F de X tels que $x \in F$, il existe deux ouverts U et V dans X tels que

$$x \in U, \quad F \subset V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

Théorème 1.1.9 *[16, Page 37]*
Soit U un ensemble ouvert dans un espace localement compact séparé X et K, $K \subset U$, un ensemble compact. Il existe un ensemble ouvert V, dont la fermeture est compacte, tel que

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Définition 1.1.10
Soit f une fonction réelle (ou à valeurs dans la droite réelle achevée) définie sur un espace topologique X. Si l'ensemble

$$\{f > \alpha\} := f^{-1}\left(]\alpha, +\infty[\right) = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

est un sous-ensemble ouvert pour tout réel α, on dit que f est semi-continue inférieurement (s.c.i.). Si l'ensemble

$$\{f < \alpha\} := f^{-1}(]-\infty, \alpha[) = \{x \in X : f(x) < \alpha\}$$

est ouvert pour tout réel a, on dit que f est semi-continue supérieurement (s.c.s.).

Une fonction réelle est continue si et seulement si elle est simultanément semi-continue inférieurement et supérieurement.

Exemples 1.1.11
Les fonctions caractéristiques fournissent les exemples les plus simples de semi-continuité.
(a) La fonction caractéristique d'un ensemble ouvert est semi-continue inférieurement.
(b) La fonction caractéristique d'un ensemble fermé est semi-continue supérieurement.

La propriété suivante est conséquence presque immédiate des définitions.

Proposition 1.1.12 *[16, Page 38]*
1) La borne supérieure d'une famille quelconque de fonctions semi-continues inférieurement est elle-même semi-continue inférieurement.
2) La borne inférieure d'une famille quelconque de fonctions semi-continues supérieurement est elle-même semi-continue supérieurement.

L'espace $\mathbf{C_c}(\mathbf{X})$

Définition 1.1.13
Soit X un espace topologique et $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction sur X à valeurs complexes. Le support de f, noté, supp(f), est la plus petit fermé de X en dehors duquel f s'annule ; autrement dit

$$supp(f) = \overline{\{f \neq 0\}} = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

On désigne par $C_c(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X à support compat.

$$f \in C_c(X) \iff \begin{cases} f \text{ est continue} \\ \text{et} \\ supp(f) \text{ est compact dans } X. \end{cases}$$

Proposition 1.1.14

$C_c(X)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Preuve.

Soient $f, g \in C_c(X)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} \{f + g \neq 0\} \quad \subset \quad & \{|f| + |g| \neq 0\} \\ & \{|f| \neq 0\} \cup \{|g| \neq 0\}. \end{aligned}$$

Donc

$$supp(f+g) \subset supp(f) \cup supp(g),$$

il résult que $f + g \in C_c(X)$ car $f + g$ est continue. D'autre part

$$\{\alpha f \neq 0\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad \alpha = 0 \\ \{f \neq 0\} & \text{si} \quad \alpha \neq 0 \end{cases},$$

et comme αf est continue on a aussi $\alpha f \in C_c(X)$. ■

Théorème 1.1.15

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction continue. Si K est un sous-ensemble compact de X alors $f(K)$ est compact dans Y.

Preuve.

Si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille des ouverts dans Y telle que $f(K) \subset \bigcup_{i\in I} O_i$, alors on a $K \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$ et donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $K \subset \bigcup_{1\leq i\leq n} f^{-1}(O_i)$. Par suite $f(K) \subset \bigcup_{1\leq i\leq n} O_i$. ■

Corollaire 1.1.16
L'image de toute fonction $f \in C_c(X)$ *est un sous-ensemble compact de* $\mathbb{C}$*.*

Proposition 1.1.17 *[15, Page 181]* ***(Lemme d'Urysohn)***
Soit X *un espace topologique normal,* F *un ensemble fermé dans* X*,* U *un ouvert de* X *tels que* $F \subset U$*, alors il existe une fonction continue* $f : X \longrightarrow [0,1]$ *et*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in F \\ 0 & si \quad x \notin U \end{cases}.$$

Si X est un espace métrique, la démonstration est facile et la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{d(x, U^c)}{d(x, U^c) + d(x, F)},$$

répond (immédiatement) à la question.

Il y a une deuxième version du Lemme d'Urysohn dans le cas d'un espace localement compact.

Proposition 1.1.18 *[16, Page 39]* ***(Lemme d'Urysohn)***
Soit X *un espace localement compact,* U *un ouvert de* X *et* K *un compact de* X *tels que* $K \subset U$*. Alors il existe une fonction* $f \in C_c(X)$ *telle que*

$$\begin{aligned} &i)\ 0 \leq f(x) \leq 1,\ \forall x \in X \\ &ii)\ supp(f) \subset U \\ &iii) \begin{cases} f(x) = 1,\ \forall x \in K \\ f(x) = 0,\ \forall x \in U^c \end{cases} \end{aligned}$$

L'espace C(K)

On considère un espace métrique compact K. On note $C(K)$ l'espace vectoriel des fonctions continue de X dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On le munit de la norme $\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$.

Théorème 1.1.19
L'espace $C(K)$ *est un espace de Banach, c'est à dire un espace vectoriel normé complet.*

Preuve.

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$. Cela s'ignifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon, \quad \text{pour tout } n \geq n_0 \text{ et } m \geq n_0.$$

Alors, chacune des suites réelle $f_n(x)$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, est donc par complétude de $\mathbb{K}$, admet une limite, que nous allons noter $f(x)$. Il reste donc a montrer que la convergence de f_n vers f, est uniforme, ce qui impliquera que la fonction f est un élément de $C(K)$ et que $f_n \longrightarrow f$ dans $C(K)$. Pour chaque $x \in K$ fixé, on a

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{pour tout } n \geq n_0 \text{ et } m \geq n_0.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$ dans cette expression, on obtient, pour chaque x, que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

On a montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon, \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

■

Exemple 1.1.20

On considère la norme $\|\cdot\|_1$ *sur* $C([-1,1])$ *définie par*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt, \quad f \in C([-1,1]),$$

L'espace $(C([-1,1]), \|\cdot\|_1)$ *n'est pas de Banach.*

Preuve.

Soit $(f_n)_n$ une suite dans $C([-1,1])$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [-1,0] \\ nx & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 1 & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Soit la série de terme général $g_n = f_{n+1} - f_n$. On a donc

$$\|g_n\|_1 = \int_0^1 |f_{n+1}(t) - f_n(t)|\, dt = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est absolument convergente dans X car

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n(n+1)} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} < \infty.$$

Supposons que $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est convergente dans $C([-1,1])$. Dans ce cas la suite $(f_n)_n$ est convergente dans $C([-1,1])$ depuis l'égalité

$$f_n = f_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (f_{j+1} - f_j) = f_1 + \sum_{j=1}^{n-1} g_j,$$

ceci est une contradiction car pour tout $x \in [-1,1]$ on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [-1,0] \\ 1 & \text{si} \quad x \in]0,1] \end{cases} \notin C([-1,1]).$$

Finalement, $(C([-1,1]), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet. ■

Théorème 1.1.21 ***(Partition de l'unité)***

Soit $\mathcal{U}$ une famille d'ouverts qui recouvrent le compact K. Alors il existe une famille finie Φ de fonctions continues de K dans $[0,1]$ telle que chaque fonction $\phi \in \Phi$ est supportée dans l'un des ouverts de $\mathcal{U}$, et telle que

$$\textstyle\sum_{\phi \in \Phi} \phi(x) = 1, \quad \textit{pour tout } x \in K.$$

Preuve.

La compacité de K permet de se restreindre au cas où $\mathcal{U}$ est finie. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, la boule fermée de centre x et de rayon ε est continue dans l'un des ouverts $U \in \mathcal{U}$. Définissons alors, pour chacun des ouverts U de $\mathcal{U}$, la fonction continue

$$\psi_U(x) = \max\{0, d(x, U^c) - \varepsilon\}.$$

Pour tout $x \in K$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $d(x, U^c) - \varepsilon \geq 0$ et donc $\psi_U(x) > 0$. On a donc

$$\psi(x) := \sum_{\phi \in \Phi} \psi_U(x) > 0, \quad \text{pour tout } x \in K.$$

La famille de fonctions $\phi_U = \dfrac{\psi_U}{\psi}$ avec $U \in \mathcal{U}$ convient. ■

Théorème 1.1.22

L'espace $C(K)$ est séparable, c'est à dire qu'il contient une partie dénombrable et dense. Plus précisement, il existe une famille libre dénombrable $\{\psi_n, n \in \mathbb{N}\}$ de fonctions continues de K dans $[0,1]$ telle que l'espace vectoriel engendré par les fonctions ψ_n est dense.

Preuve.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on recouvre K par un nombre fini de boules de rayon $\dfrac{1}{n}$. On se donne une partition de l'unité associée à ce recouvrement. C'est une famille finie $\{\phi_i^n,\ 1 \leq i \leq N(n)\}$ de fonctions continues de K dans $[0,1]$, dont chacune est supportée dans une boule de rayon $\dfrac{1}{n}$, et telles que $\sum_i \phi_i^n = 1$. On va montrer que l'ensemble des fonctions ϕ_i^n engendre un sous-espace dense dans $C(K)$. Comme cette famille de fonctions est dénombrable, ceci implique la séparation de $C(K)$.

Considérons donc une fonction $f \in C(K)$ et une $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{lorsque} \quad d(x,y) \leq \frac{2}{n}.$$

Considérons alors la fonction

$$g(x) := \sum_{i=1}^{N(n)} f(x_i^n)\phi_i^n(x),$$

où x_i^n est le centre de la boule de rayon n dans laquelle la fonction ϕ_i^n est supportée. Cette fonction appartient a l'espace vectoriel engendré par les fonctions ϕ_i^n. Comme $\sum_{i=1}^{N(n)} \phi_i^n = 1$, on a

$$f(x) := \sum_{i=1}^{N(n)} f(x)\phi_i^n(x),$$

et donc

$$|g(x) - f(x)| = \left| \sum_{i=1}^{N(n)} \left(f(x_i^n) - f(x) \right) \phi_i^n(x) \right| \leq \sum_{i=1}^{N(n)} |f(x_i^n) - f(x)| \, \phi_i^n(x) \leq \varepsilon.$$

Pour justifier la dernière inégalité, on constate que

$$|f(x_i^n) - f(x)| \, \phi_i^n(x) \leq \varepsilon \phi_i^n(x), \quad \text{pour tout } x \in K.$$

En effet, ou bien x n'est pas dans le support de ϕ_i^n, mais alors les deux membres de l'inégalité sont nuls, ou bien x est dans le support de ϕ_i^n et $d(x, x_i^n) \leq \frac{1}{n}$, mais alors $|f(x_i^n) - f(x)| \leq \varepsilon$.

On a montré que, pour tout fonction $f \in C(K)$ et tout $\varepsilon > 0$, il exist une fonction g dans l'espace vectoriel engendré par les fonctions de la forme ϕ_i^n telle que $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$. ■

1.2 Espaces mesurés et mesures extérieurs

1.2.1 Espaces mesurés

Définition 1.2.1 *(Tribu)*

Soit X un ensemble quelconque. Une tribu (ou σ-algèbre) sur X est une famille $\mathcal{M}$ de parties de X telle que

i) $X \in \mathcal{M}$

ii) Si $A \in \mathcal{M}$ alors $A^c \in \mathcal{M}$

iii) Si $(A_n)_{n \geqslant 1} \subset \mathcal{M}$ alors $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

On dit alors que $\mathcal{M}$ est l'ensemble des parties mesurables de X. On dit aussi que $(X, \mathcal{M})$ est un espace mesurable.

Définition 1.2.2

(Tribu engendrée par une partie). Si $\mathcal{S}$ une famille de parties de X. On appelle tribu engendrée par $\mathcal{S}$ la plus petite tribu sur X qui contient $\mathcal{S}$.

Si X est un espace topologique, on appelle tribu borélienne la tribu engendrée par les ouverts, notée $\mathcal{B}(X)$.

Théorème 1.2.3 *[15](La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$)*
Sur $\mathbb{R}$, muni de sa topologie usuelle, la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par :
1) Les intervalles $]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$.
2) Les intervalles $]-\infty, b[$, $b \in \mathbb{R}$.
3) Les intervalles $]a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$.

Mesures positives

Définition 1.2.4
Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$ est une application $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ qui vérifie :
i) $\mu(\emptyset) = 0$.
ii) Si $(A_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{M}$ disjoint deux-à-deux, alors

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Remarque 1.2.5
De façon générale, pour tout $(A_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{M}$ on a

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Par ailleurs si $A \subset B$ tel que $\mu(A) < \infty$ alors $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Proposition 1.2.6
1) Si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante dans $\mathcal{M}$ alors

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \mu(A_n). \tag{1.1}$$

2) Si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante dans $\mathcal{M}$ telle que $\mu(A_1) < \infty$ alors

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \mu(A_n). \tag{1.2}$$

Proposition 1.2.7 *(lemme de Borel-Cantelli)*
Si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *est un espace mesuré et* $(A_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite de* $\mathcal{M}$ *telle que* $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, *alors* $\mu(\limsup A_n) = 0$, *où* $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Théorème 1.2.8 *(de Carathéodory)[15, Page 181]*
Il existe une unique mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *notée* λ, *telle que*

$$\lambda(]a, b[) = b - a,$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *On l'appelle la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$

Définition 1.2.9
(Mesure de Dirac) Soit X *un ensemble et* $a \in X$ *un point de* X. *Pour tout* $A \subset X$, *la mesure* δ_a *de Dirac (sur* $\mathcal{P}(X)$*) au point* a *est définie par*

$$\begin{cases} \delta_a(A) = 1, & si\ a \in A \\ \delta_a(A) = 0, & si\ a \notin A \end{cases}$$

Définition 1.2.10 *(Mesure finie et* σ*-finie)*
Soit μ *une mesure positive sur* $(X, \mathcal{M})$
1) On dit qu'une mesure positive μ *est finie si* $\mu(X) < \infty$.
2) On dira que μ *est* σ*-finie s'il existe* $(E_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{M}$ *telle que* $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ *et* $\mu(E_n) < \infty$ *pour tout* $n \geqslant 1$.

Exemples 1.2.11
1) La mesure de Direc δ_x *est finie car* $\delta_x(X) = 1 < \infty$.
2) La mesure de comptage sur X *est :*
i) finie si et seulement si X *est fini*
ii) σ*-finie si et seulement si* X *est dénombrable.*

1.2.2 Mesures extérieurs

Définition 1.2.12

Soit X un ensemble quelconque. On appelle mesure extérieure sur X une application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ possédant les propriétés suivantes

i) $\mu^*(\varnothing) = 0$

ii) si $A \subset B \subset X$ alors $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

iii) Pour toute suite $(A_n)_n$ de parties de X on a

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Remarque 1.2.13

Il est clair que toute mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$ est une mesure extérieure sur X. Mais la réceproque n'est pas vraie en générale, comme le montre l'exemple suivant

Exemple 1.2.14

Soit X un ensemble non-vide. L'application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \{0, 1\}$ définie par $\mu^*(\emptyset) = 0$ et $\mu^*(A) = 1$, si $A \neq \emptyset$ est une mesure extérieure sur X.

De plus si card$(X) > 1$, l'application μ^* n'est pas une mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

Preuve.

Soit $A, B \in \mathcal{P}(X)$ avec $A \subset B$. Si $A = \emptyset$ alors $\mu^*(A) = 0 \leq \mu^*(B)$. Si $A \neq \emptyset$ alors $B \neq \emptyset$ et donc $\mu^*(A) = 1 = \mu^*(B)$.

Soit maintenant $(A_n)_n$ une suite de parties de X. Si tous les A_n sont vides on a

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \mu^*(\emptyset) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Pour le contraire, s'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $A_j \neq \varnothing$ on a $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \neq \emptyset$ et alors

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = 1 = \mu^*(A_j) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

ce que signifie que μ^* est une mesure extérieure sur X.

Du fait que $card(X) > 1$, on peut choisir $a, b \in X$ avec $a \neq b$. On pose $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. Dans ce cas μ^* n'est pas additive car

$$\mu^*(A \cup B) = 1 \neq \mu^*(A) + \mu^*(B) = 2.$$

Alors μ^* n'est pas une mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$. ■

Définition 1.2.15

Soit X un ensemble non-vide et soit μ^* une mesure extérieure sur X.

Une partie E de X est dite μ^*-mesurable si pour tout $A \subset X$ on a

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{1.3}$$

On dit aussi que E est mesurable au sens de Carathéodory (par rapport à μ^*).

On note $\mathcal{M}(\mu^*)$ la famille des parties μ^*-mesurable de X.

Remarques 1.2.16

1) La mesurabilité de E ne fait pas intervenir $\mu^*(E)$ mais $\mu^*(A)$ où A est appelée ensemble test.

2) Pour tout $A \subset X$ on peut écrire

$$A = A \cap (E \cup E^c) = (A \cap E) \cup (A \cap E^c),$$

par la sous-additivité de la mesure extérieure (iii dans la Définition 1.2.12) on a toujours

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Alors pour montrer qu'une partie $E \subset X$ est μ^*-mesurable, il suffit de montrer que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c), \tag{1.4}$$

pour tout $A \subset X$.

Théorème 1.2.17
Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble non-vide X. Alors $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une tribu sur X et la restriction de μ^* à $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une mesure.

Mesure extérieure métrique

Rappelons que la distance entre deux sous-ensembles E, F d'un espace métrique (X, d) vaut

$$d(E,F) = \inf_{(x,y)\in E\times F} d(x,y).$$

Définition 1.2.18
Une mesure extérieure sur (X, d) est dite métrique si

$$d(E,F) > 0 \implies \mu^*(E\cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F).$$

Théorème 1.2.19 *[16]*
Si μ^* est une mesure extérieure métrique sur un espace métrique (X, d), alors les boréliens de X sont μ^*-mesurables ;

$$\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}(\mu^*).$$

et la restriction de μ^* à $\mathcal{B}(X)$ est une mesure.

1.3 Intégration au sens de Lebesgue

Intégrale de fonctions positives

Définition 1.3.1
La fonction numérique $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dite mesurable si

$$\{f > a\} := f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{M}, \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

On note $\mathcal{L}^0(X)$ *l'espace vectoriel des fonctions* $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *numériques mesurables.*

Remarques 1.3.2

1) La fonction indicatrice χ_A *est mesurable si et seulement si* $A \in \mathcal{M}$

2) Soit $f, g : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *deux fonctions mesurables, on dit que* $f = g$ *presque par tout si*

$$\mu(\{f \neq g\}) := \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Définition 1.3.3

Une fonction mesurable positive $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow [0, +\infty[$ *est dite étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs, c-à-d*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i},$$

où $f(X) = \{a_1, ..., a_n\} \subset \mathbb{R}$ *et* $A_i = f^{-1}(\{a_i\}) \in \mathcal{M}$. *On écrit* $f \in \mathcal{E}_+$

On pose alors

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i),$$

avec la convention $0.\infty = 0$ *si* $a_i = 0$ *et* $\mu(A_i) = 0$.

Nous notons $\mathcal{L}^0_+$ l'ensemble des fonctions $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurables positives.

Définition 1.3.4

Pour $f \in \mathcal{L}^0_+$ *on appelle intégrale sur* X *de* f *par rapport à* μ, *l'élément de* $[0, +\infty]$ *noté* $\int f d\mu$ *et défini par*

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int s d\mu : s \in \mathcal{E}_+, \ s \leq f\right\}. \tag{1.5}$$

Pour $A \in \mathcal{M}$ *on définit aussi*

$$\int_A f d\mu := \int f.\chi_A d\mu. \tag{1.6}$$

Nous donnons maintenant le premier des grands théorèmes d'interversion limite-intégrale ($\lim \int = \int \lim$).

Théorème 1.3.5 *(de la convergence monotone ou de Beppo-Levi)*
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite croissante dans* $\mathcal{L}^0_+$ *et soit* $f = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \sup\limits_{n\geq 1} f_n$. *Alors*

$$\int f d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int f_n d\mu = \sup_{n\geq 1}\int f_n d\mu.$$

Corollaire 1.3.6 *(Interversion série-intégrale dans* $\mathcal{L}^0_+$*)*
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions mesurables positives. La fonction* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ *est aussi dans* $\mathcal{L}^0_+$ *et*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int f_n d\mu\right) \in [0, +\infty].$$

Mesures à densité par rapport à une autre mesure

A partir d'une mesure et d'une fonction mesurable positive, on peut définir une autre mesure de la manière suivante.

Théorème 1.3.7
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{L}^0_+$. *Définissons la fonction d'ensembles* $\nu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ *par*

$$\nu(A) := \int_A f d\mu, \ A \in \mathcal{M}. \tag{1.7}$$

Alors, ν *est une mesure positive sur* $(X, \mathcal{M})$. *On dit qu'elle est de densité* f *par rapport à* μ.

Exemples 1.3.8
1) Intégration par rapport à la mesure de comptage
Considérons $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *muni de la mesure de comptage* $\mu = card$ *et la fonction mesurable* $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$. *Alors*

$$\int f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

2) Intégration par rapport à la mesure de Dirac

Considérons l'espace mesurable $(X, \mathcal{P}(X))$ muni de la mesure de Dirac δ_a en point $a \in X$ et la fonction mesurable $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$. Alors

$$\int f d\delta_a = f(a).$$

3) Intégration par rapport à une mesure à densité

Soit ν la mesure de densité f par rapport à μ sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$. Alors pour tout $g \in \mathcal{L}^0_+$ on a

$$\int g d\nu = \int f g d\mu.$$

Fonctions intégrables

Définition 1.3.9

Soit $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ ($f \in \mathcal{L}^0$) une fonction numérique mesurable. On dit que f est intégrable par rapport à μ si

$$\int |f| \, d\mu < \infty.$$

On notera $\mathcal{L}^1(\mu)$ l'espace vectoriel des fonctions $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrables.

Théorème 1.3.10 *(Convergence dominée)*

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions numériques mesurables. On suppose que

1) $f_n \longrightarrow f$ presque partout

2) Il existe une fonction fixe $g : X \longrightarrow [a, +\infty[$ intégrable telle que $|f_n| \leq g$ presque partout. Alors, f est intégrable et $\int |f_n - f| \, d\mu \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

En particulier, on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n d\mu = \int f d\mu.$$

1.4 Régularité d'une mesure sur un espace métrique

Soit μ une mesure sur un espace métrique X muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$.

Définition 1.4.1

On dit que μ est

a) Extérieurement régulière si pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$,

$$\mu(A) = \inf \{\mu(O),\ O \textit{ ouvert, } A \subset O\}.$$

b) Intérieurement régulière si pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$,

$$\mu(A) = \sup \{\mu(K),\ K \textit{ compact, } K \subset A\}.$$

c) Régulière, si elle est à la fois extérieurement et intérieurement régulière. De manière équivalente, pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K et un ouvert O tels que

$$\begin{cases} K \subset A \subset O \\ \textit{et} \\ \mu(O \backslash K) \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Proposition 1.4.2

Si μ est finie, alors elle est extérieurement régulière et pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$,

$$\mu(A) = \sup \{\mu(F),\ F \textit{ fermé, } F \subset A\}.$$

Preuve.

Il suffit de montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$,

$$(\forall \varepsilon > 0,\ \text{il existe un ouvert } O \supset A \text{ et un fermé } F \subset A \text{ tels que } \mu(O \backslash F) < \varepsilon). \quad (1.8)$$

Soit

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{B}(X) \text{ vérifiant } (1.8)\}.$$

Montrons que $\mathcal{T}$ est une tribu contenant tous les ouverts de X, et par conséquent égale à $\mathcal{B}(X)$.

Soit A un ouvert de X. Pour O, il suffit de prendre $O = A$. Pour F, définissons

$$F_n := \left\{ x \in A : d(x, A^c) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Comme $F_n = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[\right)$ avec la fonction $x \longmapsto d(x, A^c)$ est continue, F_n est fermé. De plus A^c est fermé donc pour tout $x \in A$, $d(x, A^c) \neq 0$. En effet, $d(x, A^c) = 0$ si et seulement si x est dans l'adhérence de A^c, qui n'est autre que le complémentaire de l'intérieur de A, c'est-à-dire le complémentaire de A. Ainsi, $(F_n)_n$ est croissante et on a

$$\lim_n F_n = \bigcup_{n \geq 1} F_n = A,$$

et donc $(A \backslash F_n)_n$ est décroissante et on a

$$\lim_n (A \backslash F_n) = \bigcap_{n \geq 1} (A \backslash F_n) = \emptyset.$$

Par la continuité décroissante (car la mesure μ est finie) on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A \backslash F_n) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Montrons que $\mathcal{T}$ est une tribu,

i) $X \in \mathcal{T}$, car il suffit alors de prendre $O = F = X$.

ii) Passage au complémentaire. Soit $A \in \mathcal{T}$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $F \subset A \subset O$ tels que $\mu(O \backslash F) < \varepsilon$, où O est un ouvert et F fermé. Avec $O' = F^c$ et $F' = O^c$, O' est ouvert, F' est fermé et $F' \subset A \subset O'$. De plus,

$$O' \backslash F' = O' \cap (F')^c = F^c \cap O = O \backslash F,$$

donc $\mu(O \backslash F) < \varepsilon$.

iii) Réunion dénombrable. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ et $\varepsilon > 0$. Alors pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un ouvert O_n et un fermé F_n tels que $F_n \subset A_n \subset O_n$ et

$$\mu(O_n \backslash F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Comme $\left(\bigcup_{k\leq n} F_k\right)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de limite $\bigcup_{n\geq 1} F_n$, la suite $\left(\mu\left(\bigcup_{k\leq n} F_k\right)\right)_{n\geq 1}$ converge vers $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} F_n\right) < \infty$. Il existe un entier n_ε tel que

$$\mu\left(\bigcup_{k\leq n_\varepsilon} F_k\right) \geq \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} F_n\right) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient maintenant l'ouvert $O' = \bigcup_{n\geq 1} O_n$ (réunion d'ouverts) et le fermé $F' = \bigcup_{k\leq n_\varepsilon} F_k$ (réunion finie de fermés). On a alors

$$F' = \bigcup_{k\leq n_\varepsilon} F_k \subset \bigcup_{n\geq 1} F_n \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n \subset \bigcup_{n\geq 1} O_n = O',$$

et de plus

$$\begin{aligned}
\mu\left(O'\backslash F'\right) &= \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} O_n\right) - \mu\left(\bigcup_{k\leq n_\varepsilon} F_k\right)\\
&= \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} O_n\right) - \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} F_n\right) + \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} F_n\right) - \mu\left(\bigcup_{k\leq n_\varepsilon} F_k\right)\\
&= \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} O_n \backslash \bigcup_{k} F_k\right) + \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} F_n\right) - \mu\left(\bigcup_{k\leq n_\varepsilon} F_k\right)\\
&\leq \mu\left(\left(\bigcup_{n\geq 1} O_n\right) \cap \left(\bigcap_{k} F_k^c\right)\right) + \frac{\varepsilon}{2}\\
&= \mu\left(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k} \left(O_n \cap F_k^c\right)\right) + \frac{\varepsilon}{2}\\
&\leq \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} \left(O_n \cap F_n^c\right)\right) + \frac{\varepsilon}{2}\\
&\leq \sum_{n\geq 1} \mu\left(O_n\backslash F_n\right) + \frac{\varepsilon}{2}\\
&\leq \sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

Théorème 1.4.3

Soient X un espace métrique localement compact séparable et μ une mesure sur $\mathcal{B}(X)$ finie sur les compacts de X. Alors μ est régulière.

Preuve.

On utilise le fait qu'un tel espace est σ-compact, c'est-à-dire qu'il existe une suite croissante $(E_n)_{n\geq 1}$ de compacts dont la limite $\bigcup_{n\geq 1} E_n$ est égale à X. En fait, nous allons utiliser le résultat plus fort que $X = \bigcup_{n\geq 1} \mathring{E}_n$, où $\mathring{E}_n$ désigne l'intérieur de E_n.

Régularité intérieure. Soit $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathcal{B}(X)$. Soit μ_n la mesure trace de sur E_n, c'est-à-dire $\mu_n(A) = \mu(E_n \cap A)$.

Comme μ_n est finie, d'après la proposition précédente, il existe un fermé $F_n \subset A$ tel que

$$\mu(E_n \cap A) \leq \mu(E_n \cap F_n) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit le compact $K_n = E_n \cap F_n$ (intersection d'un fermé et d'un compact). Comme $F_n \subset A$, on a $K_n \subset A$ et l'on réécrit l'inégalité précédente

$$\mu(E_n \cap A) \leq \mu(K_n) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.9}$$

Observons que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mu(E_n \cap A) = \mu(A)$;

Si $\mu(A) = +\infty$, alors d'après (1.9) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mu(K_n) = +\infty$, autrement dit $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mu(K_n) = \mu(A)$. Si $\mu(A) < \infty$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mu(A) \leq \mu(E_n \cap A) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \mu(K_n) + \varepsilon,$$

ce qui nous permet de conclure que μ est régulière intérieurement.

Régularité extérieure. Soit $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathcal{B}(X)$. Soit μ_n la mesure trace de sur $\mathring{E}_n$.

Comme μ_n est finie, d'après la proposition précédente, elle est régulière extérieurement. Ainsi il existe un ouvert O_n tel que $A \subset O_n$ et

$$\mu(\mathring{E}_n \cap A) \geq \mu(\mathring{E}_n \cap O_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{1.10}$$

Montrons que $O := \bigcup_{n\geq 1} (O_n \cap E_n)$ vérifie $\mu(A) \geq \mu(O) - \varepsilon$. Comme $A \cap \mathring{E}_n \subset O_n \cap \mathring{E}_n$, on a $A = \bigcup_{n\geq 1} \left(O_n \cap \mathring{E}_n\right) \subset O$, ce qui donnera le résultat car O est ouvert (c'est une réunion d'ouverts). Soit $U_n = \bigcup_{k\leq n} \left(O_k \cap \mathring{E}_k\right)$. Nous allons montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$\mu(U_n) \leq \mu(A \cap \mathring{E}_n) + \sum_{1\leq k\leq n} \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

L'égalité est vraie pour $n = 1$ car elle se réduit à (1.10). En se servant de (1.10),

$$\begin{aligned}
\mu(U_{n+1}) &= \mu(U_n) + \mu(O_{n+1} \cap \mathring{E}_{n+1}) - \mu(U_n \cap O_{n+1} \cap \mathring{E}_{n+1}) \\
&\leq \mu(A \cap \mathring{E}_n) + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\varepsilon}{2^k} + \mu(A \cap \mathring{E}_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} - \mu(U_n \cap O_{n+1} \cap \mathring{E}_{n+1}) \\
&= \mu(A \cap \mathring{E}_{n+1}) + \sum_{1 \leq k \leq n+1} \frac{\varepsilon}{2^k} + a_n,
\end{aligned}$$

où

$$a_n = \mu(A \cap \mathring{E}_n) - \mu(U_n \cap O_{n+1} \cap \mathring{E}_{n+1}) \leq 0,$$

car $A \cap \mathring{E}_n \subset U_n \cap O_{n+1} \cap \mathring{E}_{n+1}$. En effet, d'une part $A \subset O_{n+1}$ et $\mathring{E}_n \subset \mathring{E}_{n+1}$ donc $A \cap \mathring{E}_n \subset O_{n+1} \cap \mathring{E}_{n+1}$; d'autre part, $A \subset O_n$, donc $A \cap \mathring{E}_n \subset O_n \cap \mathring{E}_n \subset U_n$. On a donc bien

$$\mu(U_{n+1}) \leq \mu(A \cap \mathring{E}_{n+1}) + \sum_{1 \leq k \leq n+1} \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Ainsi, comme $(U_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante de limite O, on obtient l'inégalité souhaitée en passant à la limite en n. ■

1.5 Exercices de chapitre 1

Exercice 1.1

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'equivalence ouverte sur un espace topologique X (c'est-à-dire l'application quotient $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ est ouverte). Montrer que si X admet une base dénombrable d'ouverts, alors il en est de même pour l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$.

Exercice 1.2

Soient X un espace topologique, F une partie fermée de X et $\mathcal{R}$ la relation d'equivalence de X obtenue en identifiant entre eux tous les éléments de F; autrement dit, la relation d'équivalence dont les classes sont F et les ensembles $\{x\}$ pour $x \in X \backslash F$.

1) Montrer que si X est regulier, alors l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est séparé.

2) Montrer que si X est normal, alors l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est normal.

Exercice 1.3

Soient X et Y deux espaces réguliers. Montrer que l'espace topologique produit $X \times Y$ est régulier.

Exercice 1.4

Soient X un espace topologique séparé et $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X.

Montrer que X est compact si et seulement si de tout recouvrement ouvert $(O_i)_{i\in I}$ de X par des éléments de $\mathcal{B}$, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Exercice 1.5

On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance euclidienne d_2;

$$d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}, \quad x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Soit $\lambda > 0$ et posons $K = \cup_{n\geq 1} B'_n$ où $B'_n = B'_n\left((\frac{1}{n},\frac{1}{n}),\frac{\lambda}{n}\right)$ est la boule fermée de centre

$(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ et de rayon $\frac{\lambda}{n}$ dans $\mathbb{R}^2$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que K soit compact.

Exercice 1.6

Soient X un espace topologique et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

1) Montrer que f est semi-continue inférieurement si et seulement si, pour tout $x \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x dans X tel que pour tout $y \in V$, on ait $f(y) > f(x) - \varepsilon$.

2) Montrer que f est semi-continue supérieurement si et seulement si, pour tout $x \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x dans X tel que pour tout $y \in V$, on ait $f(y) < f(x) + \varepsilon$.

3) Montrer que si f est continue de X dans $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle, alors f est semi-continue inférieurement et supérieurement. Montrer qu'inversement si f est à la fois semi-continue inférieurement et supérieurement, alors f est continue.

Exercice 1.7

Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application semi-continue inférieurement. On pose

$$f_n(x) = \inf_{x \in X} \left[f(a) + nd(x, a) \right], \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1) Montrer que f_n est continue à valeurs dans $]0, +\infty[$, et que f_n croît vers f.

2) En déduire que toute application semi-continue inférieurement f est limite simple d'une suite croissante $(f_n)_n$ de fonctions continues, de même, toute application semi-continue supérieurement g est limite simple d'une suite décroissante $(g_n)_n$ de fonctions continues.

Exercice 1.8 *(Nombres diophantiens)*

$\mathbb{R}$ est muni de sa tribu de Boréliennes $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ.

Soit $\tau > 2$. On dit que $x \in [0, 1]$ est τ-diophantien dans $[0, 1]$ s'il existe une constante

$c > 0$ telle que pour tout rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ vérifiant $\frac{p}{q} \neq x$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^\tau}.$$

On peut voir les nombres τ-diophantiens comme des nombres “mal approchables” par des rationnels. On note D_τ l'ensemble des réels τ-diophantiens de $[0,1]$.

1) Soient $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Expliquer pourquoi

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{nq^\tau} \right\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

et calculer

$$\lambda \left(\left\{ x \in \mathbb{R} : \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{nq^\tau} \right\} \right).$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'ensemble

$$A_n = \left\{ x \in [0,1], \exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1] : \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{nq^\tau} \right\}.$$

Montrer que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \lambda(A_n) = 0$.

3) En déduire que D_τ est de mesure pleine dans $[0,1]$, c-à-d $\lambda(D_\tau) = 1$.

Exercice 1.9

Une version plus forte du théorème de convergence dominée

On considère un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ tel que $\mu(X) < \infty$. Soient $(f_n)_n$ une suite des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{M})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge en mesure vers f si pour tout $\delta > 0$,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu \left(\{ |f - f_n| > \delta \} \right) = 0.$$

On note $f_n \longrightarrow f$ en mesure.

1) Montrer que si $(f_n)_n$ converge μ-presque partout vers f, alors $f_n \longrightarrow f$ en mesure.

2) On suppose que $f_n \longrightarrow f$ en mesure. On souhaite montrer qu'on peut extraire de $(f_n)_n$ une suite convergeant μ-presque partout vers f.

a) Expliquer comment construire une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ de $(f_n)_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mu\left(\left\{\left|f - f_{\varphi(n)}\right| > \frac{1}{n}\right\}\right) \leq \frac{1}{2^n}.$$

b) En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ converge μ-presque partout vers f.

3) On suppose que $f_n \longrightarrow f$ en mesure et qu'il existe une fonction $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| \leq g$ μ-presque partout. Montrer que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 1.10 *(Régularité de la mesure de Lebesgue)*

$\mathbb{R}$ est muni de sa tribu Boréliennes $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit

$$\lambda_n(B) = \lambda(B \cap]{-n}, n[), \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Vérifier que λ_n définit une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

2) On introduit la classe de parties

$$\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists F \text{ fermé, } \exists O \text{ ouvert, } F \subset B \subset O,\ \lambda_n(O\backslash F) < \varepsilon\}.$$

Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire que si B est un borélien de $\mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F de $\mathbb{R}$ et un ouvert O de $\mathbb{R}$ tels que

$$F \subset B \subset O \quad \text{et} \quad \lambda_n(O\backslash F) < \varepsilon.$$

4) Montrer que si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O de $\mathbb{R}$ tel que

$$B \subset O \quad \text{et} \quad \lambda(O\backslash B) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Conclure.

5) Déduire de la question précédente que pour tout borélien B de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\lambda(B) &= \inf\{\lambda(O) : B \subset O,\ O \text{ est ouvert}\}, \\ \lambda(B) &= \inf\{\lambda(K) : K \subset B,\ K \text{ est compact}\}.\end{aligned}$$

Exercice 1.11 *(Non-régularité de la mesure de comptage)*

Soit m la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$.

1) a) Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $m(A) = +\infty$. Montrer qu'il existe une suite croissante $(K_n)_{n\geq 1}$ de compacts inclus dans A telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} m(K_n) = +\infty$.

b) Traiter le cas plus facile où $m(A) < \infty$ afin de déduire que m est intérieurement régulière.

2) Montrer que m n'est pas extérieurement régulière.

Chapitre 2

Mesures réelles (signées), décomposition

2.1 Mesure signée, décomposition

Définition 2.1.1

Soit $(X, \mathcal{M})$ un espase mesurable. La mesure signée (réelle) est une application

$$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [-\infty, +\infty],$$

telle que

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) μ *est* σ*-additive ;*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ *de* $\mathcal{M}$ *disjoints deux à deux.*

La mesure signée μ *est dite finie si* $\mu(A)$ *est fini (i.e.* $\mu(A) \in \mathbb{R}$*) pour tout* $A \in \mathcal{M}$*.*

Remarque 2.1.2

La musure signée infinie μ *ne peut prendre à la fois la valeur* $-\infty$ *et la valeur* $+\infty$ *: c'est l'un ou l'autre. En effet, supposons qu'il existe* $A, B \in \mathcal{M}$ *avec* $\mu(A) = +\infty$ *et* $\mu(B) = -\infty$*. Puisque* $\mu(A) + \mu(A^c) = \mu(X)$ *on a* $\mu(X) = +\infty$ *et aussi par* $\mu(B) + \mu(B^c) = \mu(X)$ *on a* $\mu(X) = -\infty$*, ceci une contradiction.*

Proposition 2.1.3

Soit μ *une mesure signée sur* $(X, \mathcal{M})$*.*

i) Si $A, B \in \mathcal{M}$ *tels que* $A \subset B$ *avec* $\mu(B)$ *est fini alors* $\mu(A)$ *est fini. De plus on a*

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A).$$

Par conséquence, si $\mu(X)$ *est fini alors* μ *est finie.*

ii) La mesures signée μ *vérifiée la continuité croissante et la continuité décroissante.*

Preuve.

i) Soit $A \subset B$ avec $\mu(B)$ est fini. On a $B = A \cup (B \backslash A)$, alors

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A).$$

Il est clair que $\mu(A)$ est fini, car si $\mu(A) = +\infty$ on a $\mu(B\backslash A) = -\infty$, ce qui est une contradiction puisque μ ne peut prendre à la fois $-\infty$ et $+\infty$.

ii) La preuve comme le cas des mesures positives. ■

Exemple 2.1.4

Soit λ la mesure de Lebesgue définie sur, $\mathcal{B}([-1,1])$, les boréliens de $[-1,1]$. On définit une fonction ensembliste, μ, sur $\mathcal{B}([-1,1])$ par

$$\mu(A) = \lambda\left(A \cap [0,1]\right) + \lambda\left(A \cap [-1,0]\right).$$

Alors μ est une mesures signée sur $\mathcal{B}([-1,1])$.

Exemple 2.1.5

Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures positives sur $(X, \mathcal{M})$ dont au moins une est finie, alors $\mu_1 - \mu_2$ est une mesure signée sur $(X, \mathcal{M})$.

Exemple 2.1.6

Soit μ une mesure positive sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ et soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. L'application $\upsilon : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\upsilon(A) = \int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu,$$

est une mesure signée. On dit qu'elle est de densité f par rapport à μ.

En effet, Pour tout $A_1, A_2, \ldots$ disjoints deux à deux dans $\mathcal{M}$ on a

$$\upsilon(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \int \left(\sum_{i=1}^{\infty} f \chi_{A_i} \right) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f \chi_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \upsilon(A_i),$$

où la première égalité est vraie car les ensembles $A_1, A_2, \ldots$ sont disjoints deux à deux et la deuxième égalité découle de l'inégalité

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f \chi_{A_i} \right| \leq |f|,$$

ce qui, avec l'hypothèse que $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ nous permet d'échanger l'intégrale et la limite des sommes partielles par le Corollaire 1.3.6.

Définition 2.1.7

Soient μ une mesure signée sur $(X, \mathcal{M})$ et $A \in \mathcal{M}$.

i) On dit que A est positif pour μ si pour tout $E \in \mathcal{M}$ avec $E \subset A$ on a $\mu(E) \geq 0$.

ii) On dit que A est négatif pour μ si pour tout $E \in \mathcal{M}$ avec $E \subset A$ on a $\mu(E) \leq 0$.

iii) On dit que A est nul pour μ si pour tout $E \in \mathcal{M}$ avec $E \subset A$ on a $\mu(E) = 0$. On écrit simplement A est μ-nul.

Proposition 2.1.8

Soit μ une mesure signée sur $(X, \mathcal{M})$.

i) Si A est positif (resp. négatif, resp. nul) et $B \in \mathcal{M}$ avec $B \subset A$, alors B est positif (resp. négatif, resp. nul).

ii) Si $(A_n)_n$ est une suite des ensembles positifs (resp. négatifs, resp. nuls), alors $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ est positif (resp. négatif, resp. nul)

Preuve.

i) Soit $E \in \mathcal{M}$, $E \subset B \subset A$ alors $E \subset A$ et A est positif donc $\mu(E) \geq 0$, d'où B est positif.

ii) Soit $A = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$, on définit la suite $(B_n)_n$ par

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_n = A_n \backslash \left(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1}\right), \text{ pour } n \geq 2. \end{cases}$$

Les B_n sont des patrties mesurables disjoints deux à deux, de plus ils sont positives car $B_n \subset A_n$ pour tout $n \geq 1$ et on a

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

Soit $E \in \mathcal{M}$, $E \subset A$, alors on peut écrire

$$E = E \cap A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(B_n \cap E\right).$$

Par la σ-additivité de la mesure signée μ en tenant compte du fait que $B_n \cap E \subset B_n$, on a

$$\mu(E) = \mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap E) \geq 0.$$

Ce qui donne $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est positif. ■

Décomposition de Hahn

Théorème 2.1.9 *[1, Page 267]*

Soit μ une mesure signée sur $(X, \mathcal{M})$.

Il existe $P, N \in \mathcal{M}$ tels que $\begin{cases} P \cap N = \emptyset \\ P \cup N = X \end{cases}$, *$P$ est positif et N est négatif.*

On dit que (P, N) est une décomposition de Hahn de la mesure signée μ.

Remarque 2.1.10

La décomposition de Hahn n'est pas unique, on peut associer plusieurs décomposition de Hahn pour la même mesure signée μ.

Soient $(X, \mathcal{M})$ =$([-1, 1], \mathcal{B}([-1, 1]))$ et μ la mesure signée définie par

$$\mu(A) = \int_A x dx, \quad A \in \mathcal{B}([-1, 1].$$

Les couples $([0, 1], [-1, 0[)$ et $(]0, 1], [-1, 0])$ sont deux décompositions de Hahn pour la mesure signée μ.

Décomposition de Jordan

Théorème 2.1.11

i) Toute mesure signée μ sur $(X, \mathcal{M})$ est la différence de deux mesures positives μ^+, μ^- ($\mu = \mu^+ - \mu^-$) dont au moins une est finie. De plus, si (P, N) est une décomposition de Hahn de μ, on définit μ^+ et μ^- par

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap P) \quad \text{et} \quad \mu^-(E) = -\mu(E \cap N), \text{ pour tout } E \in \mathcal{M}.$$

ii) Les mesures positives μ^+ et μ^- ne dépendent pas de la décomposition de Hahn utilisée.

Preuve.

Comme P est positif et $E \cap P \subset P$ on a $\mu^+(E) = \mu(E \cap P) \geq 0$ et aussi N est négatif et $E \cap N \subset N$ donc $\mu^-(E) = -\mu(E \cap N) \geq 0$. Ce qui montre que les fonctions μ^+, μ^- : $\mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ sont positives. Dautre part $\mu^+(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap P) = \mu(\emptyset) = 0$ et aussi $\mu^-(\emptyset) = 0$. Pour la σ-additivité, soit $(E_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}$ disjoints deux à deux, la suite $(E_n \cap P)_{n\geq 1}$ est aussi disjoints deux à deux car

$$(E_n \cap P) \cap (E_m \cap P) = E_n \cap E_m \cap P = \emptyset \cap P = \emptyset, \text{ pour tout } n \neq m.$$

La mesure positive μ^+ est σ-additive car

$$\mu^+\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \cap P\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap P) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^+(E_n).$$

De même pour la mesure positive μ^-. Il suit alors que μ^+ et μ^- sont des mesures positives. On a $\mu = \mu^+ - \mu^-$ car pour tout $E \in \mathcal{M}$,

$$\mu(E) = \mu(E \cap X) = \mu\left[E \cap (P \cup N)\right] = \mu(E \cap P) + \mu(E \cap N) = \mu^+(E) - \mu^-(E).$$

Puisque μ prend au plus l'une des deux valeurs $+\infty$ ou $-\infty$ alors μ^+ ou μ^- est finie.
Il reste à montrer que μ^+, μ^- ne dépend pas de la décomposition de Hahn utilisée. On considère deux décompositions de Hahn (P_1, N_1) et (P_2, N_2) de la mesure signée μ et on montre que

$$\begin{cases} \mu(E \cap P_1) = \mu(E \cap P_2) \\ \mu(E \cap N_1) = \mu(E \cap N_2) \end{cases} \text{pour tout } E \in \mathcal{M}?$$

Puisque $E \cap (P_1 \backslash P_2) \subset P_1$ et P_1 est positif on a

$$\mu\left(E \cap (P_1 \backslash P_2)\right) \geq 0. \tag{2.1}$$

D'autre part, puisque $P_2 \cup N_2 = X$ on a $N_2 = P_2^C$ et alors

$$E \cap (P_1 \backslash P_2) = E \cap P_1 \cap (P_2^C) = E \cap P_1 \cap N_2 \subset N_2.$$

L'ensemble N_2 est négatif donc

$$\mu\left(E \cap (P_1 \backslash P_2)\right) \leq 0. \tag{2.2}$$

Les inégalités (2.1) et (2.2) implique que $\mu\left(E \cap (P_1 \backslash P_2)\right) = 0$. Mais,

$$\begin{aligned} E \cap P_1 &= E \cap \Big[\overbrace{(P_1 \backslash P_2) \cup (P_1 \cap P_2)}^{P_1}\Big] \\ &= \underbrace{E \cap (P_1 \backslash P_2)}_{(E1)} \cup \underbrace{E \cap (P_1 \cap P_2)}_{(E2)} \end{aligned}$$

Puisque $(E1)$ et $(E2)$ sont disjoints on obtient

$$\mu\left(E \cap P_1\right) = \underbrace{\mu\left(E \cap (P_1 \backslash P_2)\right)}_{=0} + \mu\left(E \cap P_1 \cap P_2\right) = \mu\left(E \cap P_1 \cap P_2\right).$$

De même façon on trouve $\mu\left(E \cap P_2\right) = \mu\left(E \cap P_1 \cap P_2\right)$. Ce qui donne

$$\mu\left(E \cap P_1\right) = \mu\left(E \cap P_2\right) = \mu\left(E \cap P_1 \cap P_2\right).$$

■

Exemple 2.1.12

Soit υ la mesure signée définie dans l'Exemple 2.1.6 et considérons P, N deux parties de X telles que

$$P = \{x \in X : f(x) \geq 0\} \quad et \quad N = P^C.$$

Puisque la fonction f est mésurable on a $P = f^{-1}([0, +\infty[) \in \mathcal{M}$ et $N = P^C \in \mathcal{M}$ et aussi $P \cup N = X$ et $P \cap N = \emptyset$. L'ensemble P est positif car si $E \subset P$ alors $f \geq 0$ dans E donc

$$\upsilon(E) = \int_E f d\mu \geq \int_E 0 d\mu = 0$$

de même façon montrons que N est négatif. Alors (P, N) est une décomposition de Hahn de la mesure signée υ. Pour la décomposition de Jordan, pour tout $E \in \mathcal{M}$ on a

$$\upsilon^+(E) = \int_{E \cap P} f d\mu = \int_E f \chi_P d\mu = \int_E f^+ d\mu$$

et

$$\upsilon^{-}(E) = -\int_{E\cap N} f d\mu = -\int_{E} f\chi_N d\mu = \int_E f^{-} d\mu$$

Corollaire 2.1.13

Si (μ^+, μ^-) *est la décomposition de Jordan de la mesure* μ, *alors pour tout* $A \in \mathcal{M}$ *on a*

$$\mu^+(A) \;=\; \sup\{\mu(E),\ E \in \mathcal{M},\ E \subset A\} \tag{2.3}$$

$$\mu^-(A) \;=\; \sup\{-\mu(E),\ E \in \mathcal{M},\ E \subset A\}. \tag{2.4}$$

Preuve.

Soit $A, E \in \mathcal{M}$ avec $E \subset A$, puisque μ^+ est une mesure positive on a

$$\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E) \leq \mu^+(E) \leq \mu^+(A).$$

Donc $\mu^+(A)$ est un majorant de l'ensemble $\{\mu(E),\ E \in \mathcal{M},\ E \subset A\}$. D'autre part si, (P, N) est une décomposition de Hahn de μ on a $\mu^+(A) = \mu(A \cap P)$ et puisque $P \in \mathcal{M}$ et $A \cap P \subset A$ on a

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap P) \in \{\mu(E),\ E \in \mathcal{M},\ E \subset A\}.$$

Ce qui implique que

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(E),\ E \in \mathcal{M},\ E \subset A\}.$$

■

Théorème 2.1.14

(caractérisation des ensembles positifs et négatifs)

Soit μ *une mesure signée sur* $(X, \mathcal{M})$. *L'ensemble* $E \in \mathcal{M}$ *est positif (resp. négatif) si et seulement si* $\mu^-(E) = 0$ *(resp.* $\mu^+(E) = 0$*).*

Preuve.

$\Longrightarrow$) Si E est positif et si (P, N) est une décomposition de Hahn de μ on a $\mu^-(E) = -\mu(E \cap N)$,

$$\begin{cases} E \cap N \subset E \text{ et } E \text{ positif} \implies \mu(E \cap N) \geq 0 \\ E \cap N \subset N \text{ et } N \text{ négatif} \implies \mu(E \cap N) \leq 0 \end{cases}$$

ce qui implique que $\mu(E \cap N) = 0$ alors $\mu^-(E) = 0$.

$\Longleftarrow$) Supposons que $\mu^-(E) = 0$ et montrons que E est positif. Soit $G \in \mathcal{M}$ avec $G \subset E$ donc $\mu^-(G) \leq \mu^-(E) = 0$ ce qui donne $\mu^-(G) = 0$. Alors

$$\mu(G) = \mu^+(G) - \mu^-(G) = \mu^+(G) \geq 0,$$

d'où la positivité de l'ensemble E. ■

2.2 Variation d'une mesure signée

Définition 2.2.1

Soit μ une mesure signée sur $(X, \mathcal{M})$. La variation de μ est la mesure positive définie par

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-,$$

où (μ^+, μ^-) est la décomposition de Jordan de μ.

La variation totale de μ est la quantité $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

Exemple 2.2.2

La variation de la mesure signée υ définie dans l'Exemple 2.1.6 est donnée par

$$|\upsilon|(A) = \upsilon^+(A) + \upsilon^-(A) = \int_A f^+ d\mu + \int_A f^- d\mu = \int_A |f| \, d\mu.$$

Remarque 2.2.3

Pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a

$$|\mu(A)| \leq |\mu|(A). \tag{2.5}$$

En effet,

$$|\mu(A)| = \left|\mu^+(A) - \mu^-(A)\right| \leq \left|\mu^+(A)\right| + \left|\mu^-(A)\right| = \mu^+(A) + \mu^-(A) = |\mu|(A).$$

Proposition 2.2.4

Soit μ une mesure signée sur $(X, \mathcal{M})$, alors

$$|\mu|(A) = \sup\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(A_n)| : (A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{M} \textit{ partition de } A\right\}. \tag{2.6}$$

Preuve.

Soit (P, N) une décomposition de Hahn de μ. On a

$$|\mu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A) = \mu(A \cap P) - \mu(A \cap N),$$

puisque P est positif avec $A \cap P \subset P$ on a $\mu(A \cap P) \geq 0$. Aussiet N est négatif et $A \cap N \subset N$, alors $\mu(A \cap N) \leq 0$. Donc

$$|\mu|(A) = |\mu(A \cap P)| + |\mu(A \cap N)|.$$

Il est clair que $\{A \cap P, A \cap N\}$ est une partition de A dans $\mathcal{M}$ car $A \cap P, A \cap N \in \mathcal{M}$ et

$$\begin{cases} (A \cap P) \cup (A \cap N) = A \cap (P \cup N) = A \cap X = A \\ \text{et} \\ (A \cap P) \cap (A \cap N) = A \cap (P \cap N) = A \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

Ce qui implique que $|\mu|(A) \leq \sup\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(A_n)| : (A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{M} \text{ partition de } A\right\}$.

D'autre part, d'après (2.5) et puisque $|\mu|$ est une mesure positive on a

$$\begin{aligned} & \sup\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(A_n)| : (A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{M} \text{ partition de } A\right\} \\ \leq\ & \sup\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu|(A_n) : (A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{M} \text{ partition de } A\right\} \\ =\ & \sup\left\{|\mu|\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) : (A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{M} \text{ partition de } A\right\} \\ =\ & |\mu|(A). \end{aligned}$$

Donc on obtient l'égalité (2.6). ∎

Corollaire 2.2.5

On a aussi

$$|\mu|(A) = \sup\{|\mu(E)| + |\mu(A\backslash E)| : E \in \mathcal{M} \text{ et } E \subset A\} = s. \tag{2.7}$$

Preuve.

Puisque $\{E, A\backslash E\}$ est une partition de A pour tout $E \in \mathcal{M}$ avec $E \subset A$, d'après la proposition précédente on a $|\mu|(A) \geq |\mu(E)| + |\mu(A\backslash E)|$ d'où $|\mu|(A) \geq s$. Inversement, pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a $|\mu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A)$. Comme

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(E),\ E \in \mathcal{M},\ E \subset A\},$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisit $E_\varepsilon \in \mathcal{M}$ et $E_\varepsilon \subset A$ telle que

$$\mu(E_\varepsilon) \geq \mu^+(A) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.8}$$

Si $\mu^+(A) = +\infty$ alors

$$s \geq |\mu(E_\varepsilon)| \geq \mu^+(A) - \frac{\varepsilon}{2} = +\infty,$$

et donc $s = +\infty = |\mu|(A)$. Maintenant supposons que $\mu^+(A) < +\infty$. Alors

$$\mu(A) = \mu(E_\varepsilon) + \mu(A\backslash E_\varepsilon) \geq \mu^+(A) - \frac{\varepsilon}{2} + \mu(A\backslash E_\varepsilon).$$

D'où

$$\mu(A) - \mu^+(A) \geq -\frac{\varepsilon}{2} + \mu(A\backslash E_\varepsilon),$$

ce qui implique que

$$-\mu(A\backslash E_\varepsilon) \geq \mu^-(A) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.9}$$

(2.8) et (2.9) donne

$$|\mu(E_\varepsilon)| + |\mu(A\backslash E_\varepsilon)| \geq \mu(E_\varepsilon) - \mu(A\backslash E_\varepsilon) \geq \mu^+(A) + \mu^-(A) - \varepsilon = |\mu|(A) - \varepsilon.$$

En fin

$$s \geq |\mu(E_\varepsilon)| + |\mu(A\backslash E_\varepsilon)| \geq |\mu|(A) - \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Ceci entraîne que $s \geq |\mu|(A)$. ∎

Proposition 2.2.6

$|\mu|$ est la plus petite mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$ qui majore μ.

Preuve.

Pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$ (Remarque 2.2.3), alors $|\mu|$ majore μ. Supposons que ν est une mesure positive majore μ i.e. $|\mu(A)| \leq \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}$ et montrons que $|\mu|(A) \leq \nu(A)$?

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une partition de A dans $\mathcal{M}$. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(A_n)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \nu(A).$$

En prend la borne supérieure sur toute les partitions mesurables de A, on trouve $|\mu|(A) \leq \nu(A)$. ■

Proposition 2.2.7

Pour toute mesure signée finie μ sur $(X, \mathcal{M})$, la variation totale de μ est finie c-à-d

$$\|\mu\| = |\mu|(X) < \infty,$$

par conséquent, $|\mu|(A) < \infty$ pour tout $A \in \mathcal{M}$.

Preuve.

On sait que l'une des mesures μ^+ ou μ^- est finie et comme $\mu(X) = \mu^+(X) - \mu^-(X)$ alors $\mu^+(X)$ et $\mu^-(X)$ sont finies, ce qui implique que $\|\mu\| = \mu^+(X) + \mu^-(X)$ est finie. ■

Proposition 2.2.8

L'ensemble $M(X)$ des mesures signées finies μ sur $(X, \mathcal{M})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et la variation totale définie une norme sur cet espace.

Preuve.

Il est clair que $M(X)$ un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les applications $\mathcal{M} \longrightarrow$

$\mathbb{R}$. Pour toute mesure singée $\mu \in M(X)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\|\alpha\mu\| &= |\alpha\mu|(X) \\
&= \sup\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha\mu(A_n)| : (A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{M} \text{ partition de } A\right\} \\
&= |\alpha| \sup\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(A_n)| : (A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{M} \text{ partition de } A\right\} \\
&= |\alpha| \, \|\mu\| .
\end{aligned}$$

Si $\|\mu\| = 0$ alors $|\mu|(X) = 0$. D'après (2.5) on a

$$|\mu(A)| \leq |\mu|(A) \leq |\mu|(X) = 0, \text{ pour tout } A \in \mathcal{M}.$$

Donc $\mu(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{M}$, d'où la mesure signée μ est nulle. Pour l'inégalité triagulaire on utilisant la relation (2.7), soit μ_1, μ_2 deux mesures signées sur $(X, \mathcal{M})$

$$\begin{aligned}
\|\mu_1 + \mu_2\| &= |\mu_1 + \mu_2|(X) \\
&= \sup_{A\in\mathcal{M}} \{|\mu_1(A) + \mu_2(A)| + |\mu_1(A^c) + \mu_2(A^c)|\} \\
&\leq \sup_{A\in\mathcal{M}} \{|\mu_1(A)| + |\mu_1(A^c)|\} + \sup_{A\in\mathcal{M}} \{|\mu_2(A)| + |\mu_2(A^c)|\} \\
&= |\mu_1|(X) + |\mu_2|(X). \\
&= \|\mu_1\| + \|\mu_2\| .
\end{aligned}$$

Donc $\|\mu_1 + \mu_2\| \leq \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$. ■

Théorème 2.2.9 *[1, Page 264]*
$M(X)$, muni de la norme variation totale $\|\mu\|$, est un espace de Banach.

2.3 Intégration par rapport à une mesure signée

Soit μ une mesure signée sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ de la décomposition de Jordan $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

Définition 2.3.1

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. L'intégrale de f par rapport à μ est donnée par la relation

$$\int f d\mu = \int f d\mu^+ - \int f d\mu^-. \tag{2.10}$$

Remarques 2.3.2

1) Pour les fonctions $f \in L^1(\mu^+) \cap L^1(\mu^-)$ on a $f = f^+ - f^-$ avec $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$ et alors

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu^+ - \int f^- d\mu^+ - \int f^+ d\mu^- + \int f^- d\mu^-.$$

2) Comme $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ on a

$$\int |f|\, d\,|\mu| = \int |f|\, d(\mu^+ + \mu^-) = \int |f|\, d\mu^+ + \int |f|\, d\mu^-,$$

et donc $f \in L^1(|\mu|)$ si et seulement si $f \in L^1(\mu^+)$ et $f \in L^1(\mu^-)$, c'est-à-dire

$$L^1(\mu) = L^1(|\mu|) = L^1(\mu^+) \cap L^1(\mu^-). \tag{2.11}$$

L'intégrale par rapport à une mesure signée vérifie des propriétés analogues à celle de l'intégrale par rapport à une mesure positive.

Proposition 2.3.3

Soit μ une mesure signée sur $(X, \mathcal{M})$.
Si $f \in L^1(\mu)$ alors

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f|\, d\,|\mu|\,. \tag{2.12}$$

Preuve.

On utilise les propriétés analogues des mesures positives avec (2.10),

$$\begin{aligned}
\left|\int f d\mu\right| &= \left|\int f d\mu^+ - \int f d\mu^-\right| \\
&\leq \left|\int f d\mu^+\right| + \left|\int f d\mu^-\right| \\
&\leq \int |f|\, d\mu^+ + \int |f|\, d\mu^- \\
&= \int |f|\, d\,|\mu|\,.
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.3.4 *(Convergence dominée).*

Soient $(f_n)_n$ *une suite de fonctions de* $L^1(|\mu|)$. *On suppose que*

1) $f_n \longrightarrow f$, $|\mu|$*-presque partout.*

2) Il existe une fonction fixe $g \in L^1(|\mu|)$ *telle que*

$$|f_n| \leq g, \quad |\mu| \text{ -presque partout.}$$

Alors,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu \tag{2.13}$$

Preuve.

Le théorème de convergence dominée (Théorème 1.3.10) pour la mesure positive $|\mu|$ donne

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int |f_n - f| \, d\, |\mu| = 0.$$

Par (2.12) on a

$$\left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\, |\mu| \longrightarrow 0,$$

donc

$$\int f_n d\mu \longrightarrow \int f d\mu.$$

■

2.4 Exercices de chapitre 2

Exercice 2.1

Soit μ une mesure signée sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$.

1) Montrer que si $E \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(E) > 0$, alors il existe un ensemble positif E_0 pour μ avec $E_0 \subset E$ et $\mu(E_0) \geq \mu(E)$.

2) Montrer que si $F \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(F) < 0$, alors il existe un ensemble négatif F_0 pour μ avec $F_0 \subset F$ et $\mu(F_0) \geq \mu(F)$.

Exercice 2.2

Soit μ une mesure signée sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ de la décomposition de Jordan (μ^+, μ^-). Soient E, $F \in \mathcal{M}$ tels que $E \cup F = X$ et $E \cap F = \emptyset$.

Montrer que si $\mu^-(E) = \mu^+(F) = 0$, alors le couple (E, F) est une décomposition de Hahn de μ.

Exercice 2.3

Soit μ une mesure signée sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$.

Montrer que si (μ^+, μ^-) est la décomposition de Jordan de la mesure μ, alors $\inf \{\mu^+, \mu^-\} = 0$ (la mesure nulle)

Exercice 2.4

1) Soit X un ensemble non vide et soit $A, B \subset X$. Déterminer $|\chi_A - \chi_B|$.

2) $\mathbb{R}$ est muni de la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et la mesure de Lebesgue λ.

Soient $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $E \neq \emptyset$ avec $\lambda(E) < \infty$ et $G \in \mathcal{B}(E)$. On définit l'application

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{B}(E) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \mu(A) = \lambda(G \cap A) - \lambda\left[(E \backslash G) \cap A\right] \end{aligned}$$

Montrer que μ est une mesure signée sur $(E, \mathcal{B}(E))$ et déterminer $|\mu|$, la variation de μ.

Exercice 2.5 (Examen 2016)

1) Montrer que si m est une mesure signée finie sur $(X, \mathcal{M})$ et m_1, m_2 sont deux mesures positives sur $(X, \mathcal{M})$ telles que $m = m_1 - m_2$, alors

$$m_1 \geq m^+ \quad \text{et} \quad m_2 \geq m^-.$$

2) Soient μ, η deux mesures signées finies et ν une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$ telles que $\mu + \nu = \eta$.

Utiliser la question précédente pour montrer que

$$\mu^+ \leq \eta^+ \leq \mu^+ + \nu \quad \text{et} \quad \eta^- \leq \mu^- \leq \eta^- + \nu.$$

Exercice 2.6

Soit μ une mesure signée finie sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ et soient (P_1, N_1), (P_2, N_2) deux décompositions de Hahn de la mesure μ. Montrer que

$$|\mu| (P_1 \Delta P_2) = |\mu| (N_1 \Delta N_2) = 0.$$

Exercice 2.7

Soit μ une mesure signée finie sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ de décomposition de Hahn (P, N).

1) Pour $A \in \mathcal{M}$, calculer $\int \chi_A d\mu$ et $\int_A (\chi_P - \chi_N) d\mu$

2) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a

$$|\mu| (A) = \sup_{|f| \leq 1} \left| \int_A f d\mu \right|.$$

Chapitre 3

Théorème de Radon-Nikodym et applications

3.1 Absolue continuité

Définition 3.1.1
Soit m une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$ et μ une mesure signée sur $(X, \mathcal{M})$. On dit que μ est absolument continue par rapport à m et l'on écrit $\mu \ll m$ si pour tout $A \in \mathcal{M}$ tel que $m(A) = 0$ on a également $\mu(A) = 0$.

$$\forall A \in \mathcal{M} : m(A) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0$$

Une mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ est absolument continue si elle est absolument continue par rapport a la mesure de Lebesgue.

Remarque 3.1.2
Si m et μ sont deux mesures positives sur $(X, \mathcal{M})$ telles que $\mu \leq m$, alors $\mu \ll m$. En effet, soit $A \in \mathcal{M}$ tel que $m(A) = 0$ on a $0 \leq \mu(A) \leq m(A) = 0$ alors $\mu(A) = 0$.

Exemples 3.1.3
1) Toute mesure signée finie μ est absolument continue par rapport à sa variation $|\mu|$ c-à-d $\mu \ll |\mu|$. En effet soit $A \in \mathcal{M}$ tel que $|\mu|(A) = 0$. Puisque $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$ on a $\mu(A) = 0$.
2) Soit m une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$ et $f \in L^1(m)$. Soit μ la mesure de densité f par rapport à m c-à-d

$$\mu(A) = \int_A f dm, \quad A \in \mathcal{M}$$

Alors $\mu \ll m$ car $m(A) = 0 \Longrightarrow \int_A f dm = 0$.
Nous allons voir que si m est une mesure σ-finie, alors toute mesure absolument continue par rapport à m est de ce type : c'est le Théorème de Radon-Nikodym.

Proposition 3.1.4
Si $\mu \ll m$ alors $|\mu| \ll m$

Preuve.

Supposons que $m(A) = 0$. D'après le Corollaire 2.2.5 on a

$$|\mu|(A) = \sup \{|\mu(E)| + |\mu(A \backslash E)| : E \in \mathcal{M} \text{ et } E \subset A\}$$

Soit $E \in \mathcal{M}$ tel que $E \subset A$ et donc $m(E) = 0$ et $m(A \backslash E) = 0$ (car $A \backslash E \subset A$), alors $\mu(E) = 0$ et $\mu(A \backslash E) = 0$ puisque $\mu \ll m$. Il en résulte que $|\mu|(A) = 0$, en passant à la borne supérieure. ■

Corollaire 3.1.5

$\mu \ll m$ si et seulement si $\mu^+ \ll m$ et $\mu^- \ll m$.

Preuve.

Supposons que $\mu \ll m$, alors $|\mu| \ll m$. Soit $A \in \mathcal{M}$ avec $m(A) = 0$, alors $|\mu|(A) = 0$ et $\mu(A) = 0$ ce qui implique que $\mu^+(A) = 0$ et $\mu^-(A) = 0$ puisque $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ et $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

Inversement, si $\mu^+, \mu^- \ll m$, alors $m(A) = 0$ implique $\mu^+(A) = \mu^-(A) = 0$ et donc $\mu(A) = 0$, ce qui suffit. ■

Proposition 3.1.6

Soient m, μ deux mesures sur $(X, \mathcal{M})$ avec m positive et μ signée finie. Alors $\mu \ll m$ si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0), \quad (\exists \delta > 0), \quad \forall A \in \mathcal{M} : m(A) \leq \delta \Longrightarrow |\mu(A)| \leq \varepsilon \tag{3.1}$$

Preuve.

($\Longleftarrow$) Supposons que (3.1) est vrai et soit $A \in \mathcal{M}$ avec $m(A) = 0$ alors $0 = m(A) \leq \delta$ pour tout δ et donc

$$(\forall \varepsilon > 0), \quad |\mu(A)| \leq \varepsilon$$

Ceci entraîne $\mu(A) = 0$ et alors $\mu \ll m$.

($\Longrightarrow$) Supposons la propriété (3.1) fausse, alors

$$(\exists \varepsilon > 0), \quad (\forall \delta > 0), \quad (\exists A_\delta \in \mathcal{M}) : \quad m(A) \leq \delta \text{ et } |\mu(A)| > \varepsilon \tag{3.2}$$

Si on pose $\delta = \dfrac{1}{2^n}$ on obtient

$$(\forall n \geq 1), \quad (\exists A_n \in \mathcal{M}) : \quad m(A_n) \leq \tfrac{1}{2^n} \text{ et } |\mu(A_n)| > \varepsilon$$

Posons $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Puisque

$$A \subset \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k, \qquad \text{pour tout } n \geq 1$$

on déduit que

$$m(A) \;\leq\; m\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \;\leq\; \sum_{k=n}^{+\infty} m(A_k) \;\leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Par le passage à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ on trouve $m(A) = 0$.

La mesure positive $|\mu|$ est finie car μ est finie (voir Proposition 2.2.7) et la suite $\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)_{n\geq 1}$ est décroissante. Ainsi, la continuité décroissante pour la mesure positive $|\mu|$ donne

$$|\mu|(A) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} |\mu|\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \geq \lim_{n\longrightarrow+\infty} |\mu|(A_n) \geq \lim_{n\longrightarrow+\infty} |\mu(A_k)| > \varepsilon > 0.$$

$m(A) = 0$ et $|\mu|(A) > 0$ implique que $|\mu|$ n'est pas absolument continue par rapport à m, alors μ n'est pas absolument continue par rapport à m en vertu de la Proposition 3.1.4.

■

Remarque 3.1.7

Si μ est une mesure positive infinie, alors l'imlication ($\Longrightarrow$) dans la proposition précédente est faux en général. Il suffit de prendre $m = \lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mu(A) = \int_A |t|\, d\lambda(t)$. On sait que $\mu \ll \lambda$. D'autre part, la suite $\left(\left[n, n+\frac{1}{n}\right]\right)_{n\geq 1}$ vérifie

$$\mu\left(\left[n, n+\frac{1}{n}\right]\right) = \int_n^{n+\frac{1}{n}} t dt = 1 + \frac{1}{n^2} > 1.$$

Alors que

$$\lambda\left(\left[n, n+\frac{1}{n}\right]\right) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

D'où la condition (3.2), la négation de (3.1), est vérifie.

Mesures étrangères (ou singulières)

Définition 3.1.8

Soient μ et ν deux mesures signées sur $(X, \mathcal{M})$. On dit que μ et ν sont étrangères, et l'on écrit $\mu \perp \nu$, s'il existe $A \in \mathcal{M}$ telle que A est μ-nul et A^c est ν-nul.

Remarque 3.1.9

Si μ est une mesure positive, alors A est μ-nul signifie que $\mu(A) = 0$.

Exemple 3.1.10

Soit μ une mesure signée avec une décomposition de Hahn (P, N) et la décomposition de Jordan (μ^+, μ^-). On a donc $\mu^+ \perp \mu^-$. En effet, puisque P est positive et N négative on a $\mu^+(N) = 0$ et $\mu^-(N^c) = \mu^-(P) = 0$ (voir Théorème 2.1.14).

Proposition 3.1.11

Soit m une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$ et μ, μ_1, μ_2 des mesures signées (μ_1 et μ_2 finies) sur $(X, \mathcal{M})$. On a :

1) $\mu_1 \perp \mu_2 \Longrightarrow |\mu_1| \perp |\mu_2|$

2) $\mu_1 \perp \mu$ et $\mu_2 \perp \mu \Longrightarrow (\mu_1 + \mu_2) \perp \mu$

3) $\mu_1 \ll m$ et $\mu_2 \ll m \Longrightarrow (\mu_1 + \mu_2) \ll m$

4) $\mu_1 \ll m$ et $\mu_2 \perp m \Longrightarrow \mu_1 \perp \mu_2$

5) Si $\mu \ll m$ et $\mu \perp m$ la mesure μ est nulle.

Preuve.

1) Exercice.

2) Il existent $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ tels que A_1, A_2 sont μ-nuls, A_1^c est μ_1-nul et A_2^c est μ_2-nul. Par la Proposition 2.1.8 on voit que la partie $A = A_1 \cup A_2$ est μ-nul. Soit $E \in \mathcal{M}$, $E \subset A^c = A_1^c \cap A_2^c$ alors que $E \subset A_1^c$ et $E \subset A_2^c$ ce qui donne

$$(\mu_1 + \mu_2)(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E) = 0.$$

Donc A^c est $(\mu_1 + \mu_2)$-nul.
3) est simple car si $m(A) = 0$ on a $\mu_1(A) = 0$ et $\mu_2(A) = 0$ donc

$$(\mu_1 + \mu_2)(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A) = 0.$$

4) Si $\mu_2 \perp m$ il existe $A \in \mathcal{M}$ tel que A est μ_2-nul et $m(A^c) = 0$. Il suffit de montrer que A^c est μ_1-nul. Soit $E \in \mathcal{M}$ avec $E \subset A^c$ donc $m(E) = 0$, comme $\mu_1 \ll m$ on obtient $\mu_1(E) = 0$.
5) Si $\mu \ll m$ et $\mu \perp m$, alors d'après 4) on a $\mu \perp \mu$. Donc il existe $A \in \mathcal{M}$ tel que A est μ-nul et A^c est μ-nul, ceci implique que pour tout $E \subset A \cup A^c = X$ vérifier $\mu(E) = 0$ et donc μ est nulle. ∎

3.2 Le Théorème de Radon-Nikodym

Théorème 3.2.1 *(de Radon-Nikodym)[1]*
Soit m, μ deux mesures sur $(X, \mathcal{M})$ telles que m est positive σ-finie et μ est signée σ-finie avec $\mu \ll m$. Alors il existe une unique (m-presque par tout) fonction réelle intégrable $f \in L^1(m)$ (f mesurable positive si μ est positive σ-finie), telle que pour tout $A \in \mathcal{M}$

$$\mu(A) = \int_A f dm. \tag{3.3}$$

Dans ce cas on écrit $\mu = f.m$

En général, f est noté par $\dfrac{d\mu}{dm}$ et on dit que c'est une dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à m.

L'hypothèse de σ-finitude dans le théorème précédent est nécessaire comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.2.2
Posons $m = c$ la mesure de comptage et $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesguesur définies sur $\mathbb{R}$.

On sait que c n'est pas σ-finie car $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. On a $\lambda \ll c$ car si $c(A) = 0$ on a $A = \emptyset$ et $\lambda(\emptyset) = 0$. Supposons qu'elle existe une fonction $f \in L^1(c)$ telle que

$$\lambda(A) = \textstyle\int_A f dc, \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$0 = \lambda(\{x\}) = \int_{\{x\}} f dc = f(x) \int_{\{x\}} dc = f(x) c(\{x\}) = f(x)$$

on devrait donc avoir $\lambda(A) = \int_A 0 dc = 0$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, contradiction. Alors la mesure de Lebesgue n'admet pas une dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de comptage.

Proposition 3.2.3

Soient m, μ et μ' trois mesures positives σ-finies sur $(X, \mathcal{M})$ telles que $\mu \ll m$ et $\mu' \ll m$. Alors

$$\frac{d(\mu + \mu')}{dm} = \frac{d\mu}{dm} + \frac{d\mu'}{dm}, \ m\text{-}p.p$$

Preuve.

Posons $f = \dfrac{d\mu}{dm}$ et $g = \dfrac{d\mu'}{dm}$ avec f et g des fonctions mesurables positives. D'après 3) dans la Proposition 3.1.11 on a $\mu + \mu' \ll m$. Alors pour utiliser le Théorème de Radon-Nikodym, il reste à montrer que la mesure positive $\mu + \mu'$ est σ-finie. Il existe $(A_n)_{n\geq 1}, (B_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}$ tels que

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mu(A_n) < \infty \\ \mu'(B_n) < \infty \end{cases} \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

Pour tout $n, m \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} (\mu + \mu')(A_n \cap B_m) &= \mu(A_n \cap B_m) + \mu'(A_n \cap B_m) \\ &\leq \mu(A_n) + \mu'(B_m) < \infty \end{aligned}$$

et aussi

$$\bigcup_{n,m=1}^{+\infty} (A_n \cap B_m) = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) \cap \left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} B_m \right) = X$$

Donc $\mu + \mu'$ est σ-finie.

D'après Radon-Nikodym, il existe une fonction positive mesurable h telle que pour tout $A \in \mathcal{M}$, on a

$$(\mu + \mu')(A) = \int_A h dm$$

D'autre part

$$(\mu + \mu')(A) = \mu(A) + \mu'(A) = \int_A (f + g) dm$$

Ce qui donne $f + g = h$, m-p.p, d'où

$$\frac{d(\mu + \mu')}{dm} = \frac{d\mu}{dm} + \frac{d\mu'}{dm}, \ m\text{-p.p}$$

■

3.3 Applications du Théorème de Radon-Nikodym

3.3.1 Caractère complet de $M(X)$

$M(X)$ est l'ensemble des mesures signées finies μ sur $(X, \mathcal{M})$. Dans la suite on utilisant le théorème de Radon-Nikodym pour donner une preuve simple du Théorème 2.2.9 dit que $M(X)$ est un espace de Banach muni de la norme variation totale.

Lemme 3.3.1

Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(X, \mathcal{M})$ (i.e. $\mathbb{P}$ est une mesure positive avec $\mathbb{P}(X) = 1$). Alors l'application

$$\Psi : L^1(\mathbb{P}) \longrightarrow M(X), \quad \Psi(f) = \mu = f.\mathbb{P},$$

est une isométrie linéaire.

Preuve.

L'application Ψ est linéaire car pour tout $f, g \in L^1(\mathbb{P})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $A \in \mathcal{M}$ on a

$$\Psi(\alpha f + \beta g)(A) = \int_A (\alpha f + \beta g) d\mathbb{P} = \alpha \int_A f d\mathbb{P} + \beta \int_A g d\mathbb{P} = \alpha \Psi(f)(A) + \beta \Psi(g)(A).$$

D'après l'Exemple 2.2.2, pour tout $f \in L^1(\mathbb{P})$ on a

$$\|\Psi(f)\|_{M(X)} = \|\mu\| = |\mu|(X) = \int_X |f|\, d\mathbb{P} = \|f\|_{L^1(\mathbb{P})}.$$

■

Preuve. (de Théorème 2.2.9)

Soit $(\mu_n)_n$ une suite de Cauchy dans $M(X)$. S'il y a une infinité des termes μ_n qui sont nulle, la suite converge vers 0. Sinon, on peut supposer $\mu_n \neq 0$ pour tout $n \geq 1$. Posons alors

$$\mathbb{P} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \|\mu_n\|} |\mu_n|.$$

$\mathbb{P}$ est une probabilité car

$$\mathbb{P}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \|\mu_n\|} \|\mu_n\| = 1.$$

D'autre part $\mu_n \ll \mathbb{P}$ pour tout $n \geq 1$ car si $A \in \mathcal{M}$ avec $\mathbb{P}(A) = 0$ on a $|\mu_n|(A) = 0$ pour tout $n \geq 1$ ce qui implique que $\mu_n^+(A) = 0$ et $\mu_n^-(A) = 0$ donc $\mu_n(A) = 0$ pour tout $n \geq 1$. D'après le théorème de Radon-Nikodym il existe $f_n \in L^1(\mathbb{P})$ tel que

$$\mu_n(A) = \int_A f_n d\mathbb{P}, \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et } A \in \mathcal{M}.$$

La suite $(f_n)_n$ est de Cauchy dans l'espace de Banach $L^1(\mathbb{P})$ puisque par le lemme précèdent on a

$$\|f_n - f_m\|_{L^1(\mathbb{P})} = \|\Psi(f_n) - \Psi(f_m)\|_{M(X)} = \|\mu_n - \mu_m\|,$$

et donc $f_n \longrightarrow f \in L^1(\mathbb{P})$. De nouveau par le lemme précèdent on a $\mu_n \longrightarrow \mu = f.\mathbb{P} \in M(X)$ car

$$\|\mu_n - \mu\| = \|\Psi(f_n) - \Psi(f)\|_{M(X)} = \|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{P})} \longrightarrow 0.$$

■

Théorème 3.3.2

Soit m une mesure positive σ-finie sur $(X, \mathcal{M})$. Soit $\mathcal{A}_m$, constitué par les mesures signées *finies $\mu \in M(X)$ absolument continues par rapport à m c-à-d*

$$\mathcal{A}_m = \{\mu \in M(X) : \mu \ll m\}$$

1) $\mathcal{A}_m$ est un sous espace fermé de $M(X)$

2) Il existe un isomorphisme isométrique entre l'espace de Banach $L^1(m)$ et l'espace $\mathcal{A}_m$.

Preuve.

1) $\mathcal{A}_m$ est un sous espace vectoriel de $M(X)$ car si $\mu \ll m$ et $\nu \ll m$ alors $\alpha\mu + \beta\nu \ll m$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathcal{A}_m$ convergeant (au sens de la norme de $M(X)$) vers $\mu \in M(X)$ c-à-d

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|\mu_n - \mu\| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} |\mu_n - \mu|(X) = 0.$$

Pour tout $A \in \mathcal{M}$, la suite réelle $(\mu_n(A))_{n\geq 1}$ converge vers $\mu(A)$ car

$$|\mu_n(A) - \mu(A)| \leq |\mu_n - \mu|(A) \leq |\mu_n - \mu|(X) \longrightarrow 0.$$

Soit maintenant $A \in \mathcal{M}$ avec $m(A) = 0$, donc, puisque $\mu_n \ll m$ on a $\mu_n(A) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et alors $\mu(A) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu_n(A) = 0$, ce qui montre que $\mu \ll m$ d'où $\mu \in \mathcal{A}_m$.

2) Définissons l'application $\Phi : L^1(m) \longrightarrow \mathcal{A}_m$ par $\Phi(f) = \mu = f.m$. Cette application est une isométrie linéaire (voir la preuve du Lemme 3.3.1), Φ est surjective car si $\mu \in \mathcal{A}_m$ on a $\mu \ll m$ et m est σ-finie, alors par le Théorème de Radon-Nikodym il existe $f \in L^1(m)$ telle que $\mu = f.m = \Phi(f)$. ■

3.3.2 Décomposition de Lebesgue d'une mesure signée

Théorème 3.3.3 *[1]*

Soit m, μ deux mesures sur $(X, \mathcal{M})$ telles que m positive σ-finie et μ est signée σ-finie. Alors il existe un unique couple de mesures signées μ_a et μ_s (positives si μ est positive σ-finie) sur $(X, \mathcal{M})$ telles que

$$\mu = \mu_a + \mu_s \quad \textit{avec} \quad \begin{cases} \mu_a \ll m \\ \mu_s \perp m \end{cases} \tag{3.4}$$

De plus on a $\mu_a \perp \mu_s$(d'après 4) de la Proposition 3.1.11.
Le couple (μ_a, μ_s) s'appelle la décomposition de Lebesgue de μ relative à m.

L'exemple suivant montre que l'on ne peut emettre les hypothèses de σ-finitude

Exemple 3.3.4
Posons $m = \lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\mu = c$ la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$. (la mesure c n'est pas σ-finie). Si l'on avait $c = \mu_a + \mu_s$ avec

$$\begin{cases} \mu_a \ll \lambda \\ \mu_s \perp \lambda \\ \mu_a \perp \mu_s \end{cases}$$

On devrait avoir

$$\mu_a(\{x\}) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

car $\mu_a \ll \lambda$ et $\lambda(\{x\}) = 0$. On aurait donc

$$\mu_s(\{x\}) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Puisque $\mu_a \perp \mu_s$, il existe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\mu_a(A^c) = 0$ et $\mu_s(A) = 0$, dans ce cas, $A = \emptyset$ car si $x \in A$ on a

$$\mu_s(A) \geq \mu_s(\{x\}) = 1, \text{ impossible car } \mu_s(A) = 0.$$

Il faudrait donc $\mu_a(A^c) = \mu_a(\mathbb{R}) = 0$ d'où la mesure positive μ_a est nulle. Ainsi, on aurait

$$\mu_s = c \perp \lambda.$$

Donc il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $c(B) = 0$ et $\lambda(B^c) = 0$. Ce qui implique que $B = \emptyset$ et $\lambda(\mathbb{R}) = 0$, contradiction, donc la mesure c n'admet pas de décomposition de Lebesgue relative à λ.

3.3.3 Décomposition polaire d'une mesure signée

Lemme 3.3.5 *(Lemme des moyennes)*

Soit m une mesure positive finie sur $(X, \mathcal{M})$ et F un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$. Soit $g \in L^1(m)$ telle que

$$M_A(g) = \left(\frac{1}{m(A)} \int_A g dm \right) \in F,$$

pour tout $A \in \mathcal{M}$ avec $m(A) \neq 0$. Alors

$$g(x) \in F, \quad \textit{pour } m\textit{-presque par tout } x \in X.$$

Preuve.

On va montrer que

$$m(\{x \in X : g(x) \notin F\}) = 0,$$

ceci traduit par $m\left[g^{-1}(F^c)\right] = 0$.

Comme F^c est un ouvert dans $\mathbb{R}$ il est réunion dénombrable d'intervalles ouverts $I_1, I_2, ...$

$$F^c = \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n.$$

On a

$$m\left[g^{-1}(F^c)\right] = m\left[\bigcup_{n=1}^{+\infty} g^{-1}(I_n)\right] \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m\left[g^{-1}(I_n)\right].$$

Il suffit donc de démontrer que

$$m\left[g^{-1}(I_n)\right] = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Possons $A_n = g^{-1}(I_n)$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $j \geq 1$ tel que $m(A_j) \neq 0$, alors par hypothèse $M_{A_j}(g) \in F$ et d'autre part, si $x \in A_j$ on a $g(x) \in I_j =]a_j - r_j, a_j + r_j[$ avec $a_j \in \mathbb{R}$, $r_j > 0$, et donc $|g(x) - a_j| < r_j$. Par intégration on obtient

$$\begin{aligned} \left|M_{A_j}(g) - a_j\right| &= \left| \frac{1}{m(A_j)} \int_{A_j} (g - a_j) dm \right| \\ &\leq \frac{1}{m(A_j)} \int_{A_j} |g - a_j| \, dm \\ &< \frac{1}{m(A_j)} \int_{A_j} r_j dm = r_j. \end{aligned}$$

Cela signifie que $M_{A_j}(g) \in]a_j - r_j, a_j + r_j[\subset F^c$, d'où $M_{A_j}(g) \in F^c$. On aboutit donc à une contradiction, donc $m(A_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et le résultat est démontré. ■

Proposition 3.3.6

Soit μ une mesure signée finie sur $(X, \mathcal{M})$. Il existe une fonction $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que

$$\begin{cases} |h(x)| = 1, \quad |\mu| \text{-}p.p \\ et \\ \mu = h.\,|\mu| \end{cases}$$

Preuve.

La mesure positive $|\mu|$ est finie (voir Proposition 2.2.7) et $\mu \ll |\mu|$ (voir l'Exemple 3.1.3). Par le Théorème de Radon-Nikodym il existe $h \in L^1(|\mu|)$ telle que $\mu = h.\,|\mu|$.

Reste à voir que $|h(x)| = 1$, $|\mu|$-p.p.

Montrons d'abord que $|h| \geq 1$, $|\mu|$-p.p. Pour $r > 0$ on pose $A_r = \{x \in X : |h(x)| < r\}$.

Par définition on a

$$|\mu|\,(A_r) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(B_n)| : (B_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{M} \text{ partition de } A_r \right\}.$$

Soit $(B_n)_{n\geq 1}$ une partition de A_r,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(B_n)| &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \int_{B_n} hd\,|\mu| \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{B_n} |h|\, d\,|\mu| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{B_n} rd\,|\mu| = r \sum_{n=1}^{+\infty} |\mu|\,(B_n), \ \text{(car } B_n \subset A_r) \\ &= r\,|\mu| \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \right) = r\,|\mu|\,(A_r). \end{aligned}$$

l'inégalité $\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(B_n)| \leq r\,|\mu|\,(A_r)$ valable pour tout partition $(B_n)_{n\geq 1}$ de A_r, on en déduit

$$|\mu|\,(A_r) \leq r\,|\mu|\,(A_r).$$

Si $r < 1$, ceci implique que $|\mu|(A_r) = |\mu|\{|h| < r\} = 0$, alors $|\mu|\{|h| < 1\} = 0$. Ainsi $|h| \geq 1$, $|\mu|$-p.p.

D'un autre côté, si $\mu(A) \neq 0$ on a

$$|M_A(h)| = \left| \frac{1}{|\mu|(A)} \int_A h d\mu \right| = \frac{1}{|\mu|(A)} |\mu(A)| \leq \frac{1}{|\mu|(A)} |\mu|(A) = 1.$$

On peut donc utiliser le lemme des moyennes (où $[-1, 1]$ remplace F), et en conclure que $|h| \leq 1$, $|\mu|$-p.p. ■

3.4 Exercices de chapitre 3

Exercice 3.1

Soit X un ensemble dénombrable et soit $\nu = \delta_a - 3\delta_b$ où δ_a et δ_b sont les mesures de Dirac au points $a, b \in X$ avec $a \neq b$.

1) Montrer que la mesure signée ν admet une dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la mesure comptage μ_c sur $\mathcal{P}(X)$. Déterminer $\dfrac{d\nu}{d\mu_c}$

2) Soit $d \in X$, avec $d \neq a$ et $d \neq b$.

A) Montrer que ν n'est pas absolument continue par rapport à δ_d

B) Démontrer qu'il n'existe aucune fonction mesurable $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifier

$$\nu(A) = \textstyle\int_A h d\delta_d, \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{P}(X).$$

Exercice 3.2

Soient η, μ et ν trois mesures positives σ-finies sur $(X, \mathcal{M})$.

Montrer que si $\eta \ll \mu$ et $\mu \ll \nu$ alors $\eta \ll \nu$ et

$$\frac{d\eta}{d\nu} = \frac{d\eta}{d\mu}\frac{d\mu}{d\nu}, \quad \nu\text{-p.p.}$$

Exercice 3.3

Soit μ une mesure positive σ-finie sur $(X, \mathcal{M})$ et soit E, F deux éléments de $\mathcal{M}$. On définit μ_E sur $\mathcal{M}$ par

$$\mu_E(A) = \mu(E \cap A), \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{M}.$$

1) Montrer que μ_E une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$ et qu'elle vérifie $\mu_E \ll \mu$.
Calculer $\dfrac{d\mu_E}{d\mu}$.
2) Montrer que $\mu_E \ll \mu_F$ si et seulement si $\mu(E \backslash F) = 0$.

Exercice 3.4

Soient m, μ et ν trois mesures positives σ-finies sur $(X, \mathcal{M})$ telles que

$$\mu(A) = \textstyle\int_A g dm, \quad \nu(A) = \int_A f dm, \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{M},$$

où f et g sont deux fonctions mesurables positives vérifiant

$$m(\{fg > 0\}) \neq 0, \quad \text{et} \quad \{f = 0\} \subset \{g > 0\}.$$

1) Montrer que pour tout $B \in \mathcal{M}$ avec $B \subset P = \{fg > 0\}$ on a

$$m(B) = \int_B \frac{1}{g} d\mu.$$

2) Montrer que la décomposition de Lebesgue de la mesure ν par rapport à μ est donnée par les mesures ν_0 et ν_1 avec

$$\nu_0(A) = \int_A \frac{f}{g} \chi_P d\mu, \quad \nu_1(A) = \nu(A \cap G^C), \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{M}$$

où $G = \{g > 0\}$.

Exercice 3.5

Soient $(X, \mathcal{M}, m)$ un espace mesuré positive σ-fini, $A, B, C \in \mathcal{M}$ avec $m(A), m(B) < \infty$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha\beta \neq 0$.
Soit μ la mesure signée définie sur $(X, \mathcal{M})$ par

$$\mu(E) = \alpha.m(A \cap E) + \beta.m(B \cap E), \quad E \in \mathcal{M}$$

Soit η une autre mesure positive définie sur $(X, \mathcal{M})$ par

$$\eta(E) = m(C \cap E), \quad E \in \mathcal{M}$$

1) Déterminer $\frac{d\mu}{dm}$, la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à m.

2) Supossons que $m\left[(A \cup B) \backslash C\right] = 0$

a) Montrer que pour tout $E \in \mathcal{M}$ on ame

$$\mu(E) = \alpha.m(E \cap A \cap C) + \beta.m(E \cap B \cap C)$$

b) Déduire que μ est absolument continue par rapport a η

c) Déterminer $\frac{d\mu}{d\eta}$, la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à η.

Chapitre 4

Mesure de Radon

4.1 Forme linéaire sur $C(K)$

Définition 4.1.1 *(forme linéaire positive).*

Soit (K, d) un espace métrique compact. Une forme linéaire positive sur $C(K)$ est une application linéaire $L : C(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ dont les valeurs sont positives sur les fonctions positives c'est-à-dire

$$\forall f \in C(K) : f \geq 0 \Longrightarrow L(f) \geq 0.$$

Proposition 4.1.2

Soient (K, d) un espace métrique compact et μ une mesure positive finie sur les borélienne de K, (notés $\mathcal{B}(K)$). Alors la forme linéaire $T_\mu : C(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\langle T_\mu, f\rangle = T_\mu(f) := \int_X f d\mu,$$

est positive et continue de norme $\|T_\mu\| = \mu(K)$.

Preuve.

Si $f \geq 0$ alors $\int_K f d\mu \geq \int_K 0 d\mu = 0$. Pour tout $f \in C(K)$,

$$|T_\mu(f)| \leq \int_K |f| \, d\mu \leq \|f\|_\infty \, \mu(K).$$

Donc T_μ est continu avec $\|T_\mu\| \leq \mu(K)$. D'autre part, si on considère $f_0 \equiv 1 \in C(K)$ on obtient

$$\|T_\mu\| \geq |T_\mu(f_0)| = \mu(K).$$

Ce qui donne l'égalité requise. ■

Proposition 4.1.3

Toute forme linéaire positive T sur $C(K)$ est continue de norme $\|T\| = T(1)$.

Preuve.

Soit T une forme linéaire positive sur $C(K)$. Vérifions d'abord que T est croissante, pour tout $g, f \in C(K)$ tels que $g \leq f$ on a $T(f-g) \geq 0$. Par linéarité de T on trouve $T(g) \leq T(f)$.

Montrons que T est continue. Soit $f \in C(K)$, puisque $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in K} |f(x)|$ on a $-\|f\|_\infty \leq f \leq \|f\|_\infty$. Par la croissance et la linéarité de T on obtient

$$-\|f\|_\infty T(1) \leq T(f) \leq \|f\|_\infty T(1).$$

En fin, $|T(f)| \leq \|f\|_\infty T(1)$. Ce qui donne la continuité de la forme linéaire T, de plus on a $\|T\| \leq T(1)$. pour la deuxième inégalité,

$$\|T\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |T(f)| \geq |T(1)| = T(1).$$

■

4.2 Théorème de représentation de Riesz

Le théorème de représentation de Riesz établit sous certaines hypothèses la réciproque du Proposition 4.1.2 : on se donne une forme linéaire positive sur $C(K)$ et on veut savoir si elle peut être représentée comme intégrale par rapport à une mesure positive sur $\mathcal{B}(K)$, et si oui si la mesure est unique. La démonstration repose sur les résultats en bas.

Soit T une forme linéaire positive sur $C(K)$. La notation

$$f \prec O,$$

signifie que O est ouvert, que f appartient à $C(K)$, que $0 \leq f \leq 1$ et enfin que le support de f est inclus dans O c'est-à-dire $supp(f) \subset O$.

Proposition 4.2.1 *[16, Theorem 2.13]*
Soit $O_1, ..., O_n$ des sous-ensembles ouverts d'un espace localement compact séparé X et K un sous-espace compact tel que

$$K \subset O_1 \cup ... \cup O_n.$$

Il existe des fonctions $h_i \prec O_i (i = 1, ..., n)$ telles que

$$h_1(x) + ... + h_n(x) = 1, \quad x \in K. \tag{4.1}$$

C'est la relation (4.1) qui donne à la collection $(h_1, ..., h_n)$ le nom de partition de l'unité de K, subordonnée au recouvrement $\{O_1, ..., O_n\}$.

Pour commencer la construction de la mesure positive μ sur $\mathcal{B}(K)$, nous construisons une fonction d'ensemble μ_0 sur la collection $\mathcal{O}$ de sous-ensembles ouverts de K par

$$\mu_0(O) = \sup \{T(f) : f \prec O\}. \tag{4.2}$$

Clairement, μ_0 est monotone. Ensuite, nous définissons, pour tout $E \subset K$

$$\mu^*(E) = \inf \{\mu_0(O) : E \subset O \in \mathcal{O}\}. \tag{4.3}$$

Bien sûr, $\mu^*(O) = \mu_0(O)$ quand O est ouvert.

Lemme 4.2.2

La fonction ensembliste μ^* est une mesure extérieure sur K.

Preuve.

Il suffit de montrer que

$$\mu^*(\bigcup_{i\geq 1} E_n) \leq \sum_{i\geq 1} \mu^*(E_n), \tag{4.4}$$

pour tout $E_1, E_2, ...$ sous-ensembles arbitraires de X. Montrons d'abord que pour tout $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ on a

$$\mu^*(O_1 \cup O_2) \leq \mu^*(O_1) + \mu^*(O_2). \tag{4.5}$$

Choisissons $g \prec O_1 \cup O_2$. Grâce au Proposition 4.2.1, existent des fonctions h_1 et h_2 telles que

$$h_i \prec O_i \quad \text{et} \quad h_1(x) + h_2(x) = 1, \text{ pour tout } x \in supp(g).$$

De là $h_i g \prec O_i$ et $g = h_1 g + h_2 g$. Par suite

$$T(g) = T(h_1 g) + T(h_2 g) \leq \mu^*(O_1) + \mu^*(O_2). \tag{4.6}$$

Mais la relation (4.6) ayant lieu pour tout $g \prec O_1 \cup O_2$, on en déduit (4.5).

Si $\mu^*(E_i) = \infty$ pour un i au moins dans (4.4), cette dernière relation est triviale.

Supposons donc que pour tout i, $\mu^*(E_i) < \infty$. Choisissons $\varepsilon > 0$. Grâce à (4.3), il existe des ouverts $O_i \supset E_i$, tels que

$$\mu_0(O_i) < \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}, \quad i = 1, 2, ...$$

Définissons $O = \bigcup_{i=1}^{+\infty} O_i$ et choisissons $f \prec O$. Comme f a un support compact, on voit que pour un certain entier n,

$$f \prec O_1 \cup ... \cup O_n.$$

Par récurrence appliquée à (4.5), on obtient donc

$$T(f) \leq \mu_0(O_1 \cup ... \cup O_n) \leq \mu_0(O_1) + ... + \mu_0(O_n) \leq \sum_{i\geq 1} \mu^*(E_i) + \varepsilon.$$

Puisque cette inégalité est vraie pour tout $f \prec O$ et comme $\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \subset O$, il s'ensuit

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) \leq \mu_0(O) \leq \sum_{i\geq 1} \mu^*(E_i) + \varepsilon.$$

ce qui établit (4.4) car ε est arbitraire. ■

Lemme 4.2.3

μ^* est une mesure extérieure métrique sur (K, d).

Preuve.

Soit $E_1, E_2 \subset X$ et supposons que

$$d(E_1, E_2) \geq 4\varepsilon > 0.$$

On prend $\delta > 0$. Il existe un ouvert $O \supset E = E_1 \cup E_2$, tel que

$$\mu_0(O) \leq \mu^*(E) + \delta,$$

et possons

$$O_j = O \cap \{x \in K : d(x, E_j) < \varepsilon\}.$$

Il s'ensuit que

$$E_j \subset O_j, \quad O_1 \cup O_2 \subset O, \quad O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

Maintenant, chaque fois quand $f \prec O_1 \cup O_2$, on a $f = f_1 + f_2$ avec $f_j = f|_{O_j} \prec O_j$, ce qui implique que

$$\mu_0(O_1) + \mu_0(O_2) = \mu_0(O_1 \cup O_2).$$

Par conséquent

$$\mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) \leq \mu_0(O_1) + \mu_0(O_2) = \mu_0(O_1 \cup O_2) \leq \mu_0(O).$$

Donc

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) - \delta, \quad \text{pour tout } \delta > 0,$$

qui, avec la sous-additivité de μ^*, donne l'identité souhaitée

$$\mu^*(E) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2).$$

Pour $f \in C(K)$, la notation

$$f \preceq O, \tag{4.7}$$

signifie que O est une partie ouvert dans K, que $0 \leq f \leq 1$ et que $f = 0$ dans $K \backslash O$. La notation

$$f \succeq F,$$

signifie que F est une partie fermé dans K, que $0 \leq f \leq 1$ et que $f = 1$ dans F. La restriction de μ à $\mathcal{B}(X)$ est une mesure notée par μ (voir Théorème 1.2.19). On pose alors

$$\mu(O) = \sup\{T(f) : f \preceq O\}, \quad O \text{ ouvert de } K. \tag{4.8}$$

■

Lemme 4.2.4

Les égalités (4.2) et (4.8) coïncident

Preuve.

On prend $f \preceq O$. Puis considérons la suite $(f_n)_n$ définie par $f_n = \xi_n(f)$, tel que

$$\xi_n(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq s \leq \dfrac{1}{n}, \\ 2s - \dfrac{2}{n}, & \text{si } \dfrac{1}{n} \leq s \leq \dfrac{2}{n}, \\ s & s \geq \dfrac{2}{n}. \end{cases}$$

Il s'ensuit que $f_n \prec O$, la suite $(f_n)_n$ est croissante et $f_n \longrightarrow f$ uniformément ; par conséquent la suite $(T(f_n))_n$ est croissante et $T(f_n) \longrightarrow T(f)$. ∎

En utilisant (4.8), nous pouvons établir ce qui suit.

Lemme 4.2.5

Si $F \subset K$ est une partie compact de K, alors

$$\mu(F) = \inf \{T(f) : f \in C(K) \text{ et } f \geq \chi_F\}. \tag{4.9}$$

Preuve.

Notons le côté droit de (4.9) $\mu_1(F)$. Il suffit de prendre l'infimum de $T(f)$ sur $f \succeq F$. Si en comparant cela avec (4.7), on a

$$f \succeq F \iff 1 - f \preceq K \backslash F,$$

donc

$$\begin{aligned} \mu_1(F) &= \inf \{T(1) - T(g) : g \preceq K \backslash F\} \\ &= \mu(K) - \mu(K \backslash F). \end{aligned}$$

D'autre part, puisque F est μ^*-mesurable on a

$$\mu(K) + \mu(K \backslash F) = \mu(K),$$

donc (4.9) est prouvée. ■

Nous sommes maintenant prêts à prouver le théorème de représentation de Riesz pour une forme linéaire positive sur $C(K)$.

Théorème 4.2.6

Soit (K, d) un espace métrique compact et soit T une forme linéaire positive sur $C(K)$. Il existe une unique mesure μ positive finie sur la tribu borilienne $\mathcal{B}(K)$ telle que

$$T(f) = \int_K f d\mu, \quad \forall f \in C(K). \tag{4.10}$$

De plus on a $\|T\| = \mu(K)$.

Preuve.

Nous avons construit une mesure positive sur $\mathcal{B}(K)$, ce qui est finie puisque (4.9) implique $\mu(K) = T(1)$. Nous montrons ensuite que (4.10) est vraie. Il suffit de vérifier cette égalité lorsque $f : K \longrightarrow [0, 1]$. Dans ce cas, on prend $N \in \mathbb{N}$ et définir

$$\varphi_n(x) = \min\left\{f(x), \frac{n}{N}\right\}, \quad 0 \leq n \leq N,$$
$$f_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x), \quad 0 \leq n \leq N.$$

Nous avons $\sum_n f_n = f$ et

$$\frac{1}{N}\chi_{F_n} \leq f_n \leq \frac{1}{N}\chi_{F_{n-1}}, \quad F_n = \left\{x \in K : f(x) \geq \frac{n}{N}\right\}.$$

Donc par intégration par rapport à la mesure μ, on obtient

$$\frac{1}{N}\mu(F_n) \leq \int_K f_n d\mu \leq \frac{1}{N}\mu(F_{n-1}). \tag{4.11}$$

Maintenant montrons que

$$\frac{1}{N}\mu(F_n) \leq T(f_n) \leq \frac{1}{N}\mu(F_{n-1}). \tag{4.12}$$

Pour cela, notons d'abord que si O un ouvert de K tel que $F_{n-1} \subset O$, alors $Nf_n \prec O$, ce qui donne

$$NT(f_n) \leq \mu_0(O).$$

Ceci implique la seconde inégalité de (4.12). D'autre part, $Nf_n \succeq F_n$, donc le Lemme 4.2.5 donne la première inégalité de (4.12). Si on sommant (4.11) et (4.12), on a

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mu(F_n) \leq \int_K f d\mu \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mu(F_n)$$
$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mu(F_n) \leq T(f_n) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mu(F_n).$$

Par conséquent

$$\left|T(f) - \int_K f d\mu\right| \leq \frac{1}{N}\mu(F_0) - \frac{1}{N}\mu(F_N) \leq \frac{1}{N}\mu(K).$$

En faisant $n \longrightarrow +\infty$, on trouve (4.10).

Seule l'unicité de μ reste à prouver. Pour voir ça, soit m une mesure positive finie définie sur $\mathcal{B}(K)$ telle que

$$T(f) = \int_K f dm, \quad \text{pour tout } f \in C(K). \tag{4.13}$$

Soit $F \subset K$ un compact dans K. On appliquant (4.13) sur les fonctions $f_n : K \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + n.dis(x, F)}, \quad x \in K, \ n \in \mathbb{N}.$$

La suite $(f_n)_n$ est décroissante et $f_n \longrightarrow \chi_F$. Par le théorème de convergence monotone on a

$$\int_K f_n d\mu \searrow \int_K \chi_F d\mu \quad \text{et} \quad \int_K f_n dm \searrow \int_K \chi_F dm.$$

Donc

$$T(f_n) \searrow \mu(F) \quad \text{et} \quad T(f_n) \searrow m(F).$$

Par conséquent

$$\mu(F) = m(F), \quad \text{pour tout compact } F \subset K.$$

Maintenant, par le Théorème 1.4.3, pour chaque mesure positive finie définie sur $\mathcal{B}(K)$, les boréliens de l'espace métrique compact K,

$$E \in \mathcal{B}(K) \Longrightarrow \mu(E) = \sup\left\{\mu(F), \ F \text{ compact}, \ K \subset E\right\}.$$

Cela prouve l'unicité. ■

4.3 Mesure de Radon, l'espace dual de $C(K)$

Définition 4.3.1

Soit (K,d) un espace métrique compact. On appelle mesure de Radon sur K toute forme linéaire continue sur $C(K)$. Dans ce cas pour tout mesure de Radon $T \in C(K)^*$ on a

$$\|T\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |T(f)| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |\langle T, f\rangle| \,.$$

Remarque 4.3.2

Le théorème de représentation de Riesz nous a permis d'identifier les mesure de Radon positives sur K aux mesures positives finies définie sur $\mathcal{B}(K)$. Alors si T est une mesure de Radon positive on a

$$\|T\| = T(1) = \mu(K).$$

Décomposition d'une mesure de Radon

Soit (K,d) un espace métrique compact et $T \in C(K)^*$ une mesure de Radon sur K. On défnit deux applications $T^+, T^- : C(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ comme suit. Si $f \in C(K)$ et $f \geq 0$ on a

$$T^+(f) = \sup\{T(g),\ 0 \leq g \leq f\}\,,$$
$$T^-(f) = -\inf\{T(g),\ 0 \leq g \leq f\}\,.$$

Et si $f \in C(K)$ quelconque on pose $f_+ = \sup\{f, 0\}$ et $f_- = \sup\{-f, 0\}$, alors on définit

$$T^+(f) = T^+(f_+) - T^+(f_-),$$
$$T^-(f) = T^-(f_+) - T^-(f_-).$$

Proposition 4.3.3

T^+ et T^- sont des mesures de Radon positives avec $T = T^+ - T^-$. De plus on a

$$\|T\| = \left\|T^+\right\| + \left\|T^-\right\| = T^+(1) + T^-(1). \tag{4.14}$$

Preuve.

Montrons la linéarité de T^+, soit $f_1, f_2 \in C(K)$ positives. On a

$$T^+(f_1) + T^+(f_2) \leq T^+(f_1 + f_2), \tag{4.15}$$

puisque d'aprés l'inclusion

$$\{T(g_1 + g_2),\ 0 \leq g_1 \leq f_1 \text{ et } 0 \leq g_2 \leq f_2\} \subset \{T(g_1 + g_2),\ 0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2\},$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} T^+(f_1) + T^+(f_2) &= \sup\{T(g_1) + T(g_2),\ 0 \leq g_1 \leq f_1 \text{ et } 0 \leq g_2 \leq f_2\} \\ &= \sup\{T(g_1 + g_2),\ 0 \leq g_1 \leq f_1 \text{ et } 0 \leq g_2 \leq f_2\} \\ &\leq \sup\{T(g_1 + g_2),\ 0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2\} \\ &= T^+(f_1 + f_2). \end{aligned}$$

Pour l'inégalité inverse de (4.15). Soit $\varepsilon > 0$, il existe $g_\varepsilon \in C(K)$, $0 \leq g_\varepsilon \leq f_1 + f_2$ avec

$$T(g_\varepsilon) \geq T^+(f_1 + f_2) - \varepsilon. \tag{4.16}$$

Il est facile de voir que $g_\varepsilon = \inf\{g_\varepsilon, f_1\} + (g_\varepsilon - f_1)_+$. Comme

$$\inf\{g_\varepsilon, f_1\} \leq f_1 \quad \text{et} \quad (g_\varepsilon - f_1)_+ \leq f_2,$$

on a

$$T\left(\inf\{g_\varepsilon, f_1\}\right) \leq T^+(f_1) \quad \text{et} \quad T\left((g_\varepsilon - f_1)_+\right) \leq T^+(f_2).$$

Alors

$$T(g_\varepsilon) = T(\inf\{g_\varepsilon, f_1\}) + T\left((g_\varepsilon - f_1)_+\right) \leq T^+(f_1) + T^+(f_2).$$

Donc (4.16) implique que

$$T^+(f_1) + T^+(f_2) \geq T^+(f_1 + f_2) - \varepsilon, \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0,$$

ce qui donne l'inégalité inverse de (4.15), d'où $T^+(f_1)+T^+(f_2)=T^+(f_1+f_2)$ pour tout $f_1, f_2 \in C(K)$.

Soit maintenant f_1, f_2 des éléments quelconques dans $C(K)$,

$$\begin{aligned} T^+(f_1)+T^+(f_2) &= T^+\left((f_1)_+\right)-T^+\left((f_1)_-\right)+T^+\left((f_2)_+\right)-T^+\left((f_2)_-\right) \\ &= T^+\left((f_1+f_2)_+\right)-T^+\left((f_1+f_2)_-\right) \\ &= T^+\left(f_1+f_2\right). \end{aligned}$$

D'autre, pour tout $f \in C(K)$,

$$T^+(f)+T^+(-f)=T^+(f-f)=T^+(0)=0,$$

d'où $T^+(-f)=-T^+(f)$.

Pour $\lambda>0$ et $f \in C(K)$, $f \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} \lambda T^+(f) &= \lambda \sup\left\{T(g),\ 0 \leq g \leq f\right\} \\ &= \sup\left\{T(\lambda g),\ 0 \leq \lambda g \leq \lambda f\right\} \\ &= T^+(\lambda f). \end{aligned}$$

Pour $\lambda>0$ et $f \in C(K)$ quelconques, on a

$$\begin{aligned} T^+(\lambda f) &= T^+\left((\lambda f)_+\right)-T^+\left((\lambda f)_-\right) \\ &= \lambda\left(T^+\left(f_+\right)-T^+\left(f_-\right)\right) \\ &= \lambda T^+(f). \end{aligned}$$

Et pour $\lambda<0$,

$$T^+(\lambda f)=-T^+(-\lambda f)=\lambda T^+(f).$$

Donc la linéarité est établie.

Pour montrer que la forme linéaire T^+ est continue il suffit de montrer qu'elle est positive et c'est vrai car si $f \in C(K)$, $f \geq 0$ on a

$$T^+(f)=\sup\left\{T(g),\ 0 \leq g \leq f\right\} \geq T(0)=0.$$

$T^+ - T = T^-$, car si $f \in C(K)$, $f \geq 0$,

$$\begin{aligned}
(T^+ - T)(f) &= T^+(f) - T(f) \\
&= \sup\{T(g-f),\ 0 \leq g \leq f\} \\
&= \sup\{T(g-f),\ \ -f \leq g-f \leq 0\} \\
&= \sup\{T(-h),\ 0 \leq h \leq f\},\ h = f-g \\
&= T^-(f),
\end{aligned}$$

et si $f \in C(K)$ quelconque,

$$\begin{aligned}
(T^+ - T)(f) &= T^+(f_+) - T^+(f_-) - T(f_+) + T(f_-) \\
&= T^-(f_+) - T^-(f_-) \\
&= T^-(f).
\end{aligned}$$

Ce qui donne $T = T^+ - T^-$. La linéarité et la continuité de T^- résultent de l'égalité $T^- = T^+ - T$. On aussi T^- est positive par définition. Par la Proposition 4.1.3 , on $\|T^+\| = T^+(1)$ et $\|T^-\| = T^-(1)$. Pour tout $f \in C(K)$ nous pouvons écrire

$$|T(f)| \leq \left|T^+(f_+)\right| + \left|T^-(f_-)\right| \leq \|f\|_\infty \left(T^+(1) + T^-(1)\right).$$

On a aussi $T^+(1) + T^-(1) \leq \|T\|$ car

$$\begin{aligned}
& T^+(1) + T^-(1) \\
= \ & \sup\{T(g),\ 0 \leq g \leq 1\} + \sup\{T(-f),\ 0 \leq f \leq 1\} \\
= \ & \sup\{T(g-f),\ 0 \leq g, f \leq 1\} \\
\leq \ & \sup\{T(g-f),\ 0 \leq g-f \leq 1\},\ \text{car } g-f \leq g \leq 1 \\
\leq \ & \sup\{T(h),\ 0 \leq h \leq 1\} \\
= \ & \|T\|.
\end{aligned}$$

Ce qui donne (4.14). ■

Théorème 4.3.4

Soit (K,d) un espace métrique compact. Le dual topologique de l'espace $C(K)$ est isométriquement isomorphe à $M(K)$, l'ensemble des mesures signées finies sur $\mathcal{B}(K)$. Plus précisément, pour chaque forme linéaire sur $C(K)$, il existe une mesure signée μ unique finie sur $\mathcal{B}(K)$ telle que

$$T(f) = \int_K f d\mu, \quad \textit{pour tout } f \in C(K).$$

De plus, $\|T\| = \|\mu\| = |\mu|(K)$.

Preuve.

Si $T \in C(K)^*$, on écrit $T = T^+ - T^-$. D'aprés le théorème de représentation de Riesz pour les mesures de Radon positives (Théorème 4.2.6), pour tout $f \in C(K)$ on a

$$T^+(f) = \int_K f d\mu_+ \quad \text{et} \quad T^-(f) = \int_K f d\mu_-,$$

où μ_+ et μ_- sont des mesures positives finie sur $\mathcal{B}(K)$. Alors on a

$$T(f) = \int_K f d\mu_+ - \int_K f d\mu_- = \int_K f d\mu,$$

avec $\mu = \mu_+ - \mu_-$. De plus,

$$\|T\| = T^+(1) + T^-(1) = \mu_+(K) + \mu_-(K) = |\mu|(K) = \|\mu\|.$$

■

4.4 Exercices de chapitre 4

Exercice 4.1

Supposons que F est un sous-ensemble fermé de $[0,1]$ et on définit

$$L(f) = \int_0^1 f(x)\chi_F(x)dx, \quad f \in C([0,1]).$$

Démontrer que si μ est la mesure obtenue par le théorème représentation de Riesz, alors $\mu(A) = \lambda(A \cap F)$, où λ est la mesure de Lebesgue.

Exercice 4.2

Soit $C^1([0,1])$ l'espace des fonctions dont la dérivée existe et est continue sur $[0,1]$. Soit L une forme linéaire sur $C^1([0,1])$ telle que

$$|L(f)| \leq \alpha \|f'\|_\infty + \beta \|f\|_\infty, \quad f \in C^1([0,1]),$$

où α et β sont des constantes positives.
Montrer qu'il existe une mesure signée μ sur $\mathcal{B}([0,1])$ et une constante K telle que

$$L(f) = Kf(0) + \int f' d\mu, \quad f \in C^1([0,1]).$$

Exercice 4.3

Soient X et Y deux espaces métriques compacts et soit $f : X \longrightarrow Y$ une fonction continue. Si ν est une mesure finie sur les Boreliens de Y, montrer qu'il existe une mesure μ sur les Boreliens de X tels que

$$\int_Y f d\nu = \int_X f \circ F d\mu,$$

pour tout $f \in C(Y)$.

Exercice 4.4

Démontrer que si X est un espace métrique compact, μ et ν sont deux mesures positives finies sur $\mathcal{B}(X)$ tel que $\int f d\mu = \int f d\nu$, pour tout $f \in C(X)$, alors $\mu = \nu$.

Exercice 4.5

Démontrer que si X est un espace métrique compact, μ et ν sont deux mesures signées finies sur $\mathcal{B}(X)$ tel que $\int f d\mu = \int f d\nu$, pour tout $f \in C(X)$, alors $\mu = \nu$.

Exercice 4.6

Soient (X, d) un espace métrique compact, $(\mu_n)_n$ une suite des mesures finie sur $\mathcal{B}(X)$ et μ une autre mesure finie sur $\mathcal{B}(X)$. Supposons que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mu_n(X) = \mu(X)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalents

1) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu$, pour tout $f \in C(X, \mathbb{R})$.
2) $\limsup\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$, pour tous les sous-ensembles fermés F de X.
3) $\limsup\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mu_n(O) \geq \mu(O)$, pour tous les sous-ensembles ouverts O de X.
4) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$, pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ tel que $\mu(\partial A) = 0$. (Rappelons que $\partial A = \overline{A} - \mathring{A}$)

Exercice 4.7

Soient (X, d) un espace métrique compact et μ une mesure régulière finie sur $\mathcal{B}(X)$. Montrer que si $f \in C(X, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe un sous ensemble F fermé dans X tels que $\mu(F^c)$ et la restriction de f à F est continue sur F.

Chapitre 5

Corrigés des exercices

5.1 Corrigés d'exercices du chapitre 1

Solution 1.1

Soit $(O_n)_n$ une base dénombrable d'ouverts de X. Puisque l'application quotient $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ est ouverte, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q(O_n)$ est un ouvert de $X/\mathcal{R}$. Montrons que $(q(O_n))_n$ est une base d'ouverts de $X/\mathcal{R}$. Soit U un ouvert non vide de $X/\mathcal{R}$, alors $q^{-1}(U)$ est un ouvert non vide de X, donc il existe un sous-ensemble J de $\mathbb{N}$ tel que

$$q^{-1}(U) = \bigcup_{n \in J} O_n.$$

Puisque q est surjetive, alors on a

$$U = q\left(q^{-1}(U)\right) = \bigcup_{n \in J} q(O_n).$$

Par conséquent, $(q(O_n))_n$ est une base dénombrable d'ouverts de $X/\mathcal{R}$

Solution 1.2

1) Soient $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient et $U = X/F$. Soient $x, y \in X$ tels que $q(x) \neq q(y)$. On distingue deux cas :

Premier cas : $x, y \in U$. Puisque X est séparé et U est ouvert de X, il existe deux ouverts disjoints V et W dans X tels que

$$x \in V \subset U \quad \text{et} \quad y \in W \subset U.$$

Alors $q(V)$ et $q(W)$ sont deux ouverts dans $X/\mathcal{R}$ tels que

$$q(V) \cap q(W) = \emptyset \quad \text{et} \quad q(x) \in q(V),\ q(y) \in q(W).$$

Deuxième cas : $x \in U$ et $y \in F$. Puisque X est régulier, il existe deux ouverts disjoints V et W de X tels que $F \subset W$.

$$x \in V \subset U \quad \text{et} \quad F \subset W.$$

Alors $q(V)$ et $q(W)$ sont deux ouverts dans $X/\mathcal{R}$ tels que

$$q(V) \cap q(W) = \emptyset \quad \text{et} \quad q(x) \in q(V), \; q(y) \in q(W).$$

Par conséquent, l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est séparé.
2) Soit G un fermé de X. Alors on a

$$q^{-1}\left(q(G)\right) = \begin{cases} F \cup G, & \text{si } F \cap G \neq \emptyset \\ G, & \text{si } F \cap G = \emptyset \end{cases}.$$

Donc $q^{-1}\left(q(G)\right)$ est fermé dans X. Par conséquent, $X/\mathcal{R}$ est un espace normal (voir [10, Page 47]).

Solution 1.3

1) Puisque X et Y sont séparé, alors $X \times Y$ est séparé. Soient $(x, y) \in X \times Y$ et F une partie fermé de $X \times Y$ tel que $(x, y) \notin F$. Comme $(x, y) \in X \times Y \backslash F$ qui est ouvert dans $X \times Y$, alors il existe un ouvert U_x de X et un ouvert V_y de Y tels que

$$x \in U_x, \quad y \in V_y, \quad (U_x \times V_y) \cap F = \emptyset.$$

Comme X et Y sont réguliers, d'aprés la Proposition 1.1.8, il existe un ouvert U de X et un ouvert V de Y tel que

$$x \in U \subset \overline{U} \subset U_x \quad \text{et} \quad x \in V \subset \overline{V} \subset V_y,$$

d'où on a $(\overline{U} \times \overline{V}) \cap F = \emptyset$. Soit

$$W = \big((X \backslash \overline{U}) \times Y\big) \cup \big(X \times (Y \backslash \overline{V})\big),$$

alors W est un ouvert de $X \times Y$ tel que

$$F \subset W \quad \text{et} \quad (U \times V) \cap W = \emptyset.$$

Par conséquent, $X \times Y$ est regulier.

Solution 1.4

Si X est compact, il résulte immédiatement de la définition que de tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X par des éléments de $\mathcal{B}$, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Réciproquement, soit $(V_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de X. Comme $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X, pour tout $j \in J$, il existe un ensemble I_j tel que

$$V_j = \bigcup_{i\in I_j} U_{j,i}$$

où $U_{j,i}$ est un élément de $\mathcal{B}$. Soit $D = \{(j,i) : j \in J \text{ et } i \in I_j\}$, alors $(U_{j,i})_{(j,i)\in D}$ est un recouvrement ouvert de X par des éléments de $\mathcal{B}$. Par hypothèse, il existe un sous-ensemble fini E de D tel que

$$X = \bigcup_{(j,i)\in D} U_{j,i}.$$

Soit maintenant

$$J' = \{j \in J : \text{il existe } i \in I_j \text{ avec } (j,i) \in E\}$$

alors J' est un sous-ensemble fini de J et on

$$X = \bigcup_{j\in J'} V_j.$$

Donc X est un espace compact.

Solution 1.5

Supposons d'abord que K est compact. Pour tout $n \geq 1$, on a $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in K$ et on a $(0,0) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ d'où $(0,0) \in K$. Donc il existe $n \geq 1$ tel que $(0,0) \in B'_n$. Autrement dit, il existe $n \geq 1$ tel que

$$d_2((\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), (0,0)) \leq \frac{\lambda}{n},$$

d'où $\dfrac{\sqrt{2}}{n} \leq \dfrac{\lambda}{n}$. Donc on a $\lambda \geq \sqrt{2}$.

Réciproquement, supposons $\lambda \geq \sqrt{2}$. Montrons que pour tout $n \geq 1$, on a $B'_{n+1} \subset B'_n$. Soit $(x,y) \in B'_{n+1}$. Alors on a

$$\begin{aligned}
d_2((x,y),(\frac{1}{n},\frac{1}{n})) &\leq d_2((x,y),(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+1})) + d_2((\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+1}),(\frac{1}{n},\frac{1}{n})) \\
&\leq \frac{\lambda}{n+1} + \frac{\sqrt{2}}{n(n+1)} \\
&\leq \frac{\lambda}{n+1} + \frac{\lambda}{n(n+1)} = \frac{\lambda}{n}.
\end{aligned}$$

Donc on a $(x,y) \in B'_n$, d'où $B'_{n+1} \subset B'_n$. Par conséquent, on a $K = B'((1,1),\blacksquare)$, donc K est compact. En conclusion, K est compact si et seulement si $\lambda \geq \sqrt{2}$.

Solution 1.6

1) Supposons d'abord que f est semi-continue inférieurement. Soient $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, alors l'ensemble

$$V = f^{-1}\left(]f(x) - \varepsilon, +\infty[\right)$$

est un ouvert de X contenant x et pour tout $y \in V$, on a $f(y) > f(x) - \varepsilon$.

Réciproquement, supposons que pour tout $x \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x dans X tel que pour tout $y \in V$, on ait $f(y) > f(x) - \varepsilon$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $x \in f^{-1}(]a, +\infty[)$, alors $f(x) > a$. Soit $\varepsilon = f(x) - a > 0$, il existe un voisinage V de x dans X tel que pour tout $y \in V$, on ait $f(y) > f(x) - \varepsilon = a$, d'où $V \subset f^{-1}(]a, +\infty[)$. Ainsi $f^{-1}(]a, +\infty[)$ est voisinage de chacun de ses points, donc $f^{-1}(]a, +\infty[)$ est un ouvert de X. Par conséquent, f est semi-continue inférieurement.

Solution 1.7

1) Soit $x \in X$, $\varepsilon \in]0, f(x)[$ et $\delta > 0$ tel que

$$d(x,a) < \delta \Longrightarrow f(a) \geq f(x) - \varepsilon.$$

On a

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq n d(x,y), \quad \text{pour tous } x, y.$$

et que

$$f_n(x) \geq \min\{n\delta, f(x) - \varepsilon\}. \tag{5.1}$$

En effet $d(a,x) < \delta \Longrightarrow f(a) + nd(x,y) \geq f(a) \geq f(x) - \varepsilon$; si $d(x,a) \geq \delta$ on a

$$f(a) + nd(x,a) \geq nd(x,a) \geq n\delta.$$

(5.1) avec $\varepsilon = \dfrac{f(x)}{2}$ montre que $f_n(x) > 0$; si $n \geq \dfrac{f(x)}{\delta}$, $f_n(x) \geq f(x) - \varepsilon$, donc $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ (noter que $f_n(x) \leq f(x)$).

2) Dans le cas général, soit $\varphi = e^f$; φ est semi-continue inférieurement, donc par ce qui précède il existe une suite $(\varphi_n)_n$ de fonctions continues strictement positives qui croît vers φ; $(f_n) = (\ln \varphi_n)$ est une suite de fonctions contunues qui croît vers f.

Solution 1.8

1) On note que

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{nq^\tau}\right\} = \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{nq^\tau}, \frac{p}{q} + \frac{1}{nq^\tau}\right],$$

qui est fermé donc borélien. D'autre part,

$$\lambda\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{nq^\tau}\right\}\right) = \lambda\left(\left[\frac{p}{q} - \frac{1}{nq^\tau}, \frac{p}{q} + \frac{1}{nq^\tau}\right]\right) = \frac{2}{nq^\tau}.$$

2) On note que A_n s'écrit

$$A_n = \left\{x \in [0,1], \exists q \in \mathbb{N}^*, \exists p \in \mathbb{N}, p \leq q : \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{nq^\tau}\right\},$$

ce qui implique que

$$A_n = \bigcup_{\exists q \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{0 \leq p \leq q} \left\{x \in [0,1] : \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{nq^\tau}\right\}.$$

En particulier, $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Par sous σ-additivité et croissance,

$$\begin{aligned}
\lambda(A_n) &\leq \sum_{q \geq 1} \sum_{p=0}^{p=q} \lambda\left(\left\{x \in [0,1] : \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{nq^\tau}\right\}\right) \\
&= \frac{2}{n} \sum_{q \geq 1} \frac{(q+1)}{q^\tau} = \frac{2}{n}\left(\sum_{q \geq 1} \frac{1}{q^{\tau-1}} + \sum_{q \geq 1} \frac{1}{q^\tau}\right).
\end{aligned}$$

Comme $\tau > 2$ on a
$$\left(\sum_{q\geq 1}\frac{1}{q^{\tau-1}}+\sum_{q\geq 1}\frac{1}{q^{\tau}}\right)<\infty.$$
Par conséquent, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\lambda(A_n)=0.$

3) On note que $x\in D_\tau$ si et seulement si, il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que
$$\left|x-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{nq^\tau},\quad \text{pour tout } \frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\cap[0,1].$$
Par conséquent,
$$[0,1]\setminus D_\tau=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\ \bigcap_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}\left\{x\in[0,1]:\left|x-\frac{p}{q}\right|\leq\frac{1}{nq^\tau}\right\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}A_n.$$
Comme $(A_n)_n$ est une suite décroissante de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(A_n)\leq\lambda([0,1])<\infty$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ on en déduit que
$$\lambda([0,1]\setminus D_\tau)=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\lambda(A_n)=0.$$
Donc D_τ est de mesure pleine dans $[0,1]$.

Solution 1.9

1) Soit $\delta>0$. Comme $(f_n)_n$ converge vers f μ-presque partout, on en déduit que la suite de fonctions mesurables $\left(\chi_{(|f_n-f|>\delta)}\right)_n$ converge μ-presque partout vers 0. Comme
$$\left|\chi_{(|f_n-f|>\delta)}\right|\leq 1=g,$$
la fonction g est intégrable sur X car $\int|g|\,d\mu=\mu(X)<\infty$, on déduit du théorème de convergence dominée que
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mu\left(\{|f-f_n|>\delta\}\right)=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int\chi_{(|f_n-f|>\delta)}d\mu=0.$$
Autre démonstration : Soit $\delta>0$, comme
$$\left\{\lim_{n\longrightarrow+\infty}f_n\neq f\right\}=\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n}\left\{|f_k-f|>\frac{1}{N}\right\},$$

on déduit de la croissance de la mesure que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n}\left\{|f_k - f| > \frac{1}{N}\right\}\right) \leq \mu\left(\left\{\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n \neq f\right\}\right) = 0.$$

La mesure μ étant finie, on obtient par continuité décroissante que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mu\left(\bigcup_{k\geq n}\left\{|f_k - f| > \frac{1}{N}\right\}\right) = 0,$$

ce qui donne

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mu\left(\left\{|f_k - f| > \frac{1}{N}\right\}\right) = 0.$$

On obtient le résultat en prenant N tel que $\delta > \frac{1}{N}$.

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on voit en posant $\delta = \dfrac{1}{n}$ et $\varepsilon = \dfrac{1}{2^n}$ qu'il existe N_n tel que

$$\mu\left(\left\{|f_k - f| > \frac{1}{n}\right\}\right) \leq \frac{1}{2^n}, \quad \text{pour tout } k \geq N_n.$$

On pose $\varphi(1) = 1$, et on suppose construits $\varphi(k)$ pour $k \leq n$ tels que

$$\begin{cases} \varphi(1) < ... < \varphi(n), & \text{pour } k \leq n \\ \varphi(k) \geq N_k, & \text{pour } k \geq n \end{cases}$$

On pose alors

$$\varphi(n+1) = \max\left\{N_{n+1}, 1 + \varphi(n)\right\}.$$

La suite $(\varphi(n))_n$ convient alors.

b) D'après la question précédente,

$$\textstyle\sum_{n\geq 0}\mu(A_n) < \infty, \quad \text{où } A_n = \left\{\left|f - f_{\varphi(n)}\right| < \dfrac{1}{n}\right\}.$$

Par Borel-Cantelli, on a alors $\mu(\limsup A_n) = 0$. Ceci se récrit : pour μ-presque tout $x \in X$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)\right| \leq \frac{1}{n}, \quad \text{pour tout } n \geq N,$$

ce qui implique que

$$f_{\varphi(n)}(x) \longrightarrow f(x), \quad \mu\text{-presque tout } x \in X.$$

3) Supposons que $\left(\int |f - f_n|\, d\mu\right)_n$ ne converge pas vers 0. Si $\varepsilon > 0$, il existe alors une sous-suite $\left(f_{\psi(n)}\right)_n$ telle que

$$\int |f - f_n|\, d\mu > \varepsilon, \quad \text{pour tout } n. \tag{5.2}$$

Comme $f_{\psi(n)} \longrightarrow +\infty$ en mesure, on peut extraire une sous-suite $\left(f_{\psi(\varphi(n))}\right)_n$ qui converge μ-presque partout vers f. Le théorème de convergence dominée implique alors que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int \left|f - f_{\psi(\varphi(n))}\right| d\mu = 0,$$

ce qui contredit (5.2).

Solution 1.10

1) On observe d'abord que $\lambda_n(\emptyset) = \lambda(\emptyset) = 0$. Par ailleurs, si $(B_k)_k$ si est une suite de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ deux à deux disjoints, alors

$$\lambda_n\left(\bigcup_k B_k\right) = \lambda\left((\bigcup_k B_k) \cap]-n, n[\right) = \sum_k \lambda\left(B_k \cap]-n, n[\right) = \sum_k \lambda_n\left(B_k\right),$$

du fait que les ensembles $B_k \cap]-n, n[$ sont disjoints deux à deux dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2) On remarque d'abord que $\emptyset \in \mathcal{A}$, il suffit de prendre $F = O = \emptyset$.

Ensuite, si $B \in \mathcal{A}$, alors $B^c \in \mathcal{A}$, si F et O sont les ensembles associés à B pour un $\varepsilon > 0$, alors $O^c \subset B^c \subset F^c$. Comme O^c est fermé, F^c est ouvert et

$$\lambda_n\left(F^c \backslash O^c\right) = \lambda_n\left(O \backslash F\right) < \varepsilon.$$

Pour finir, si $(B_k)_{k \geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, on sait qu'on peut construire une suite de fermés $(F_k)_{k \geq 1}$ et une suite d'ouverts $(O_k)_{k \geq 1}$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$F_k \subset B_k \subset O_k \quad \text{et} \quad \lambda_n\left(O_k \backslash F_k\right) < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

On introduit ensuite l'ouvert $O = \bigcup_{k\geq 0} O_k$ et les fermés $F^K = \bigcup_{k=0}^{K} F_k$ pour tout $K \in \mathbb{N}$. On remarque qu'on a alors

$$\lambda_n\left(O\backslash\bigcup_K F^K\right) = \lambda_n\left(O\backslash\bigcup_k F_k\right) \leq \lambda_n\left(\bigcup_k (O_k\backslash F_k)\right) \leq \sum_k \lambda_n(O_k\backslash F_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On observe ensuite que, comme la suite $\left(O\backslash F^K\right)_K$ est décroissante et la mesure λ_n est finie, on a

$$\lim_{K\longrightarrow+\infty} \lambda_n\left(O\backslash F^K\right) = \lambda_n\left(\bigcap_K \left(O\backslash F^K\right)\right) = \lambda_n\left(O\backslash\bigcup_K F^K\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_n\left(O\backslash F^K\right) < \varepsilon$. Comme

$$F^K \subset \bigcup_k B_k \subset O,$$

on a bien $\bigcup_k B_k \in \mathcal{A}$.

3) Nous allons montrer que $\mathcal{A}$ contient les intervalles de la forme $]-\infty, a[$, où $a \in \mathbb{R}$. Comme ils forment une classe de parties qui engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on aura alors $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$, donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}$. On considère un intervalle $I =]-\infty, a[$ où $a \in \mathbb{R}$, et un réel $\varepsilon > 0$. On définit ensuite l'ouvert $O =]-\infty, a[$ et le fermé $F = \left]-\infty, a - \frac{\varepsilon}{2}\right]$. On a alors. $F \subset I \subset O$, et

$$\lambda_n(O\backslash F) \leq \lambda(O\backslash F) < \varepsilon,$$

ce qui conclut.

4) Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, montrons qu'il existe un ouvert O tel que $B \subset O$ et $\lambda(O\backslash B) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $B_n = B \cap]-n, n[$, de sorte que $B = \bigcup_n B_n$. On sait par la question précédente que pour tout n, il existe un ouvert O_n tel que

$$B_n \subset O_n \quad \text{et} \quad \lambda_n(O_n\backslash B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}.$$

Quitte à remplacer O_n par $O_n \cap]-n, n[$, on peut supposer que $O_n \subset]-n, n[$, ce qui donne $\lambda(O_n\backslash B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$. En introduisant l'ouvert $O = \bigcup_n O_n$ on a donc $B \subset O$, et

$$\lambda(O\backslash B) \leq \lambda\left(\bigcup_n O_n\backslash B_n\right) \leq \sum_n \lambda(O_n\backslash B_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où le résultat. On peut ensuite appliquer ce résultat au borélien B^c pour obtenir un ouvert Ω tel que

$$B^c \subset \Omega \quad \text{et} \quad \lambda\left(\Omega \backslash B^c\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On considère finalement le fermé $F = \Omega^c$. On a donc

$$F \subset B \subset O \quad \text{et} \quad \lambda\left(O \backslash F\right) = \lambda\left(O \backslash B\right) + \lambda\left(B \backslash F\right) < \varepsilon,$$

ce qui conclut.

5) i) On note d'abord qu'il est évident que

$$\lambda(B) \leq \inf\left\{\lambda(O) : B \subset O,\ O \text{ est ouvert}\right\}.$$

Il reste à montrer l'autre inégalité. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Si $\lambda(B) = \infty$ alors l'inégalité est clairement vérifiée. Par ailleurs si $\lambda(B) < \infty$ on sait par la question précédente que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O tel que

$$B \subset O \quad \text{et} \quad \lambda(O \backslash B) = \lambda(O) - \lambda(B) < \varepsilon,$$

ce qui donne la deuxième inégalité.

ii) On montre d'abord que

$$\lambda(B) = \sup\left\{\lambda(F) : F \subset B,\ F \text{ est fermé}\right\}.$$

On remarque d'abord qu'il est clair que

$$\lambda(B) \geq \sup\left\{\lambda(F) : F \subset B,\ F \text{ est fermé}\right\}.$$

Montrons la deuxième inégalité. Si $\lambda(B) = \infty$, la question précédente donne l'existence d'un fermé $F \subset B$ tel que $\lambda\left(B \backslash F\right) < 1$, donc $\lambda\left(F\right) = \infty$, et l'inégalité est vraie. Si $\lambda(B) < \infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F tel que

$$F \subset B \quad \text{et} \quad \lambda(B \backslash F) = \lambda(B) - \lambda(F) < \varepsilon,$$

ce qui donne l'inégalité.

Par ailleurs, si F est un fermé de $\mathbb{R}$ et $K_n = F \cap [-n, n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on a $F = \bigcup_n K_n$ et les K_n sont des compacts. Comme la suite $(K_n)_n$ est croissante, on a $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \lambda(K_n) = \lambda(F)$, ce qui implique que

$$\sup \{\lambda(F) : F \subset B,\ F \text{ fermé}\} = \sup \{\lambda(K) : K \subset B,\ K \text{ compact}\},$$

d'où la deuxième égalité.

Solution 1.11

1) a) Si $m(A) = +\infty$, alors A contient au moins une suite $(x_n)_n$ de points deux à deux distincts, et l'on peut prendre

$$K_n = \{x_0, ..., x_n\},$$

qui est fini donc compact.

b) Si $m(A) < \infty$, alors A est fini donc compact, et l'on peut prendre $K_n = A$ pour tout n.

2) Si A est un singleton, alors tout ouvert O le contenant est infini, donc $m(O) = +\infty$, tandis que $m(A) = 1$.

5.2 Corrigés d'exercices du chapitre 2

Solution 2.1

1) Si E est un ensemble positif pour μ alors nous avons terminé (on prend $E_0 \subset E$). Supposons que E est non-positif pour μ. Si (P, N) une décomposition de Hahn de μ, on pose alors $E_0 = E \cap P$. Puisque P est positif et $E_0 \subset P$ donc E_0 est aussi positif (voir Proposition 2.1.8). De plus,

$$\mu(E) = \mu\{E \cap (P \cup N)\} = \mu(E \cap P) + \mu(E \cap N) = \mu(E_0) + \mu(E \cap N).$$

N est négétif et $E \cap N \subset N$ alors $\mu(E \cap N) \leq 0$ d'où

$$0 < \mu(E) \leq \mu(E_0),$$

ainsi, $E_0 = E \cap P$ est l'ensemble désiré.

Solution 2.3

Si (P, N) une décomposition de Hahn de la mesure μ, pour tout $E \in \mathcal{M}$ on a

$$\begin{aligned}
0 &\leq \inf\left\{\mu^+, \mu^-\right\}(E) \\
&= \inf\left\{\mu^+, \mu^-\right\}(E \cap X) \\
&= \inf\left\{\mu^+, \mu^-\right\}(E \cap N) + \inf\left\{\mu^+, \mu^-\right\}(E \cap P) \\
&\leq \mu^+(E \cap N) + \mu^-(E \cap P) \\
&\leq \mu(E \cap N \cap P) - \mu(E \cap P \cap N) = 0.
\end{aligned}$$

D'où $\inf\{\mu^+, \mu^-\} = 0$.

Solution 2.4

1)

i) Si $x \in A \backslash B$ alors $|\chi_A(x) - \chi_B(x)| = 1$

ii) Si $x \in A \cap B$ alors $|\chi_A(x) - \chi_B(x)| = 0$

iii) Si $x \in B \backslash A$ alors $|\chi_A(x) - \chi_B(x)| = 1$

iv) Si $x \notin A \cup B$ alors $|\chi_A(x) - \chi_B(x)| = 0$

Dans tous les cas on a

$$\begin{aligned} |\chi_A(x) - \chi_B(x)| &= \begin{cases} 1, & \text{si } x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \\ 0, & \text{si } x \in (A \cap B) \cup (A \cup B)^C \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \\ 0, & \text{si } x \notin (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \end{cases} \\ &= \chi_{A \Delta B}(x) \end{aligned}$$

2) L'application μ est finie sur $\mathcal{B}(E)$ car

$$\mu(A) \leq \lambda(G \cap A) \leq \lambda(G) < \infty$$

Il est claire que $\mu(\emptyset) = \lambda(\emptyset) - \lambda(\emptyset) = 0$

Soit $(A_n)_n$ une suite des éléments de $\mathcal{B}(E)$ disjoints 2-à-2. Par la σ-additivité de la mesure positive λ on a

$$\lambda\left[G \cap \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)\right] = \lambda\left(\bigcup_{n\geq 1}(G \cap A_n)\right) = \sum_{n\geq 1}\lambda(G \cap A_n)$$
$$\lambda\left[(E \backslash G) \cap \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)\right] = \sum_{n\geq 1} \lambda\left[(E \backslash G) \cap A_n\right]$$

Ce qui implique la σ-additivité de l'application μ.

Pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \lambda(G \cap A) - \lambda\left[(E \backslash G) \cap A\right] \\ &= \int \chi_{G \cap A} d\lambda - \int \chi_{(E \backslash G) \cap A} d\lambda \\ &= \int_A \chi_G d\lambda - \int_A \chi_{E \backslash G} d\lambda \\ &= \int_A (\chi_G - \chi_{E \backslash G}) d\lambda \end{aligned}$$

D'aprés 1) et l'Exemple 2.2.2 on a

$$\begin{aligned} |\mu|(A) &= \int_A \left|\chi_G - \chi_{E\setminus G}\right| d\lambda \\ &= \int_A \chi_{G\Delta(E\setminus G)} d\lambda \\ &= \int_A \chi_E d\lambda \\ &= \int_A 1 d\lambda \\ &= \lambda(A). \end{aligned}$$

Donc $|\mu| = \lambda$.

Solution 2.5

1) Soit (P, N) une décomposition de Hahn de la mesure signée m. Puisque $m \leq m_1$ et m_1 est une mesure positive, pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a

$$m^+(A) = m(A \cap P) \leq m_1(A \cap P) \leq m_1(A)$$

D'autre part, puisque $m(A) < \infty$, pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a

$$m^-(A) = m^+(A) - m(A) \leq m_1(A) - m(A) = m_2(A)$$

2) $(\mu^+ + \nu)$ et μ^- sont des mesure positives avec $\eta = \mu + \nu = (\mu^+ + \nu) - \mu^-$. On applique 1) pour ces mesures ;

$$\eta^+ \leq \mu^+ + \nu \quad \text{et} \quad \eta^- \leq \mu^-.$$

Par ailleurs on a $\mu = \eta^+ - (\eta^- + \nu)$ donc d'aprés 1) ;

$$\mu^+ \leq \eta^+ \quad \text{et} \quad \mu^- \leq \eta^- + \nu.$$

Solution 2.6

Puisque $|\mu|$ est σ-additive on a

$$|\mu|(P_1 \Delta P_2) = |\mu|(P_1 \setminus P_2) + |\mu|(P_2 \setminus P_1).$$

Si (μ^+, μ^-) est la décomposition de Jordan de la mesure signée μ,

$$|\mu|\,(P_1 \backslash P_2) = \mu^+(P_1 \backslash P_2) + \mu^-(P_1 \backslash P_2).$$

On a $(P_1 \backslash P_2) \subset P_1$ et P_1 est positif, alors $(P_1 \backslash P_2)$ est positif. Ceci implique que $\mu^-(P_1 \backslash P_2) = 0$ (voir le Théorème 2.1.14). D'autre part

$$P_1 \backslash P_2 = P_1 \cap P_2^C = P_1 \cap N_2 \subset N_2$$

et N_2 est négatif, alors $(P_1 \backslash P_2)$ est négatif. Ceci implique que $\mu^+(P_1 \backslash P_2) = 0$. En fin on a

$$|\mu|\,(P_1 \backslash P_2) = 0 + 0 = 0.$$

De même façon montrons que $|\mu|\,(P_2 \backslash P_1) = 0$. Donc $|\mu|\,(P_1 \Delta P_2) = 0$.
Nous suivons les mêmes étapes pour prouver que $|\mu|\,(N_1 \Delta N_2) = 0$.

Solution 2.7

1) Si (μ^+, μ^-) est la décomposition de Jordan pour μ, par la définition de l'intégration par rapport à la mesure signée et la mesure positive on a

$$\int \chi_A d\mu = \int \chi_A d\mu^+ - \int \chi_A d\mu^- = \mu^+(A) - \mu^-(A) = \mu(A)$$

Et aussi, puisque $A \cap P$ est positif et $A \cap N$ est négatif on a

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_A (\chi_P - \chi_N) d\mu &= \textstyle\int_A \chi_P d\mu - \int_A \chi_N d\mu \\
&= \mu(A \cap P) - \mu(A \cap N) \\
&= \mu^+(A) + \mu^-(A) \\
&= |\mu|\,(A)
\end{aligned}$$

2) Soit f mesurable avec $|f| \leq 1$, alors par (2.12) on a

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f|\, d\,|\mu| \leq \int_A d\,|\mu| = |\mu|\,(A)$$

Ce qui donne $\sup\limits_{|f|\leq 1} \left|\int_A f d\mu\right| \leq |\mu|(A)$.
Inversement, choisissons la fonction mesurable $(\chi_P - \chi_N)$, on a $|\chi_P - \chi_N| \leq 1$ car $N \cap P = \emptyset$ et $N \cup P = X$. Alors

$$\sup_{|f|\leq 1} \left|\int_A f d\mu\right| \geq \left|\int_A \chi_P - \chi_N d\mu\right| = |\mu|(A).$$

5.3 Corrigés d'exercices du chapitre 3

Solution 3.1

1) La mesure positive μ_c est σ-finie car X est dénombrable, en effet

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{a_n\} \quad \text{et} \quad \mu_c(\{a_n\}) = 1 < \infty, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

La mesure signée ν est finie car pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$ on a

$$|\nu(A)| \leq \delta_a(A) + 3\delta_b(A) \leq 4.$$

On a aussi $\nu \ll \mu_c$ car si $A \in \mathcal{P}(X)$ avec $\mu_c(A) = 0$ on a $A = \emptyset$ et alors $\nu(A) = \nu(\emptyset) = 0$
D'après le Théorème de Radon-Nikodym, il existe une fonction $f \in L^1(\mu_c)$ telle que

$$\nu(A) = \int_A f d\mu_c.$$

En particulier, pour $A = \{x\}$, $x \in X$, d'une part on a

$$\nu(\{x\}) = \delta_a(\{x\}) - 3\delta_b(\{x\}) = \chi_{\{a\}}(x) - 3\chi_{\{b\}}(x).$$

D'autre part on a

$$\nu(\{x\}) = \int_{\{x\}} f d\mu_c = f(x) \int_{\{x\}} d\mu_c = f(x).$$

Ce qui montre que

$$\frac{d\nu}{d\mu_c} = f = \chi_{\{a\}} - 3\chi_{\{b\}}.$$

2) A) Si on pose $A = \{a\}$ on trouve

$$\delta_d(\{a\}) = 0 \quad \text{mais} \quad \nu(\{a\}) = 1.$$

B) Supposons qu'il existe $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifier $\nu(A) = \int_A h d\delta_d$. Pour $A = \{a\}$ on obtient

$$1 = \nu(\{a\}) = \int_{\{a\}} h d\delta_d = h(a)\delta_d(\{a\}) = 0.$$

Ceci une contradiction.

Solution 3.2

Soit $A \in \mathcal{M}$ avec $\nu(A) = 0$, alors $\mu(A) = 0$ (car $\mu \ll \nu$) et donc $\eta(A) = 0$ (car $\eta \ll \mu$). Ce qui montre que $\eta \ll \nu$.

Par le Théorème de Radon-Nikodym il existe trois fonctions mesurables positives

$$f = \frac{d\eta}{d\mu}, \quad g = \frac{d\mu}{d\nu}, \quad h = \frac{d\eta}{d\nu}$$

C-à-d pour tout $A \in \mathcal{M}$

$$\eta(A) = \int_A f d\mu, \quad \mu(A) = \int_A g d\nu, \quad \eta(A) = \int_A h d\nu$$

l'intégration par rapport à la mesure μ à densité g donne

$$\eta(A) = \int_A f d\mu = \int_A f g \nu$$

L'égalité $\int_A h d\nu = \int_A f g \nu$ implique que $h = fg$, ν-p.p d'où le résultat.

Solution 3.3

1) $\mu_E(\emptyset) = \mu(E \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. La σ-additivité résulte immédiatement de celIe de μ. Soit $A \in \mathcal{M}$ avec $\mu(A) = 0$. D'après la monotonie de la mesure positive on a

$$\mu_E(A) = \mu(E \cap A) \leq \mu(A) = 0,$$

d'où $\mu_E(A) = 0$. Ce qui donne $\mu_E \ll \mu$.

D'après le Théorème de Radon-Nikodym il existe une fonction h mesurable positive unique μ-presque par tout telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}, \quad \mu_E(A) = \int_A h d\mu.$$

D'autre part

$$\forall A \in \mathcal{M}, \quad \mu_E(A) = \mu(E \cap A) = \int_{E \cap A} d\mu = \int_A \chi_E d\mu.$$

Donc $\dfrac{d\mu_E}{d\mu} = h = \chi_E$, μ-p.p, comme il résulte de l'égalité $\int_A h d\mu = \int_A \chi_E d\mu$.

2) $\Longrightarrow$) Supposons que $\mu_E \ll \mu_F$, puisque $\mu(E\backslash F) = \mu(E \cap F^C) = \mu_E(F^C)$, il suffit de montrer que $\mu_F(F^C) = 0$ et ceci clair car

$$\mu_F(F^C) = \mu(F \cap F^C) = \mu(\emptyset) = 0.$$

$\Longleftarrow$) Supposons que $\mu(E\backslash F) = 0$. Soit $A \in \mathcal{M}$ telle que $\mu_F(A) = 0$. D'autre part,

$$A = A \cap X = A \cap (F \cup F^C) = (A \cap F) \cup (A \cap F^C).$$

Alors

$$\begin{aligned} \mu_E(A) &= \mu_E(A \cap F) + \mu_E(A \cap F^C) \\ &= \mu(A \cap F \cap E) + \mu(A \cap F^C \cap E) \\ &\leq \mu(A \cap F) + \mu(F^C \cap E) \\ &= \mu_F(A) + \mu(E\backslash F) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc $\mu_E(A) = 0$.

Solution 3.4

1) Puisque $g \neq 0$ sur B, l'intégration par rapport à la mesure μ à densité g donne

$$m(B) = \int_B dm = \int_B \frac{1}{g} g dm = \int_B \frac{1}{g} d\mu.$$

2) D'après le théorème de décomposition de Lebesgue, il suffit de montrer que

$$\nu = \nu_0 + \nu_1, \quad \nu_0 \ll \mu \text{ et } \quad \nu_1 \perp \mu.$$

Pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a

$$\begin{aligned}
\nu_0(A) + \nu_1(A) &= \int_A \frac{f}{g} \chi_P d\mu + \int_{A \cap G^C} f dm \\
&= \int_A f \chi_P dm + \int_{A \cap G^C} f dm \\
&= \int_{A \cap P} f dm + \int_{A \cap G^C} f dm \\
&= \int_{A \cap P} f dm + \int_{A \cap p^C} f dm, \quad (\text{car } A \cap G^C = A \cap p^C) \\
&= \int_A f dm, \quad (\text{car } (A \cap P) \cup (A \cap p^C) \\
&= \nu(A).
\end{aligned}$$

Soit $A \in \mathcal{M}$ telle que $\mu(A) = 0$, alors $\mu(A \cap P) = 0$ car $A \cap P \subset A$ et donc

$$\nu_0(A) = \int_A \frac{f}{g} \chi_P d\mu = \int_{A \cap P} \frac{f}{g} d\mu = 0.$$

Ce qui montre que $\nu_0 \ll \mu$. D'autre part

$$\nu_1(G) = \nu(G \cap G^C) = \nu(\emptyset) = 0.$$

Et aussi

$$\mu(G^C) = \int_{G^C} g dm = \int_{\{g=0\}} g dm = 0.$$

Ce qui montre que $\nu_1 \perp \mu$.

Bibliographie

[1] S. Axler, Measure, Integration & Real Analysis, Springer Nature Switzerland AG, 2020.

[2] V. I. Bogachev, Measure theory (Volume I), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[3] A. Bouziad et J. Calbrix, Théorie de la Mesure et de l'intégration, 185. Puli. univ. Rounen, 1993.

[4] H. Brezis, functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

[5] T. Gallay, Théorie de la Mesure et de l'intégration, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2009.

[6] J. Genet, Mesure et intégration (théorie élémentaire), Vuibert 1976.

[7] R. Godement, Analyse mathématique IV : Intégration et théorie spectrale, analyse harmonique, le jardin des délices modulaires, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

[8] P. R. Halmos, Measure theory, Springer-Verlag New York Inc., 1974.

[9] B. Hauchecorne, Les contres exemple en Mathématiques, Ellipses Edition Marketing S.A., 2007.

[10] N. E. Hassan, Topologie générale et espaces normés, Dunod Malakoff, 2011.

[11] H. König, Measure and integration (An advanced course in basic procedures and applications), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.

[12] V. Komornik, Précis d'analyse réelle : Analyse fonctionnelle, Intégrale de Lebesgue, Espaces fonctionnels, Ellipses Édition Marketing S.A., 2002.

[13] P. Krée, Intégration et théorie de la Mesure : une approche géométrique, ellipses édition marketing S.A., 1997.

[14] E. Laamri, Mesure, intégration, convolution et transformée de Fourrier des fonctions, Sciences Sup, Dunod, 2007.

[15] L. Meziani, Mesure et intégration, Université d'Alger, 1977-78.

[16] W. Rudin, Real and Complex Analysis (Third Edition), McGraw-Hill, Inc., 1987.

[17] C. Suquet, I.F.P. Cours de l'année 2003-2004, http ://math.univ-lille1.fr/suquet/ens/IFP/Cours/cours04/CoursIFP04.html

[18] C. Swartz, Measure, integration and function spaces, World scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1994.

[19] A. J. Weir, Lebesgue integration and measure, Cambridge university Press, 1973

[20] J. Yeh, Real analysis (theory of measure and integration), 2nd edition, World scientific publishing, London, 2006.