الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة - بوسعادة
المجاهد الفريق أحمد قايد صالح
قسم: العلوم الدقيقة

Ecole Normale Supérieure
Bou-Saada
Dép. Sciences Exactes

اعتمدت بتاريخ
04/07/2021

اعتمدت بتاريخ
2021/07/13

عرض نظري وتمارين محلولة حول القياس والمكاملة 1

المقياس: قياس ومكاملة 1

المستوى: السنة الثالثة رياضيات

الاستاذ: دحية الحاج

الرتبة: أستاذ محاضر "أ" بالمدرسة العليا للأساتذة - بوسعادة-

السنة الجامعية : 2020-2021

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ecole Normale Supérieure
Bou-Saada
Dép. Sciences Exactes

المدرسة العليا للأساتذة - بوسعادة
المجاهد الفريق أحمد قايد صالح
قسم: العلوم الدقيقة

عرض نظري وتمارين محلولة حول القياس والمكاملة 1

المقياس: قياس ومكاملة 1

المستوى: السنة الثالثة رياضيات

الاستاذ: دحية الحاج

الرتبة: أستاذ محاضر "أ" بالمدرسة العليا للأساتذة - بوسعادة-

السنة الجامعية : 2020-2021

الفهرس

مقدمة

تتناول المطبوعة البيداغوجية التي بين أيديكم عرضا نظريا مختصرا في نظرية القياس والمكاملة، تحتوي على عدد كبير من التمارين والمسائل، مرفقة بحلولها المفصلة . وقد تم وضعها وكتابتها من أجل طلبة السنة الثالثة رياضيات في المدارس العليا للأساتذة (أساتذة التعليم الثانوي، والمتوسط)، بالإضافة إلى طلبة السنة الثالثة ليسانس رياضيات في الجامعة . وقد كانت غايتنا من هذا العمل تقديم تطبيقات مختلفة، هدفها الأول: الإلمام بمحتوى نظرية القياس والمكاملة، وتعميق المعارف والمعلومات المكتسبة . وننوه -هنا- طلبتنا الأعزاء إلى ضرورة الاستفادة بذكاء من الحلول المُفصلة للتمارين المقترحة؛ حيث إن الاطلاع على هذه الحلول دون التفكير المُعمق في الأسئلة المطروحة يؤدي إلى نتائج تربوية هزيلة، أو منعدمة في معظم الأحيان . كما ينبغي -أيضا- أخذ الوقت الكافي في التفكير لحل أي تمرين؛ حيث يتعين على الطالب أن يكتب حلولاً كاملة تشمل كل التبريرات النظرية، وكل التفاصيل الحسابية اللازمة قبل اطلاعه على الحل .

نشير في هذا المقام إلى أن التمارين والمسائل المقترحة في هذه المطبوعة كلها مستمدة من الأعمال الموجهة التي تم تناولها مع طلبة السنة الثالثة تخصص رياضيات بالمدرسة العليا للأساتذة ببوسعادة على مدار أربع سنوات كاملة، إضافة إلى ما تم تناوله في الامتحانات والفروض االمنجزة . كما نشير كذلك إلى أن التمارين تعالج كل دروس البرنامج الرسمي المسطر من طرف الوِصاية، المُوجّه إلى طلبة المدارس العليا للأساتذة . وهذا إجمال للفصول التي إنبنت عليها المطبوعة مرتبة: تكامل ستيلجس، الفضاءات القيوسة (العشائر)، التطبيقات القيوسة، القياس الموجب ثم تكامل لوبيغ .

وفي الأخير نرجو أن يجد طلبتنا في هذا العمل ما يعينهم ويأخذ بأيديهم في هذا المجال الذي لازالت الكتابات العربية تأخذ فيه طريقها. كما نرجو أيضا أن يجد فيه زملاؤنا ما يعينهم في العملية البيداغوجية .

ملاحظة: لكل ملاحظاتكم يسرنا تواصلكم معنا عبر البريد الإلكتروني المذكور أسفله .

الهامل في 14 مارس 2021

دحية الحاج

hajdahia@gmail.com

الفصل الأول

التوابع ذات التغير المحدود والتكامل بمفهوم ستيلجس

عناوين الفصل :

1.1 تذكير نظري للدروس

1.1.1 التوابع ذات التغير المحدود

تقسيمات مجال

ليكن $[a,b]$ مجالا متراصا في $\mathbb{R}$ (يعني مغلق ومحدود) . نسمي تقسيما للمجال $[a,b]$ كل مجموعة منتهية P من نقاط المجال $[a,b]$ ونكتب

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\},$$

مع ضرورة توفر الشرط

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

نرمز بالرمز δP إلى طول أطول قطعة في التقسيم P ، بعبارة أخرى لدينا

$$\delta P = \max_{0 \le i \le n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

ويسمى العدد الحقيقي الموجب δP وسيط التقسيم P أو نظيمه .

فيما يلي نرمز بالرمز $\mathcal{P}_{a,b}$ إلى مجموعة كل تقسيمات المجال $[a,b]$. نذكر أنه إذا كان P و P' تقسيمين لنفس المجال $[a,b]$ بحيث $P \subset P'$ فنقول أن P' أدق من P ويكون في هذه الحالة $\delta P' \le \delta P$.

مثال 1.1.1. (التقسيم المنتظم)
ليكن $[a,b]$ مجال متراص في $\mathbb{R}$ ولتكن النقط

$$x_i = a + \tfrac{i}{n}(b-a),\ i = 0, ..., n.$$

نلاحظ أن

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) < a + \frac{i+1}{n}(b-a) = x_{i+1},$$

من أجل كل $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$. وهو ما يثبت أن $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ تقسيما للمجال $[a,b]$.
هذا التقسيم يسمى التقسيم المنتظم .

التغير المحدود

تعريف 1.1.1.
ليكن f تابعا معرفا على مجال $[a,b]$ وليكن $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ تقسيما لهذا المجال .
نسمي تغير f وفق التقسيم P العدد الحقيقي الموجب $V_P(f)$ المعرف بأن

$$V_P(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

ملاحظة 1.1.1.

إذا كان P و P' تقسيمين لنفس المجال $[a,b]$ بحيث $P\subset P'$ (يعني P' أدق من P) فإنه لدينا

$$V_P(f)\leq V_{P'}(f).$$

ذلك واضح لأنه في هذه الحالة عدد عناصر P' أكبر من عدد عناصر P أي نستطيع أن نكتب $P'=\{x_0,...,x_m\}$ حيث $m>n$ و $x_m=x_n=b$ ومنه لدينا

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leq\sum_{i=1}^{m}|f(x_i)-f(x_{i-1})|.$$

تعريف 1.1.2. (التابع ذو التغير المحدود)
نقول عن التابع $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ أنه ذو تغير محدود على المجال $[a,b]$ إذا كانت مجموعة تغيرات التابع f وفق كل تقسيمات المجال $[a,b]$ محدودة، بعبارة أخرى

$$V_a^b(f)=\sup\{V_P(f):P\in\mathcal{P}_{a,b}\}<\infty\,(\text{منته})\ .$$

في هذه الحالة العدد الحقيقي الموجب $V_a^b(f)$ يسمى التغير الكلي للتابع f على المجال $[a,b]$.

مثال 1.1.2.
1) إذا كان $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا رتيبا على المجال $[a,b]$ فهو ذو تغير محدود على هذا المجال وتغيره الكلي يعطى بالعلاقة

$$V_a^b(f)=|f(a)-f(b)|.$$

قضية 1.1.1.
كل تابع عددي محدود التغير على مجال $[a,b]$ هو محدود على هذا المجال لكن العكس غير صحيح عموما .

قضية 1.1.2. (العمليات على التوابع ذات التغير المحدود)
f و g تابعان بتغيرين محدودين على المجال $[a,b]$ و α عدد حقيقي .
عندئذ التوابع $f+g$ ، $f.g$ و αf كلها توابع ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$.
إذا كان $|f|\neq 0$ وكان $|f|$ محدودا من الأسفل على المجال $[a,b]$ فإن التابع المقلوب $\frac{1}{f}$ محدود التغير على المجال $[a,b]$.

قضية 1.1.3.
ليكن f تابعا عدديا معرفا على المجال $[a,b]$ وليكن c عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]a,b[$.

إذا كان f محدود التغير على كل من المجالين $[a,c]$ و $[c,b]$ فإنه محدود التغير على $[a,b]$ ولدينا

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

صيغة لحساب التغير الكلي

نظرية 1.1.1.
إذا كان $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعا قابلا للإشتقاق على المجال $[a,b]$ وكان تابعه المشتق محدودا بمعنى يوجد عدد حقيقي موجب تماما $M > 0$ بحيث $|f'| \leq M$ ، فإن التابع f محدود التغير على $[a,b]$ ولدينا

$$V_a^b(f) \leq M(b-a).$$

نظرية 2.1.1.
إذا كان $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعا قابلا للإشتقاق على المجال $[a,b]$ وكان التابع $|f'|$ قابلا للمكاملة حسب ريمان على $[a,b]$ ، فإن التابع f محدود التغير على $[a,b]$ ولدينا

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|\, dx.$$

نظرية 3.1.1. (تفكيك تابع ذو تغير محدود)
حتى يكون التابع $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ محدود التغير على المجال $[a,b]$ يلزم ويكفي أن يكون عبارة عن فرق تابعين متزايدين على المجال $[a,b]$.

2.1.1 تكامل ستيلجس

نعتبر التابعين العدديين $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ والتقسيمين P و Q للمجال $[a,b]$ المعرفين بأن

$$P = \{x_0, ..., x_n\} \text{ و } Q = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\},$$

حيث $x_{i-1} \leq \alpha_i \leq x_i$ من أجل كل $i = 1, ..., n$. التقسيم Q يسمى تقسيما مرافقا للتقسيم P .
مجموع ستيلجس للتابع f نسبة إلى التابع g على المجال $[a,b]$ معرف بالشكل

$$S = S(f,g,P,Q) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\left(g(x_i) - g(x_{i-1})\right).$$

تعريف 3.1.1.
نقول عن العدد الحقيقي S أنه تكامل ستيلجس للتابع f نسبة إلى التابع g على المجال $[a,b]$ إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\rho > 0$ بحيث من أجل كل $P \in \mathcal{P}_{a,b}$ وكل تقسيم مرافق Q للتقسيم

P لدينا الإستلزام التالي

$$\delta P \leq \rho \Longrightarrow |S(f,g,P,Q) - S| \leq \varepsilon.$$

ونكتب

$$S = \int_a^b f dg.$$

وبعبارة أخرى

$$\int_a^b f dg = \lim_{\delta p \longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \left(g(x_i) - g(x_{i-1})\right).$$

ونقول أن التابع f قابل للمكاملة حسب ستيلجس نسبة إلى التابع g على المجال $[a,b]$.

مثال 3.1.1.

1) التابع الثابت $f = k$ قابل للمكاملة حسب ستيلجس نسبة لأي تابع عددي g على المجال $[a,b]$ ولدينا

$$\int_a^b k dg = k\left(g(b) - g(a)\right)$$

2) كل تابع $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ قابل للمكاملة حسب ستيلجس نسبة للتابع الثابت $g = k$ على المجال $[a,b]$ ولدينا

$$\int_a^b f dk = 0$$

نظرية 4.1.1. (شرط كاف لقابلية المكاملة)

إذا كان f مستمرا على $[a,b]$ وكان g متزايدا على $[a,b]$ فإن f قابل للمكاملة حسب ستيلجس نسبة إلى g على المجال $[a,b]$.

نظرية 5.1.1.

إذا كان f قابل للمكاملة حسب ريمان على المجال $[a,b]$ وكان g قابلا للإشتقاق على المجال $[a,b]$ وكذلك التابع المشتق g' مستمرا على $[a,b]$ فإن f قابل للمكاملة حسب ستيلجس نسبة إلى g على المجال $[a,b]$ ولدينا

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

قضية 4.1.1.

إذا كانا التابعان $f_1, f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلين للمكاملة حسب ستيلجس نسبة إلى التابع $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ على المجال $[a,b]$ فإن التابع $\alpha f_1 + \beta f_2$ حيث $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، قابل للمكاملة حسب ستيلجس نسبة

إلى التابع g على المجال $[a,b]$ ولدينا

$$\int_a^b(\alpha f_1+\beta f_2)dg=\alpha\int_a^b f_1dg+\beta\int_a^b f_2dg.$$

قضية 1.1.5.
إذا كان التابع $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ قابلا للمكاملة حسب ستيلجس نسبة إلى التابعين $g_1,g_2:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ على المجال $[a,b]$ فإن التابع f قابل للمكاملة حسب ستيلجس نسبة إلى التابع $\alpha g_1+\beta g_2$ على المجال $[a,b]$ حيث $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ولدينا

$$\int_a^b fd(\alpha g_1+\beta g_2)=\alpha\int_a^b fdg_1+\beta\int_a^b fdg_2.$$

نتيجة 1.1.1. (شرط كاف لقابلية المكاملة)
إذا كان التابع العددي f مستمرا على المجال $[a,b]$ وكان g محدود التغير على $[a,b]$ فإن f يقبل المكاملة حسب ستيلجس نسبة إلى g على المجال $[a,b]$.

نظرية 1.1.6. (مبرهنة المكاملة بالتجزئة)
إذا كان التابع $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ قابل للمكاملة حسب ستيلجس نسبة إلى التابع $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ على المجال $[a,b]$ فإن التابع g قابل للمكاملة حسب ستيلجس نسبة إلى التابع f على المجال $[a,b]$ ولدينا

$$\int_a^b fdg=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b gdf.$$

2.1 تمارين الفصل الأول

1) حول التوابع ذات التغير المحدود

تمرين 1.1.
أثبت أن التابع الوحيد الذي تغيره الكلي معدوم على المجال $[a,b]$ هو التابع الثابت .
إرشاد: أحسب $V_P(f)$ حيث P هو التقسيم $P=\{a,x,b\}$ مع $x\in[a,b]$.

تمرين 2.1.
1) ليكن f التابع الحقيقي المعرف على المجال $[0,1]$ بأن $f(x)=x-x^2$
برهن أن التابع f محدود التغير وأحسب تغيره الكلي على المجال $[0,1]$.
2) نفس السؤال السابق بالنسبة إلى التابع g المعرف على المجال $[0,2]$ بأن

$$g(x)=\begin{cases} x-1, 0\leq x<1 \\ \quad 6 \qquad x=1 \\ \;x^2 \quad 1<x\leq 2 \end{cases}$$

تمرين 3.1.
ليكن f التابع الحقيقي المعرف على المجال $[0,1]$ كما يلي

$$\begin{cases} f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}, \ \textbf{si } 0<x\leq 1 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

أثبت أن التابع f ذو تغير غير محدود على المجال $[0,1]$
إرشاد: إعتبر التقسيم $P=\{0,1\}\cup\left\{\frac{2}{(2k+1)\pi},0\leq k\leq n\right\}$

تمرين 4.1.
ليكن f تابعا حقيقيا ليبشيزيا (Lipschitzien) على المجال $[c,d]$ أي أنه يوجد ثابت حقيقي k بحيث من أجل كل $x,y\in[c,d]$ لدينا

$$|f(x)-f(y)|\leq k\,|x-y|\,.$$

وليكن $g:[a,b]\longrightarrow[c,d]$ تابعا ذا تغير محدود .
1) برهن أن f ذو تغير محدود وأن

$$V_a^b(f)\leq k(b-a).$$

2) برهن أن التابع المركب $f\circ g$ هو كذلك ذو تغير محدود على المجال $[a,b]$ ولدينا

$$V_a^b(f\circ g)\leq kV_a^b(g).$$

3) برهن أن التابع $|f|^p$ ذو تغير محدود على المجال $[a,b]$ مهما يكن $p \geq 1$.

2) حول تكامل ستيلجس

تمرين 1.5.
لتكن التوابع العددية $f,g,g^* : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث f مستمر على المجال $[a,b]$ والتابع g محدود التغير على المجال $[a,b]$ والتابع g^* معرف كما يلي

$$\forall x \in [a,b] : g^*(x) = V_a^x(g).$$

1) برهن أن التابع $|f|$ يقبل المكاملة حسب ستيلجس نسبة إلى التابع g^* على المجال $[a,b]$.
2) برهن أن

$$\left|\int_a^b f dg\right| \leq \int_a^b |f| \, dg^*.$$

تمرين 1.6.
ليكن التابع الحقيقي g المعرف على $[0,2]$ بأن

$$\begin{cases} g(x) = x^3, & \text{si } x \in [0,1] \\ g(x) = (2-x)^3, & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

1) بين أن التابع g محدود التغير على $[0,2]$.
2) بين أن تكامل ستيلجس $\int_0^2 xdg$ موجود .
3) أحسب التكامل السابق باستعمال التقسيمات التالية

$$Q_n = P_n \backslash \{0\} \text{ و } P_n = \left\{0, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, ..., 1\right\} \cup \left\{1, 1+\tfrac{1}{n}, 1+\tfrac{2}{n}, ..., 2\right\}.$$

تمرين 1.7.
ليكن m عددا طبيعيا و b عددا حقيقيا حيث $m > 1$ و $b > 0$
1) برر وجود تكامل ستيلجس $\int_0^b xd(x^m)$.
2) لتكن

$$P_n(\lambda) = \left\{0, \lambda^{n-1}b, \lambda^{n-2}b, ..., \lambda b, b\right\},$$

حيث $n \longrightarrow +\infty$ و $\lambda \longrightarrow 1$, $\lambda \in]0,1[$.
تحقق أن $P_n(\lambda)$ تقسيما للمجال $[0,b]$ ثم أحسب التكامل السابق باستعمال التقسيمات

$$P_n(\lambda) \text{ و } Q_n(\lambda) = P_n(\lambda) \backslash \{0\}.$$

3) تأكد من النتيجة المحصل عليها في السؤال السابق بتحويل تكامل ستيلجس إلى ريمان .

تمرين 1،8.

q عدد حقيقي يختلف عن 1 . برهن بالتدريج على أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$ يكون لدينا

$$1 + 2q + 3q^2 + ... + nq^{n-1} = \frac{1 - q^n - nq^n(1-q)}{(1-q)^2}.$$

2) ليكن $b > 0$ ، برر وجود تكامل ستيلجس

$$T = \int_0^b xd(e^x).$$

أحسب T باستخدام التقسيمات من الشكل

$$P_n = \left\{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, ..., b\right\} \text{ و } Q_n = P_n - \{0\}.$$

تمرين 1،9.

f تابع مستمر على المجال $[a,b]$ ، g و h تابعان لهما تغيرات محدودة على $[a,b]$.

لتكن النقط $t_1, ..., t_n$ من $[a,b]$ بحيث $h(t_i) \neq g(t_i)$ من أجل كل $i = 1, ..., n$ و $h = g$ على

$[a,b] - \{t_1, ..., t_n\}$.

برهن أن

$$\int_a^b fdg = \int_a^b fdh.$$

تمرين 1،10.

f تابع مستمر على المجال $[a,b]$ و g تابع متزايد على المجال $[a,b]$. برهن أن

$$\left|\int_a^b fdg\right| \leq \int_a^b |f|\, dg.$$

تمرين 1،11.

f و g تابعان معرفان على المجال $[-1,1]$ بأن

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases} \text{ و } g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

برهن أن تكامل ستيلجس $\int_{-1}^1 fdg$ غير موجود .

3.1 حلول تمارين الفصل الأول

حل التمرين 1.1 :

نعلم أن التابع الثابت هو ذو تغير محدود وتغيره الكلي معدوم .
بالعكس، ليكن f تابعا ذو تغير كلي معدوم على المجال $[a,b]$ وليكن $x \in [a,b]$. نعتبر عندئذ التقسيم $P=\{a,x,b\}$ فيكون لدينا ما يلي

$$V_P(f)=|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\leq V_a^b(f)=0,$$

وهو ما يثبت أن

$$|f(x)-f(a)|=0 \text{ و } |f(b)-f(x)|=0,$$

وأخيرا نستنتج أن

$$\forall x\in[a,b]: f(x)=f(a)=f(b).$$

وهو ما يعني أن f ثابت على المجال $[a,b]$.

حل التمرين 2.1 :

1) فيما يلي نستخدم النتيجة المتحصل عليها في المثال 2.1.1 (يعني ندرس أولا الرتابة). لدينا عندئذ ما يلي

$$\forall x\in[0,1]: f'(x)=1-2x,$$

إذن f متزايد على $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ فهو محدود التغير على المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ وتغيره الكلي هو

$$V_0^{\frac{1}{2}}(f)=\left|f(\frac{1}{2})-f(0)\right|=\frac{1}{4}.$$

كذلك f متناقص على $\left[\frac{1}{2},1\right]$ فهو محدود التغير على المجال $\left[\frac{1}{2},1\right]$ وتغيره الكلي هو

$$V_{\frac{1}{2}}^{1}(f)=\left|f(1)-f(\frac{1}{2})\right|=\frac{1}{4}.$$

ومنه نستنتج أن التابع f محدود التغير على المجال $[0,1]$ وتغيره الكلي هو

$$V_0^1(f)=V_0^{\frac{1}{2}}(f)+V_{\frac{1}{2}}^{1}(f)=\frac{1}{2}.$$

2) نلاحظ أن g متزايد على المجال $[0,1]$ فهو محدود التغير ولدينا

$$V_0^1(g)=|g(0)-g(1)|=7$$

بالنسبة للمجال $[1,2]$ التابع g غير رتيب، إذن نلجأ إلى استخدام التعريف، نعتبر عندئذ

$$P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$$

تقسيما كيفيا للمجال $[1,2]$. بهذه الكيفية لدينا ما يلي

$$\begin{aligned} V_P(g) &= \left|x_1^2 - g(x_0)\right| + \left|x_2^2 - x_1^2\right| + \ldots + \left|x_n^2 - x_{n-1}^2\right| \\ &= \left|x_1^2 - 6\right| + \left|x_2^2 - x_1^2\right| + \ldots + \left|4 - x_{n-1}^2\right| \end{aligned}$$

من أجل كل $i \in \{1,2,...,n\}$ لدينا $x_i > x_{i-1}$ وكذلك $x_i > 0$ وبالتالي نحصل على

$$\left|x_i^2 - x_{i-1}^2\right| = |x_i - x_{i-1}|\,|x_i + x_{i-1}| = (x_i - x_{i-1})\,(x_i + x_{i-1})$$

إذن يكون لدينا

$$\begin{aligned} V_P(g) &= (6 - x_1^2) + (x_2^2 - x_1^2) + \ldots + (4 - x_{n-1}^2) \\ &= 10 - 2x_1^2 \end{aligned}$$

ومنه نحصل على

$$V_1^2(g) = \sup_{P \in \mathcal{P}_{1,2}} (10 - 2x_1^2) = \sup_{1 \leq x_1 \leq 2} (10 - 2x_1^2) = 8 < \infty$$

وهو مايعني أن التابع g محدود التغير على المجال $[1,2]$. أخيرا فإن التابع g ذو تغير محدود على المجال $[0,2]$ وتغيره الكلي هو

$$V_0^2(g) = V_0^1(g) + V_1^2(g) = 15.$$

حل التمرين 3.1 :

نعتبر P تقسيما للمجال $[0,1]$ معرفا بأن

$$P = \{0,1\} \cup \left\{\frac{2}{(2k+1)\pi}, 0 \leq k \leq n\right\}.$$

لدينا عندئذ

$$\begin{aligned} V_P(f) &\geq \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi} - \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi}\right| \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k-1}\right| \\ &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} \end{aligned}$$

أي أن

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : V_P(f) \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}.$$

بالمرور إلى النهاية في طرفي المتراجحة الأخيرة عندما يؤول n إلى $+\infty$ نحصل على

$$V_P(f) = +\infty,$$

وهو ما يثبت أن التابع f تغيره غير محدود على المجال $[0,1]$.

حل التمرين 4.1 :

1) ليكن

$$P=\{x_0,...,x_n\}$$

تقسيما للمجال $[c,d]$. لدينا عندئذ

$$\begin{aligned}V_P(f)&=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&\le k\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\,,\\&=k(d-c)\end{aligned}$$

بالمرور إلى الحد الأعلى في طرفي المتراجحة الأخيرة على مجموعة كل تقسيمات المجال $[c,d]$ نحصل على ما يلي

$$V_c^d(f)=\sup_{P\in\mathcal{P}_{c,d}}V_P(f)\le k(d-c)<\infty.$$

2) ليكن $P=\{x_0,...,x_n\}$ تقسيما كيفيا للمجال $[a,b]$ ، لدينا عندئذ

$$\begin{aligned}V_P(f\circ g)&=\sum_{i=1}^{n}|f\circ g(x_i)-f\circ g(x_{i-1})|\\&\le k\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)-g(x_{i-1})|\\&=kV_P(g)\\&\le kV_a^b(g)\end{aligned}$$

وهذا يعني أن

$$\forall P\in\mathcal{P}_{a,b}:V_P(f\circ g)\le kV_a^b(g)$$

إنطلاقا من المتراجحة الأخيرة، نمر إلى الحد الأعلى على مجموعة كل تقسيمات المجال $[a,b]$ فنحصل على

$$V_a^b(f\circ g)\le kV_a^b(g)<\infty.$$

3) فيما يلي نكتب $|f|^p=h\circ\ell$ حيث h و ℓ توابع معرفة بأن

$$\ell:[a,b]\longrightarrow[0,c]\,,\,\ell(x)=|f(x)|$$

$$h:[0,c]\longrightarrow\mathbb{R},\,h(t)=t^p$$

بما أن القيمة المطلقة لتابع محدود التغير هي تابع محدود التغير فإن التابع ℓ محدود التغير على $[a,b]$. لإثبات المطلوب نستعمل السؤال السابق، لذلك يكفي إثبات أن التابع h ليبشيزي (Lipschitzien) على المجال $[0,c]$.

ليكن $x,y\in[0,c]$ ، حسب نظرية التزايدات المنتهية يوجد ثابت $C_{x,y}$ من المجال $[0,c]$ يحقق $x<C_{x,y}<y$ أو $(y<C_{x,y}<x)$ وكذلك

$$|h(x)-h(y)|=|h'(C_{x,y})|\,|x-y|\,.$$

التابع المشتق h' محدود على $[0,c]$ لأن

$$\forall x\in[0,c]:|h'(x)|=px^{p-1}\leq pc^{p-1}=M.$$

وهو ما يثبت أن

$$\forall x,y\in[0,c]:|h(x)-h(y)|\leq M\,|x-y|\,.$$

وهو المطلوب إثباته، يعني أن $|f|^p$ محدود التغير على المجال $[a,b]$.

حل التمرين 5.1 :

1) التابع $|f|$ مستمر على المجال $[a,b]$ لأن التابع f مستمر على المجال $[a,b]$. ومنه لإثبات أن التكامل $\int_a^b |f|\,dg^*$ موجود يكفي إثبات أن التابع g^* متزايد على المجال $[a,b]$.

ليكن $x_1,x_1\in[a,b]$ بحيث $x_1<x_2$ ومنه $[a,x_1]\subset[a,x_2]$ وهذا يعني أن كل تقسيم للمجال $[a,x_1]$ هو تقسيم للمجال $[a,x_2]$ إذن نحصل على

$$V_a^{x^1}(g)=\sup_{p\in\mathcal{P}_{a,x_1}}V_P(g)\leq\sup_{p\in\mathcal{P}_{a,x_2}}V_P(g)=V_a^{x_2}(g),$$

وهو ما يثبت أن $g^*(x_1)\leq g^*(x_2)$ وهذا يعني أن g^* متزايد على المجال $[a,b]$.

2) ليكن $P=\{x_0,...,x_n\}$ تقسيما للمجال $[a,b]$ وليكن $Q=\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ تقسيما وسطا له، أي

$$x_{i-1}\leq\alpha_i\leq x_i,\,i\in\{1,...,n\}\,.$$

مجاميع ستيلجس للتابع f بالنسبة للتابع g وفقا للتقسيمات P و Q تعطي

$$\begin{aligned}|S(f,g,P,Q)|&=\left|\sum_{i=1}^{n}f(\alpha_i)\,(g(x_i)-g(x_{i-1}))\right|\\&\leq\sum_{i=1}^{n}|f(\alpha_i)|\,|g(x_i)-g(x_{i-1})|\,.\end{aligned}$$

ومن جهة ثانية لدينا

$$|g(x_i)-g(x_{i-1})|\leq V_{x_{i-1}}^{x_i}(g)=V_a^{x_i}(g)-V_a^{x_{i-1}}(g)=g^*(x_i)-g^*(x_{i-1}).$$

ومنه نحصل على

$$|S(f,g,P,Q)|\leq\sum_{i=1}^{n}|f(\alpha_i)|\,(g^*(x_i)-g^*(x_{i-1}))=S(|f|\,,g^*,P,Q).$$

بالمرور إلى النهاية عندما $\delta P\longrightarrow 0$ نحصل على المتراجحة المطلوبة

$$\left|\int_a^b f dg\right|\leq\int_a^b|f|\,dg^*.$$

حل التمرين 6.1 :

1) بما أن التابع g متزايد على المجال $[0,1]$ فهو محدود التغير على هذا المجال ولدينا

$$V_0^1(g) = |g(1) - g(0)| = 1,$$

من جهة ثانية كذلك التابع g متناقص على المجال $[1,2]$ فهو محدود التغير على هذا المجال ولدينا

$$V_1^2(g) = |g(2) - g(1)| = 1,$$

ومنه التابع g محدود التغير على المجال $[0,2]$ وتغيره الكلي هو

$$V_0^2(g) = 1 + 1 = 2.$$

2) التابع $x \longmapsto x$ مستمر على المجال $[0,2]$ والتابع g محدود التغير على المجال $[0,2]$ إذن التكامل $\int_0^2 xdg$ موجود (وذلك حسب النتيجة 1.1.1) .
3) مجموع ستيلجس للتابع f نسبة للتابع g باستخدام التقسيمات P_n و Q_n هي

$$\begin{aligned} S(x,g,P_n,Q_n) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\left(\left(\frac{i}{n}\right)^3 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^3\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(\left(1-\frac{i}{n}\right)^3 - \left(1-\frac{i-1}{n}\right)^3\right). \end{aligned}$$

بعد التبسيط والحساب نحصل على

$$\int_0^2 xdg = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S(x,g,P_n,Q_n) = \frac{-1}{2}.$$

حل التمرين 7.1 :

1) بما أن m موجب فإن التابع $g : x \longmapsto x^m$ متزايد ومنه محدود التغير على المجال $[0,b]$، وكذلك التابع $x \longmapsto x$ مستمر على المجال $[0,b]$. وهو ما يثبت أن تكامل ستيلجس المطلوب موجود .
2) بما أن $0 < \lambda < 1$ فإن

$$x_{i+1} = \frac{1}{\lambda}x_i > x_i,$$

من أجل كل $i = 1, ..., n$. وهذا يعني أن $P_n(\lambda)$ هو تقسيم للمجال $[0,b]$.
لدينا ما يلي

$$\begin{aligned} S(x,g,P_n(\lambda),Q_n(\lambda)) &= f(x_0)\left(g(x_1) - g(x_0)\right) + \sum_{i=2}^{n} f(x_i)\left(g(x_i) - g(x_{i-1})\right) \\ &= \left(\lambda^{n-1}b\right)^{m+1} + \sum_{i=2}^{n} \lambda^{n-i}b\left(\left(\lambda^{n-i}b\right)^m - \left(\lambda^{n-i+1}b\right)^m\right) \\ &= \left(\lambda^{n-1}b\right)^{m+1} + (1-\lambda^m)\, b^{m+1} \sum_{i=2}^{n} \lambda^{(n-i)(m+1)}. \end{aligned}$$

بوضع $k=n-i$ في المجموع السابق نحصل على

$$\begin{aligned} S(x,g,P_n(\lambda),Q_n(\lambda)) &= \left(\lambda^{n-1}b\right)^{m+1} + (1-\lambda^m)\, b^{m+1}\sum_{k=0}^{n-2}\lambda^{(m+1)k} \\ &= \left(\lambda^{n-1}b\right)^{m+1} + (1-\lambda^m)\, b^{m+1}\frac{1-(\lambda^{m+1})^{n-1}}{1-\lambda^{m+1}}. \end{aligned}$$

ومنه نحسب التكامل كما يلي

$$\begin{aligned} \int_0^b xd(x^m) &= \lim_{\lambda\longrightarrow 1}\left(\lim_{n\longrightarrow +\infty} S(x,g,P_n(\lambda),Q_n(\lambda))\right) \\ &= \lim_{\lambda\longrightarrow 1}\frac{(1-\lambda^m)\, b^{m+1}}{1-\lambda^{m+1}} \\ &= \lim_{\lambda\longrightarrow 1} b^{m+1}\frac{1+\lambda+...+\lambda^{m-1}}{1+\lambda+...+\lambda^m} \\ &= \frac{m}{m+1}b^{m+1}. \end{aligned}$$

3) للتحقق من نتيجة السؤال السابق نستخدم النظرية 5.1.1 . التابع $g: x\longmapsto x^m$ قابل للإشتقاق على المجال $[0,b]$ وتابعه المشتق مستمر على هذا المجال وكذلك التابع $f: x\longmapsto x$ قابل للمكاملة حسب ريمان على المجال $[0,b]$ ومنه لدينا ما يلي

$$\int_0^b xd(x^m) = \int_0^b fdg = \int_0^b f(x)g'(x)dx = \int_0^b mx^m dx = \frac{m}{m+1}b^{m+1}.$$

حل التمرين 8.1 :

1) المساواة المطلوب إثباتها صحيحة وضوحا من أجل $n=1$ ، نفرض صحتها من أجل n ونبرهن صحتها من أجل $n+1$.
لدينا ما يلي

$$\begin{aligned} & 1+2q+3q^2+...+nq^{n-1}+(n+1)q^n \\ &= \frac{1-q^n-nq^n(1-q)}{(1-q)^2}+(n+1)q^n \\ &= \frac{1-q^{n+1}-(n+1)q^{n+1}(1-q)}{(1-q)^2}. \end{aligned}$$

2) f و g توابع عددية معرفة على المجال $[0,b]$ بأن $f(x)=x$ و $g(x)=e^x$.
نلاحظ أن f مستمر على $[0,b]$ و g متزايد على نفس المجال، إذن حسب النظرية 4.1.1 فإن f يقبل المكاملة حسب ستيلجس نسبة إلى التابع g على المجال $[0,b]$. تعطى مجاميع ستيلجس كما يلي

$$\begin{aligned} S(x,g,P_n,Q_n) &= \sum_{i=1}^n f\left(\frac{ib}{n}\right)\left(g\left(\frac{ib}{n}\right)-g\left(\frac{(i-1)b}{n}\right)\right) \\ &= \frac{b}{n}\left(e^{\frac{b}{n}}-1\right)\sum_{i=1}^n i\left(e^{\frac{b}{n}}\right)^{i-1}. \end{aligned}$$

بوضع $q = e^{\frac{b}{n}}$ في المساواة التي أثبتناها بالتراجع، نحصل على

$$S(x,g,P_n,Q_n) = -\frac{b}{n}\left(\frac{1-e^b-ne^b(1-e^{\frac{b}{n}})}{1-e^{\frac{b}{n}}}\right)$$

ومنه نحسب التكامل المطلوب كما يلي

$$\begin{aligned} T = \int_0^b xd(e^x) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} S(x,g,P_n,Q_n) \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\frac{b}{n}}{e^{\frac{b}{n}}-1}\left(1-e^b+be^b\frac{e^{\frac{b}{n}}-1}{\frac{b}{n}}\right) \\ &= 1-e^b+be^b. \end{aligned}$$

حل التمرين 9.1 :

حسب المعطيات، تكاملي ستيلجس التاليين موجودين $\int_a^b fdg$ ، $\int_a^b fdh$. نعتبر تقسيما للمجال $[a,b]$ معرفا بأن

$$P = \{x_0, ..., x_n\}, \forall i : t_i \notin P.$$

والتقسيم المرافق له $Q = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ مع $x_{i-1} \leq \alpha_i \leq x_i$ من أجل كل $i = 1, ..., n$. عندئذ يكون

$$\begin{aligned} S(f,g,P,Q) &= \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\left(g(x_i)-g(x_{i-1})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\left(h(x_i)-h(x_{i-1})\right) \\ &= S(f,h,P,Q). \end{aligned}$$

بالمرور إلى النهاية في طرفي المتراجحة الأخيرة عندما $\delta P \longrightarrow 0$ نحصل على المطلوب .

حل التمرين 10.1 :

بما أن التابع f مستمر على المجال $[a,b]$ فإن تابع القيمة المطلقة $|f|$ كذلك مستمر على نفس المجال وحيث أن التابع g محدود التغير على المجال $[a,b]$ نستنتج أن تكاملي ستيلجس التاليين موجودين

$$\int_a^b fdg \text{ و } \int_a^b |f|\, dg.$$

ليكن P تقسيما للمجال $[a,b]$ معرفا بأن $P = \{x_0, ..., x_n\}$ وليكن التقسيم المرافق له المعرف بأن

$$Q = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\},$$

حيث $x_{i-1} \leq \alpha_i \leq x_i$ من أجل كل $i = 1, ..., n$. عندئذ لدينا ما يلي

$$|S(f,g,P,Q)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(\alpha_i)|\left|(g(x_i)-g(x_{i-1}))\right|.$$

من تزايد التابع g نحصل على

$$|(g(x_i) - g(x_{i-1}))| = (g(x_i) - g(x_{i-1})),$$

وبالتالي نحصل على

$$|S(f, g, P, Q)| \leq S(|f|, g, P, Q),$$

بالمرور إلى النهاية في طرفي المتراجحة الأخيرة عندما $\delta P \longrightarrow 0$ نحصل على المطلوب .

حل التمرين 11.1 :

ليكن $P = \{x_0, ..., x_n\}$ تقسيما للمجال $[-1, 1]$ بحيث $0 \notin P$. عندئذ يوجد j بحيث $x_{j-1} < 0 < x_j$.
وليكن $Q = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ تقسيما مرافقا للتقسيم P بحيث $x_{i-1} \leq \alpha_i \leq x_i$.
في هذه الحالة يكون لدينا

$$\forall i \neq j : g(x_i) \neq g(x_{i-1}).$$

ومنه نحصل على

$$\begin{aligned} S(f, g, P, Q) &= 0 + ... + 0 + f(\alpha_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})) + 0 + ... + 0 \\ &= f(\alpha_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})) = f(\alpha_j)(1 - 0) = f(\alpha_j). \end{aligned}$$

أي أن

$$S(f, g, P, Q) = f(\alpha_j) = \begin{cases} 0, \text{ si } -1 \leq \alpha_j \leq 0 \\ 1, \text{ si } \ \ 0 < \alpha_j \leq 0 \end{cases}$$

إذن نستنتج أن المجموع $S(f, g, P, Q)$ ليس له نهاية عندما $\delta P \longrightarrow 0$ ، وهذا يعني أن تكامل ستيلجس $\int_{-1}^{1} f dg$ غير موجود .

الفصل الثاني

الفضاءات القيوسة

عناوين الفصل :

1.2 تذكير نظري للدروس

1.1.2 مفاهيم أولية حول المجموعات ومتتاليات المجموعات

في كل ما يلي لتكن X مجموعة غير خالية (نتخذها كمجموعة مرجعية) ونرمز بالرمز $\mathcal{P}(X)$ إلى الأسرة المشكلة من كل أجزاء X . لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من X أي $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

متممة المجموعة A بالنسبة إلى X هي المجموعة المعرفة بأن

$$A^C = \{x \in X : x \notin A\}.$$

فرق المجموعتين A و B هي المجموعة الجزئية من X المعرفة بأن

$$A - B = \{x \in X : x \in A \text{ و } x \notin B\}.$$

ولدينا كذلك

$$A - B = A \cap B^C = A - (A \cap B).$$

الفرق التناظري للمجموعتين A و B هي المجموعة الجزئية من X المعرفة بأن

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B).$$

قابلية العد

فيما يتعلق بنظرية القياس من الضروري جدا معرفة كيفية التمييز بين الأجزاء القابلة للعد أو غير القابلة للعد .

تعريف 1.1.2.

نقول عن المجموعة E أنها قابلة للعد إذا وجد تطبيق تقابلي بين E و مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

ملاحظة 1.1.2.

لتكن E مجموعة قابلة للعد، عندئذ يوجد تطبيق تقابلي $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$ (يعني أنه متتالية) ومنه من أجل كل عدد طبيعي n يوجد عنصر $x \in E$ بحيث $f(n) = x$ وفي هذه الحالة نستطيع أن نكتب

$$E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_0, ..., x_n, ...\}$$

أي المجموعات القابلة للعد هي تلك التي نستطيع ترقيم عناصرها بواسطة الأعداد الطبيعية أو نستطيع تعداد عناصرها .

النهاية السفلى والعليا لمتتالية مجموعات

تعريف 2.1.2.

لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن $(A_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية من أجزاء X أي

$$A_n \in \mathcal{P}(X), \forall n \in \mathbb{N}.$$

نعرف النهاية العليا والنهاية السفلى للمتتالية $(A_n)_{n\geqslant 1}$ بأن

$$\overline{\lim} A_n = \limsup_n A_n := \bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k$$
$$\underline{\lim} A_n = \liminf_n A_n := \bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k.$$

في التعريف السابق نأخذ الحدين الأعلى والأسفل بالنسبة إلى علاقة الترتيب الجزئي المتمثلة في علاقة الإحتواء بين أجزاء X .

ملاحظة 2.1.2.
لدينا دوما

$$\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n \tag{1.2}$$

وإثبات ذلك أنه $\bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset A_k$ من أجل كل $k \geqslant n$. ومنه لدينا $\bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset \bigcup_{k\geqslant n} A_k$ من أجل كل n . إذن من أجل كل n لدينا ما يلي

$$\bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset \bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k = \overline{\lim} A_n$$

أخيرا نستنتج أن

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset \overline{\lim} A_n$$

وهذا يعني أن الإحتواء (1.2) صحيح .

قضية 1.1.2. (تقارب متتالية مجموعات)
1) إذا كانت المتتالية $(A_n)_n$ متزايدة، أي $A_n \subset A_{n+1}$ من أجل كل $n \geq 1$ فإن

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

2) إذا كانت المتتالية $(A_n)_n$ متناقصة، أي $A_{n+1} \subset A_n$ من أجل كل $n \geq 1$ فإن

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$$

في كلتا الحالتين نقول أن المتتالية $(A_n)_n$ متقاربة .

2.1.2 الفضاءات القيوسة

الآن نهتم بدراسة أسرة خاصة من أجزاء المجموعة X تسمى عشيرة . حيث نعرف عليها القياس الموجب كتطبيق مجموعاتي إنطلاقا من هذه الأسرة نحو المجال $[0, +\infty]$ يحقق شروطا معينة .

تعريف 3.1.2.
لتكن X مجموعة غيرخالية و $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ أسرةمن أجزاء X .
نقول عن $\mathcal{M}$ أنها عشيرة (أو σ-جبر) على X إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية
(c1) $\emptyset \in \mathcal{M}$.
(c2) إذا كان $A \in \mathcal{M}$ فإن $A^c \in \mathcal{M}$.
(c3) إذا كانت $(A_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية عناصرها من $\mathcal{M}$ فإن $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$.
عناصر $\mathcal{M}$ تسمى الأجزاء القيوسة في X و تسمى الثنائية $(X, \mathcal{M})$ فضاءا قيوسا .

ملاحظة 3.1.2.
إذا كانت $\mathcal{M}$ عشيرة على X فإن
(i) $X \in \mathcal{M}$ لأنه حسب (c1) و (c2) من التعريف السابق لدينا $X = \emptyset^c \in \mathcal{M}$.
(ii) إذا كانت $(A_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية عناصرها من $\mathcal{M}$ فإن $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$.
لإثبات ذلك، نرى أنه بإستخدام (c2) و (c3) ، $A_n \in \mathcal{M}$ يستلزم أن

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c \right)^c \in \mathcal{M}.$$

(iii) إذا كان $A, B \in \mathcal{M}$ فإن $A - B, A\Delta B \in \mathcal{M}$ لأن

$$A \backslash B = A \cap B^c \in \mathcal{M} \text{ et } A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) \in \mathcal{M}.$$

تعريف 4.1.2.
نسمي جبرا على المجموعة X كل أسرة $\mathcal{A}$ من أجزاء X تحقق الشروط التالية
1) $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2) إذا كان $A \in \mathcal{A}$ فإن $A^c \in \mathcal{A}$.
3) إذا كان $A, B \in \mathcal{A}$ فإن $A \cup B \in \mathcal{A}$.

ملاحظة 4.1.2.
واضح أن كل عشيرة هي جبر مستقر بالنسبة للإتحاد العدود .

مثال 1.1.2.
X مجموعة غير خالية .
1) $\mathcal{P}(X)$ ، أسرة كل أجزاء المجموعة X هي أكبر عشيرة معرفة على X .
2) الأسرة $\mathcal{M} = \{\phi, X\}$ هي أصغر عشيرة معرفة على X .

3) إذا كانت X مجموعة غير منتهية فإن الأسرة $\mathcal{M}$ المعرفة كما يلي

$$\mathcal{M}=\left\{A\subset X:\ (A \text{عدودة}) \text{ أو } (A^c \text{عدودة})\right\}.$$

هي عشيرة على X .

4) لتكن $(E_n)_{n\geqslant 1}$ تجزئة عدودة للمجموعة X بمعنى

$$\begin{cases} E_n\cap E_m=\emptyset,\ \forall m\neq n,\\ X=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}E_n \end{cases}$$

عندئذ الأسرة التالية

$$\mathcal{M}=\left\{A\subset X,\ A=\bigcup_{i\in I}E_i,\ I\subset\mathbb{N}^*\right\},$$

تشكل عشيرة على X ، وتسمى العشيرة المولدة بالتجزئة $(E_n)_{n\geqslant 1}$.

5) إذا كانت X مجموعة غير منتهية فإن الأسرة $\mathcal{A}$ المعرفة كما يلي

$$\mathcal{A}=\left\{A\subset X,\ (A \text{منتهية}) \text{ أو } (A^c \text{منتهية})\right\},$$

ليست عشيرة على X بينما هي جبر على X .

قضية 2.1.2. (عشيرة الصورة العكسية)
لتكن X و Y مجموعتان غير خاليتان ولتكن $\mathcal{N}$ عشيرة على Y و f تطبيقا من X نحو Y . الأسرة $f^{-1}(\mathcal{N})$ التي عناصرها أجزاء من X والمعرفة بأن

$$f^{-1}(\mathcal{N})=\left\{f^{-1}(B):B\in\mathcal{N}\right\},$$

تشكل عشيرة على X وتسمى عشيرة الصورة العكسية لـ $\mathcal{N}$.

توطئة 1.1.2.
إذا كانت $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ أسرة كيفية من العشائر المعرفة على نفس المجموعة X . فإن تقاطعها الكيفي $\bigcap\limits_{i\in I}\mathcal{M}_i$ هو كذلك عشيرة على X .

تعريف 5.1.2.
لتكن S أسرة من أجزاء مجموعة غير خالية X . نرمز بـ $\sigma(S)$ إلى الأسرة الناتجة من تقاطع كل العشائر $\mathcal{M}$ التي تحوي S . عندئذ $\sigma(S)$ هي عشيرة على X وتسمى العشيرة المولدة بواسطة الأسرة S . وهي كذلك أصغر عشيرة على X تحوي الأسرة S .

العشيرة البوريلية (Borélienne)

ليكن X فضاءً طبولوجيا (أو متريا) نذكر أن أسرة مفتوحاته $\mathcal{O}$ ، ليست بالضرورة عشيرة على X (إلا في حالات خاصة جدا) . لرؤية ذلك نأخذ مثلا $X = \mathbb{R}$ حيث من الواضح أن

$$\forall n \geq 1 : \left]-\frac{1}{n}, 1\right[\in \mathcal{O},$$

غير أن

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-\frac{1}{n}, 1\right[= [0, 1[\notin \mathcal{O}.$$

تعريف 2،1،6.
العشيرة البوريلية للفضاء الطبولوجي $(X, \mathcal{O})$ هي العشيرة المولدة بواسطة أسرة المفتوحات $\mathcal{O}$. ويرمز لها بالرمز $\mathcal{B}(X)$.
عناصر هذه العشيرة تدعى المجموعات البوريلية في X .

قضية 2،1،3.
العشيرة البويلية $\mathcal{B}(X)$ مولدة كذلك بالأجزاء المغلقة للفضاء الطبولوجي X .

نظرية 2،1،1.
$\mathbb{R}$ مزود بالطبولوجيا الإعتيادية . العشيرة $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ مولدة بواسطة أسرة المجالات من الشكل $]a, +\infty[$ حيث $a \in \mathbb{R}$.

2.2 تمارين الفصل الثاني

1) حول متتاليات المجموعات

تمرين 1.2.
$(A_n)_n$ متتالية من أجزاء مجموعة X .
تأكد من أن نهايتها العليا $\overline{\lim} A_n$ هي المجموعة المكونة من عناصر X التي تنتمي إلى مالانهاية من الأجزاء A_n وأن نهايتها السفلى $\underline{\lim} A_n$ هي المجموعة المكونة من عناصر X التي تنتمي إلى كل الأجزاء A_n عدا عدد منته منها .

تمرين 2.2.
1) برهن أنه من أجل كل متتالية $(A_n)_n$ عناصرها من أجزاء المجموعة X لدينا $\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n$.
2) من أجل $(A_n)_n$ و $(B_n)_n$ كيفيتين عناصرهما من أجزاء المجموعة X ، برهن أن

$$(\underline{\lim} A_n) \cup (\underline{\lim} B_n) \subset \underline{\lim}\,(A_n \cup B_n) \subset \overline{\lim}\,(A_n \cup B_n) = \left(\overline{\lim} A_n\right) \cup \left(\overline{\lim} B_n\right).$$

3) إستنتج أنه إذا كانت $(A_n)_n$ متقاربة نجو A وكانت $(B_n)_n$ متقاربة نحو B فإن $(A_n \cup B_n)_n$ متقاربة نحو $A \cup B$.

تمرين 3.2.
الهدف من التمرين هو إنشاء متتالية أجزاء منفصلة مثنى مثنى إنطلاقا من أخرى كيفية بحيث إتحاد عناصر هذه الأخيرة يساوي إتحاد عناصر المتتالية الكيفية .
لتكن $(A_n)_n$ متتالية كيفية من أجزاء المجموعة X .
$(B_n)_n$ متتالية من أجزاء المجموعة X معرفة كما يلي

$$\begin{cases} B_n = A_n \bigcap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i\right)^C, n \geq 2 \\ B_1 = A_1 \end{cases}$$

1) برهن أن الأجزاء B_n منفصلة مثنى مثنى بمعنى

$$B_n \cap B_m = \emptyset, \forall n \neq m.$$

2) برهن أن

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

(لاحظ أن $B_n \subset A_n$ من أجل كل $n \geq 1$)

تمرين 4.2.
لتكن X مجموعة غير خالية، A و B جزئين منها . عين النهايتين العليا والسفلى للمتتالية $(A_n)_n$ المعرفة بأن

$$\begin{cases} A_{2n} = A \\ A_{2n+1} = B \end{cases}, \ \forall n \geq 1$$

تمرين 5.2.
$(A_n)_n$ متتالية من أجزاء المجموعة $\mathbb{R}^2$ معرفة كما يلي

$$A_n = [n, 2n] \times [0, 1 + (-1)^n] \, .$$

تحقق أن

$$\forall n \geq 1 : \bigcup_{k \geq n} A_k \subset [n, +\infty[\times [0, 2] \, ,$$

ثم برهن أن المتتالية $(A_n)_n$ متقاربة نحو الجزء الخالي $\emptyset$.

تمرين 6.2.
عين النهايتين العليا والسفلى لمتتاليات أجزاء $\mathbb{R}$ ، في الحالات التالية
أ) $A_n = P_n.\mathbb{N}$ حيث $(P_n)_n$ هي متتالية الأعداد الأولية (التي نعلم أنها متزايدة تماما) .
ب)

$$B_n = \left] \frac{-1}{n}, 1 \right] , C_n = \left[\frac{-1}{n}, 1 \right] .$$

2) حول الفضاءات القيوسة

تمرين 7.2.
لتكن X و Y مجموعتان غير خاليتان ولتكن $\mathcal{M}$ عشيرة على X و $\mathcal{N}$ عشيرة على Y ونعتبر التطبيق $f : X \longrightarrow Y$. نعتبرالأسرة $f^{-1}(\mathcal{N})$ التي عناصرها أجزاء من X والمعرفة بأن $f^{-1}(\mathcal{N}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{N}\}$.

(أي أن $A \in f^{-1}(\mathcal{N})$ إذا وفقط إذا وجد $B \in \mathcal{N}$ بحيث $A = f^{-1}(B)$) .

نعتبر كذلك الأسرة $f(\mathcal{M})$ التي عناصرها أجزاء من Y والمعرفة بأن $f(\mathcal{M}) = \{f(A) : A \in \mathcal{M}\}$.

1) برهن أن $f^{-1}(\mathcal{N})$ تشكل عشيرة على X .
2) إليك المعطيات التالية: $X = \{0, 1, 2, 3\}$ ، $Y = \{a, b, c\}$ والتطبيق $f : X \longrightarrow Y$ معرف بأن

$$\begin{cases} f(0) = f(3) = a \\ f(1) = b \\ f(2) = c \end{cases}$$

وكذلك العشيرة $\mathcal{M} = \{\emptyset, X, \{0, 1\}, \{2, 3\}\}$.

إستخدم المعطيات السابقة لتبرهن أن االأسرة $f(\mathcal{M})$ ليست عشيرة على Y .

3) إذا كانت $\mathcal{F}$ أسرة كيفية من أجزاء Y فبرهن أن

$$\sigma\left[f^{-1}(\mathcal{F})\right] = f^{-1}\left[\sigma\left(\mathcal{F}\right)\right].$$

تمرين 2.8.
X مجموعة غير خالية . $\mathcal{D}(X)$ فئة من أجزاء X معرفة كما يلي

$$\mathcal{D}(X) = \left\{A \subset X : (\text{عدودة}A) \text{ أو } (\text{عدودة}A^C).\right\}$$

برهن أن $\mathcal{D}(X)$ عشيرة على X مولدة بفئة وحيدات العنصر $\mathcal{S} = \{\{x\}, x \in X\}$.

تمرين 2.9.
X مجموعة غير خالية و $\mathcal{M}$ أسرة من أجزاء المجموعة X .
برهن أن $\mathcal{M}$ عشيرة على X إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية
(1) $\emptyset \in \mathcal{M}$.
(2) $\mathcal{M}$ مستقرة بالنسبة إلى المتممة وبالنسبة إلى التقاطع المنتهي .
(3) إذا كانت $(A_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية عناصرها من الأسرة $\mathcal{M}$ منفصلة مثنى مثنى فإن $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

تمرين 2.10. لتكن $A_1, ..., A_m$ تجزئة للمجموعة $\mathbb{R}$.
نعتبر $\mathcal{M}$ الأسرة المشكلة من كل الإتحادات الممكنة للأجزاء A_i ، بمعنى آخر

$$\mathcal{M} = \left\{B = \bigcup_{i\in I} A_i : I \subset \{1, ..., m\}\right\}.$$

برهن أن الأسرة $\mathcal{M}$ تشكل عشيرة على $\mathbb{R}$.

تمرين 2.11.
ليكن (X, τ) فضاءً طبولوجيا ولتكن $\mathcal{B}(X)$ العشيرة البوريلية المرفقة بـ X .
1) برهن أن العشيرة $\mathcal{B}(X)$ مولدة بأسرة جميع مغلقات X .
2) نفرض أن الفضاء الطبولوجي X منفصل .
استنتج أن كل جزء قابل للعد في X هو بوريلي، أي ينتمي إلى العشيرة $\mathcal{B}(X)$.

تمرين 12.2.

1) برهن أنه من أجل كل عددين حقيقيين a, b حيث $a < b$ يكون لدينا

$$[a,b[= \bigcap_{n=1}^{+\infty}]a-\tfrac{1}{n}, b[\text{ و }]a,b[= \bigcup_{n=1}^{+\infty} [a+\tfrac{1}{n}, b[$$

2) لتكن $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ العشيرة البوريلية لـ $\mathbb{R}$ مزود بالطبولوجيا الإعتيادية .
برهن أن $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ مولدة كذلك بفئة المجالات من الشكل $[a,b[$.

تمرين 13.2.

الهدف من التمرين هو إثبات أن $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ مولدة بفئة المستطيلات $\{A \times B : A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.
نذكر أن كل مفتوح θ من $\mathbb{R}^2$ يكتب على شكل إتحاد قابل للعد للمستطيلات المفتوحة $I_n \times J_n$ (مع I_n و J_n مجالات مفتوحة في $\mathbb{R}$) .

1) ليكن A مفتوح في $\mathbb{R}$ ونعتبر الفئة

$$T_1 = \left\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\right\}$$

أثبت أن T_1 عشيرة على $\mathbb{R}$ تحوي مفتوحات $\mathbb{R}$ - ماذا تستنتج؟

2) ليكن B عنصر من $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ونعتبر الفئة

$$T_2 = \left\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\right\}$$

أثبت أن $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = T_2$.

3) لتكن T العشيرة المولدة بالفئة $\{A \times B : A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$
برهن أن $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (ومنه $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$) .

تمرين 14.2.

لتكن A ، B ، C ثلاثة مجموعات معرفة كما يلي

$$\begin{aligned}
A &= \left\{x \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N}^* : |x-n| < \frac{1}{n}\right\},\\
B &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1 \quad \text{و} \quad x \notin \mathbb{Q}\right\},\\
C &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\right\}.
\end{aligned}$$

برهن أن كل من A ، B و C هي مجموعات بوريلية، بمعنى أن $A \in B(\mathbb{R})$ ، $B \in B(\mathbb{R}^2)$ و $C \in B(\mathbb{R}^2)$.

تمرين 15.2.

ليكن (X, τ) فضاءً طبولوجيا منفصلا و $\mathcal{K}$ فئة الأجزاء المتراصة فيه .

نقول عن جزء A من X أنه σ -محدود إذا كان محتويا في إتحاد عدود من عناصر $\mathcal{K}$.

نقول عن فئة $\mathcal{F}$ من أجزاء X أنها عصبة إذا كان $\emptyset \in \mathcal{F}$ وكان $A - B \in \mathcal{F}$ من أجل كل $A \in \mathcal{F}$ و $B \in \mathcal{F}$ ثم إن $\mathcal{F}$ مستقرة بالنسبة إلى الإتحادات العدودة .

فيما يلي نرمز بـ $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$ إلى العشيرة المولدة من $\mathcal{K}$ و بـ $\mathcal{B}_\tau(X)$ إلى العشيرة البوريلية (أي المولدة من τ) .

1) برهن أن $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X) \subset \mathcal{B}_\tau(X)$.

2) أثبت أن الفئة $\mathcal{A}$ حيث

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : A \cap K \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X), \quad \forall K \in \mathcal{K}\}$$

تحتوي على كل أجزاء X المغلقة وأن $\mathcal{A}$ تشكل عشيرة على X و $\mathcal{B}_\tau(X) \subset \mathcal{A}$.

3) $\mathcal{C}$ هي الفئة المكونة من عناصر $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$ الـ σ -محدودة

أثبت أن $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$ وأن $\mathcal{C}$ تشكل عصبة على X .

4) إستنتج أنه إذا كان $A \in \mathcal{B}_\tau(X)$ وكان A جزء σ -محدود في X فإن $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$.

5) نفرض أن X مجموعة غير قابلة للعد مزودة بالطبولوجيا المتقطعة $\tau = \mathcal{P}(X)$

ما هي الأجزاء المتراصة نسبة إلى هذه الطبولوجيا؟

أثبت أن الإستلزام العكسي للإستلزام 4) غير صحيح في هذا الفضاء (إعتبر $A = X$) .

3.2 حلول تمارين الفصل الثاني

حل التمرين 1.2 :

ليكن $x \in \overline{\lim} A_n$ وذلك يكافئ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n : x \in A_k$$

وهو ما يكافئ أن المجموعة $\{n : x \in A_n\}$ غير منتهية .
ليكن $x \in \underline{\lim} A_n$ وذلك يكافئ

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n : x \in A_k$$

وهو ما يكافئ أن المجموعة $\{n : x \notin A_n\}$ منتهية .

حل التمرين 2.2 :

1) لدينا الإحتواء التالي

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \geq n : \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \subset A_k,$$

ومنه بالمرور إلى الإتحاد في الطرف الأول نجد

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \subset \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k.$$

بالمرور إلى التقاطع في الطرف الأول نحصل على

$$\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left\{ \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right\} = \overline{\lim} A_n,$$

إذن أخيرا

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \right\} \subset \overline{\lim} A_n.$$

2) بما أن

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : A_n \subset A_n \cup B_n \quad \text{و} \quad B_n \subset A_n \cup B_n$$

فإن

$$\underline{\lim} A_n \subset \underline{\lim} \left(A_n \cup B_n\right) \quad \text{و} \quad \underline{\lim} B_n \subset \underline{\lim} \left(A_n \cup B_n\right)$$

وبالتالي نحصل على

$$\underline{\lim} A_n \cup \underline{\lim} B_n \subset \underline{\lim} \left(A_n \cup B_n\right).$$

حسب السؤال الأول نكتب مباشرة

$$\underline{\lim} \left(A_n \cup B_n\right) \subset \overline{\lim} \left(A_n \cup B_n\right)$$

بقي إثبات المساواة

$$\overline{\lim} \left(A_n \cup B_n\right) = \left(\overline{\lim} A_n\right) \cup \left(\overline{\lim} B_n\right).$$

نأخذ عندئذ

$$x \in \overline{\lim} \left(A_n \cup B_n\right).$$

وهذا يكافيء أن
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \geq n : x \in A_k \cup B_k$$
وهو يكافيء أن
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \geq n : x \in A_k \\ \text{أو} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \geq n : x \in B_k \end{cases}$$
أخيرا ذلك يكافيء
$$x \in \left(\overline{\lim} A_n\right) \cup \left(\overline{\lim} B_n\right).$$
3) حسب السؤال السابق لدينا
$$A \cup B \subset \underline{\lim} \left(A_n \cup B_n\right) \subset \overline{\lim} \left(A_n \cup B_n\right) = A \cup B.$$
وهو ما يثبت المطلوب
$$\underline{\lim} \left(A_n \cup B_n\right) = \overline{\lim} \left(A_n \cup B_n\right) = A \cup B.$$

حل التمرين 3.2 :

1) ليكن $n \neq m$ ، نبرهن أن $B_m \cap B_n = \emptyset$ لذلك نفرض مثلا أن $n > m$. من الإحتواء $B_m \subset A_m$ نستنتج أن
$$\begin{aligned} B_m \cap B_n &\subset A_m \cap B_n \\ &= A_m \cap A_n \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i^C\right) \\ &= A_m \cap A_n \cap A_m^C \cap \left(\bigcap_{i=1, i\neq m}^{n-1} A_i^C\right) = \emptyset. \end{aligned}$$
ومنه نحصل على
$$\forall n \neq m : B_m \cap B_n = \emptyset.$$
2) بما أن $B_n \subset A_n$ أجل كل $n \geq 1$ فإن
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$
نثبت الإحتواء العكسي، ليكن
$$x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$
عندئذ يوجد $n \geq 1$ بحيث $x \in A_n$. ليكن n_0 أصغر الأعداد الطبيعية التي تحقق $x \in A_n$ معنى ذلك
$$n_0 = \min \left\{n \in \mathbb{N}^* : x \in A_n\right\}.$$
في هذه الحالة يكون لدينا
$$x \in A_{n_0} \text{ و } x \notin A_1 \text{ و } x \notin A_2 \text{ و } \ldots \text{ و } x \notin A_{n_0-1},$$

وذلك يعني أن
$$x \in A_{n_0} \cap A_1^C \cap A_2^C \cap \dots A_{n_0-1}^C.$$
ومنه $x \in B_{n_0}$ وذلك يستلزم أن
$$x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

حل التمرين 4.2 :

لدينا مباشرة
$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k = \bigcap_{n\geqslant 1} (A \cup B) = A \cup B.$$
وكذلك
$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{k\geqslant n} A_k = \bigcup_{n\geqslant 1} (A \cap B) = A \cap B.$$

حل التمرين 5.2 :

ليكن
$$(x, y) \in \bigcup_{k\geqslant n} A_k$$
وهذا يعني أنه يوجد عدد طبيعي k بحيث $k \geq n$ وكذلك
$$\begin{cases} x \in [k, 2k] \subset [n, +\infty[\\ \text{و} \\ y \in \left[0, 1 + (-1)^k\right] \subset [0, 2] \end{cases}$$
ومنه
$$(x, y) \in [n, +\infty[\times [0, 2],$$
ونكون قد أثبتنا المطلوب
$$\forall n \geq 1 : \bigcup_{k\geq n} A_k \subset [n, +\infty[\times [0, 2].$$
لنبحث الآن عن النهاية العليا للمتتالية $(A_n)_n$ ، لدينا ما يلي
$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k \subset \bigcap_{n\geqslant 1} [n, +\infty[\times [0, 2] = \emptyset.$$
التقاطع الأخير خالي لأنه إذا وجد (x_0, y_0) يحقق
$$(x_0, y_0) \in \bigcap_{n\geqslant 1} [n, +\infty[\times [0, 2],$$
فإن ذلك يستلزم أن
$$\forall n \geq 1 : x_0 \geq n.$$

وهذا يعني أن مجموعة الأعداد الطبيعية محدودة من الأعلى بالعدد x_0 وهو تناقض، ومنه

$$\overline{\lim} A_n = \emptyset.$$

بالنسبة إلى النهاية السفلى لدينا الإحتواء التالي

$$\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n = \emptyset,$$

أي أن

$$\underline{\lim} A_n = \emptyset.$$

في الأخير نستنتج أن

$$\underline{\lim} A_n = \emptyset = \overline{\lim} A_n.$$

يعني أن المتتالية $(A_n)_n$ متقاربة نحو الجزء الخالي .

حل التمرين 6.2 :

أ) نبحث أولا عن النهاية العليا، ليكن $x \in \overline{\lim} A_n$ يعني أن x ينتمي إلى عدد غير منته من الأجزاء A_n وهذا يكافئ أن x يقبل القسمة على عدد غير منته من الأعداد الأولية p_n وهذا يكافئ أن $x = 0$ ومنه

$$\overline{\lim} A_n = \{0\}.$$

بالنسبة للنهاية السفلى نكتب ما يلي

$$\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n = \{0\},$$

إذن لدينا

$$\underline{\lim} A_n = \{0\}.$$

ب) بما أن

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{-1}{n} \leq \frac{-1}{n+1} < 1$$

فإن المتتالية $(B_n)_n$ متناقصة، وكذلك $(C_n)_n$ متناقصة لنفس السبب، ومنه نحصل على

$$\overline{\lim} B_n = \underline{\lim} B_n = \bigcap_{n \geqslant 1} \left] \frac{-1}{n}, 1 \right] = [0, 1]$$
$$\overline{\lim} C_n = \underline{\lim} C_n = \bigcap_{n \geqslant 1} \left[\frac{-1}{n}, 1 \right] = [0, 1].$$

حل التمرين 7.2 :

1) لنثبت أن الأسرة $f^{-1}(\mathcal{N})$ عشيرة على X . بما أن $\emptyset \in \mathcal{N}$ و $\emptyset \in f^{-1}(\mathcal{N})$ فإن $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$.
لتكن $A \in f^{-1}(\mathcal{N})$ عندئذ يوجد $B \in \mathcal{N}$ بحيث $A = f^{-1}(B)$ ، لدينا ما يلي

$$A^C = \left(f^{-1}(B)\right)^C = f^{-1}(B^C),$$

ومنه $A^C \in f^{-1}(\mathcal{N})$ لأن $B^C \in \mathcal{N}$.
لتكن $(A_n)_n$ متتالية عناصرها من الأسرة $f^{-1}(\mathcal{N})$ ، عندئذ توجد متتالية $(B_n)_n$ عناصرها من $\mathcal{N}$ بحيث

$$\forall n \geq 1 : A_n = f^{-1}(B_n).$$

ومنه نحصل على ما يلي

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right).$$

إذن بما أن $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{N}$ فإن $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in f^{-1}(\mathcal{N})$. وهو ما ينهي البرهان المطلوب .
2) لدينا مباشرة

$$f(\mathcal{M}) = \{\emptyset, X, \{a,b\}, \{a,c\}\}$$

وهذه الأسرة ليست عشيرة لأن $\{a,b\} \in f(\mathcal{M})$ غير أن $\{a,b\}^C = \{c\} \notin f(\mathcal{M})$.

حل التمرين 8.2 :

واضح أن $\emptyset \in \mathcal{D}(X)$ وكذلك من تعريف الأسرة $\mathcal{D}(X)$ لدينا $A^C \in \mathcal{D}(X)$ كلما كان $A \in \mathcal{D}(X)$.
لتكن الآن $(A_n)_n$ متتالية من عناصر $\mathcal{D}(X)$ ، نميز عندئذ حالتين
إذا كانت كل الأجزاء A_n عدودة فإن إتحادها $\bigcup_n A_n$ جزء عدود وبالتالي $\bigcup_n A_n \in \mathcal{D}(X)$.
الآن إذا كان العكس صحيحا، أي إذا وجد جزء $A_{n_0} \in \mathcal{D}(X)$ غير عدود ومنه فإن الجزء $A_{n_0}^C$ عدود .
بملاحظة أن

$$\left(\bigcup_n A_n\right)^C = \bigcap_n A_n^C \subset A_{n_0}^C,$$

نستنتج أن $(\bigcup_n A_n)^C$ مجموعة عدودة لأنها محتواة في مجموعة عدودة، وهو ما يعني أن $\bigcup_n A_n \in \mathcal{D}(X)$.
نثبت الآن أن $\mathcal{D}(X)$ هي أصغر عشيرة تحوي $\mathcal{S}$. الإحتواء $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}(X)$ واضح لأن المجموعات أحادية العنصر أجزاء منتهية لتكن $\mathcal{M}$ عشيرة كيفية تحوي الأسرة $\mathcal{S}$ ونثبت أن $\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{M}$.
لتكن $A \in \mathcal{D}(X)$ ، نميز حالتين، إذا كان A عدود فنستطيع كتابة $A = \bigcup_n \{x_n\}$ ولدينا مباشرة $\{x_n\} \in \mathcal{M}$ من أجل كل n لأن $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ وبالتالي لدينا $A \in \mathcal{M}$.
في حالة A^C عدود نثبت بنفس الطريقة أن $A^C \in \mathcal{M}$ وبالتالي $A \in \mathcal{M}$.
كل ما سبق يثبت أن $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}(X)$.

حل التمرين 9.2 :

لزوم الشرط واضح . لإثبات كفاية الشرط، يكفي البرهان أن $\mathcal{M}$ مستقرة بالنسبة إلى الإتحاد العدود،
لتكن إذن $(A_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية عناصرها من $\mathcal{M}$ ونضع

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_n = A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)^C, \quad n \geq 2 \end{cases} \tag{2.2}$$

حسب الفرضية (2) لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : B_n \in \mathcal{M}.$$

ليكن الآن $n \neq m$. إذا كان $n > m$ لدينا

$$B_m \cap B_n \subset A_m \cap B_n = A_m \cap \left(A_n \cap A_1^c \cap ... \cap A_m^c \cap ... \cap A_{n-1}^c\right) = \emptyset$$

إذن

$$\forall n \neq m : B_m \cap B_n = \emptyset.$$

من جهة ثانية واضح أن $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$. بالنسبة إلى الإحتواء العكسي، ليكن $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ ومنه يوجد $n \geq 1$ بحيث $x \in A_n$. نسمي r أصغر عدد طبيعي $n \geq 1$ يحقق $x \in A_n$ بمعنى

$$r = \min\{n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}$$

عندئذ

$$x \in A_r, x \notin A_{r-1}, x \notin A_{r-2}, ... \text{ و } x \notin A_1,$$

ومنه $x \in B_r$ أي $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$.

بهذه الطريقة نكون قد أثبتنا أن كل الأجزاء B_n منفصلة مثنى مثنى وكذلك لدينا $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ إذن حسب الفرضية (3) لدينا $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

حل التمرين 10.2 :

1) لدينا مباشرة

$$\mathbb{R} = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m \in \mathcal{M}.$$

2) لتكن $B \in \mathcal{M}$ ومنه B تكتب على الشكل $B = \cup_{i \in I} A_i$.

بما أن الأجزاء $A_1, A_2, ..., A_n$ منفصلة مثنى مثنى فإن

$$B^C = \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^C = \bigcup_{i \notin I} A_i \in \mathcal{M}.$$

3) لتكن الآن $(B_n)_n$ متتالية عناصرها من $\mathcal{M}$ وهذا يعني أن $B_n = \cup_{i \in I_n} A_i$ من أجل كل $n \geq 1$ ومنه نحصل على

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{i \in I_n} A_i\right) = \bigcup_{i \in \cup_{n \geq 1} I_n} A_i \in \mathcal{M},$$

وهو ما ينهي إثبات أن $\mathcal{M}$ عشيرة على $\mathbb{R}$.

حل التمرين 11.2 :

لتكن $\mathcal{O}$ أسرة كل مفتوحات الفضاء الطبولوجي (X, τ) ولتكن $\mathcal{F}$ أسرة كل مغلقاته . نعلم أن العشيرة البوريلية $\mathcal{B}(X)$ مولدة بالأسرة $\mathcal{O}$ أي أن $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O})$ والمطلوب إثبات أن $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{F})$.

1) ليكن $F \in \mathcal{F}$ جزءا مغلقا في X وهذا يعني أن F^C مفتوح في X أي أن

$$F^C \in \mathcal{O} \subset \mathcal{B}(X)$$

وحيث أن العشيرة $\mathcal{B}(X)$ مستقرة إزاء المرور إلى المتممة فيكون

$$F = (F^C)^C \in \mathcal{B}(X)$$

وهو مايثبت أن $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X)$ وأخيرا نستنتج أن

$$\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{B}(X).$$

نثبت الآن الإحتواء العكسي، ليكن $U \in \mathcal{O}$ مفتوح في X ومنه U^C مغلق في X أي أن

$$U^C \in \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F})$$

ومنه نستنتج أن

$$U = (U^C)^C \in \sigma(\mathcal{F})$$

وبهذا نكون قد أثبتنا الإحتواء $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{F})$ الذي يستلزم الإحتواء المطلوب

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O}) \subset \sigma(\mathcal{F}).$$

2) ليكن D جزءا من X قابلا للعد، عندئذ يمكن أن نكتب

$$D = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{x_n\}.$$

نعلم أنه في فضاء طبولوجي منفصل، وحيدات العنصر هي مجموعات مغلقة فيه وذلك يستلزم أن

$$\forall n \geq 1 : \{x_n\} \in \mathcal{B}(X).$$

ومنه $D \in \mathcal{B}(X)$.

حل التمرين 12.2 :

1) بما أن $\left[a + \frac{1}{n}, b\right[\subset]a, b[$ من أجل كل $n \geq 1$ فإن

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b\right[\subset]a, b[.$$

بالنسبة للإحتواء العكسي، ليكن $x \in]a, b[$ أي $x - a > 0$. بما أن $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ فإنه يوجد عدد طبيعي n_0 يحقق $\frac{1}{n_0} \leq x - a$ أي أن $x \in \left[a + \frac{1}{n_0}, b\right[$ وهذا يعني أن

$$x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b\right[$$

بالنسبة للمساواة الثانية، واضح أن
$$[a,b[\subset \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left]a-\frac{1}{n},b\right[$$
لأن $\left]a-\frac{1}{n},b\right[\supset[a,b[$ من أجل كل $n\geq 1$.
بالعكس، ليكن $x\in\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left]a-\frac{1}{n},b\right[$ ومنه
$$\forall n\geq 1: a-\frac{1}{n}<x<b$$
بالمرور إلى النهاية عندما $n\longrightarrow +\infty$ نحصل على $a\leq x<b$ وهذا يعني أن
$$x\in[a,b[$$
2) نرمز بـ $\mathcal{S}$ لأسرة المجالات في $\mathbb{R}$ من الشكل $[a,b[$ ،
$$\mathcal{S}=\{[a,b[: a,b\in\mathbb{R}\}$$
أولا لدينا $\mathcal{S}\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$ لأنه إذا كان $[a,b[\in\mathcal{S}$ فإن
$$[a,b[=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left]a-\frac{1}{n},b\right[\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$$
وذلك ناتج عن كون $\left]a-\frac{1}{n},b\right[$ مفتوح في $\mathbb{R}$ والعشيرة $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ مستقرة بالنسبة إلى التقاطع القابل للعد . ومنه
$$\sigma(\mathcal{S})\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}).$$
نثبت الآن الإحتواء العكسي، بما أن العشيرة البوريلية $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ مولدة بواسطة مفتوحات $\mathbb{R}$ نأخذ θ مفتوح في $\mathbb{R}$. نعلم أن كل مفتوح في $\mathbb{R}$ يكتب على شكل إتحاد قابل للعد لمجالات من الشكل $]a,b[$ ، أي أن
$$\theta=\bigcup_{i=1}^{+\infty}]a_i,b_i[$$
ومن جهة ثانية حسب السؤال السابق يمكن أن نكتب
$$]a_i,b_i[=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[a_i+\frac{1}{n},b_i\right[$$
لدينا كذلك $\left[a_i+\frac{1}{n},b_i\right[\in\sigma(\mathcal{S})$ من أجل كل $n\geq 1$ أي أن $]a_i,b_i[\in\sigma(\mathcal{S})$ من أجل كل $i\geq 1$ ومنه نستنتج أن $\theta\in\sigma(S)$.
بهذا نكون قد أثبتنا أن العشيرة $\sigma(\mathcal{S})$ تحتوي على كل مفتوحات $\mathbb{R}$ ، أخيرا نحصل على
$$\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\sigma(\mathcal{S}).$$

حل التمرين 13.2 :

أولا لدينا مباشرة $\emptyset \in T_1$ لأن
$$A \times \emptyset = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$
نثبت الآن الإستقرار بالنسبة إلى المتممة، ليكن $B \in T_1$ ، أولا لدينا مباشرة $B^C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ لأن $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ يمكننا كتابة ما يلي
$$A \times B^C = A \times (\mathbb{R} - B) = (A \times \mathbb{R}) - (A \times B)$$
A مفتوح في $\mathbb{R}$ إذن $A \times \mathbb{R}$ مفتوح في $\mathbb{R}^2$ وبالتالي نستنتج أن $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ وكذلك بما أن $B \in T_1$ فإن $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ ومنه نحصل على
$$A \times B^C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

أخيرا لدينا $B^C \in T_1$.
نبرهن الآن الإستقرار بالنسبة إلى الإتحاد العدود، لتكن $(B_n)_n$ متتالية عناصرها من T_1 ، لدينا عندئذ
$$A \times \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A \times B_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$
لأن $A \times B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ من أجل كل $n \geq 1$. وهو ما يثبت أن
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in T_1.$$
بقي إثبات أن العشيرة T_1 تحوي كل مفتوحات $\mathbb{R}$. ليكن عندئذ θ مفتوح في $\mathbb{R}$ إذن $\theta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. من جهة ثانية بما أن $A \times \theta$ مفتوح في $\mathbb{R}^2$ فإن $A \times \theta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ ومنه أخيرا $\theta \in T_1$.
2) بنفس الطريقة السابقة نثبت أن T_2 عشيرة تحوي كل مفتوحات $\mathbb{R}$ ونستنتج أن $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3) من السؤال السابق نستنتج أن
$$\{A \times B : A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$
ومنه $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
بالنسبة للإحتواء العكسي، ليكن θ مفتوح في $\mathbb{R}^2$ إذن
$$\theta = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (I_n \times J_n)$$
حيث I_n و J_n مجالات مفتوحة من $\mathbb{R}$ ومنه $\theta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

حل التمرين 14.2 :

بالنسبة للمجموعة A .
من السهل التحقق أن $x \in A$ إذا وفقط إذا وجد $n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $x \in \left]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}\right[$ وهذا يكافئ أن
$$x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}\right[.$$

بذلك نكون قد أثبتنا المساواة التالية

$$A=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left]n-\frac{1}{n},n+\frac{1}{n}\right[.$$

المجالات $\left]n-\frac{1}{n},n+\frac{1}{n}\right[$ كلها مفتوحة في $\mathbb{R}$ وبالتالي تنتمي كلها الى العشيرة $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ وهذ يستلزم أن $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ لأن A مكتوبة على شكل إتحاد عدود لعناصر من $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

بالنسبة للمجموعة B .

في البداية واضح أن $B=E\cap D$ حيث

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\},$$
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\notin\mathbb{Q}\right\}.$$

لدينا $E=f^{-1}(\{0\})$ حيث $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ هو التطبيق المعرف بأن $f(x,y)=x^2+y^2-1$. الآن بما أن f مستمر و $\{0\}$ مغلق في $\mathbb{R}$ فإن E مغلق في $\mathbb{R}^2$ كصورة عكسية لمغلق بواسطة تطبيق مستمر، ومنه نستنتج أن $E\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

من جهة ثانية لدينا

$$D^C=\mathbb{Q}\times\mathbb{R}=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\{r\}\times\mathbb{R}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

لأن $\{r\}\times\mathbb{R}$ مغلق في $\mathbb{R}^2$ ومنه نستنتج أن $D\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ وأخيرا لدينا

$$B=E\cap D\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

بالنسبة للمجموعة C .

لدينا مباشرة $C=g^{-1}(\{0\})$ حيث $g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ هو التطبيق المستمر المعرف بأن $g(x,y)=x-y$. كما هو الحال بالنسبة للمجموعة E أعلاه نستنتج أن

$$C\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

حل التمرين 15.2 :

1) يكفي إثبات أن $\mathcal{K}\subset\mathcal{B}_\tau(X)$ ، ليكن عندئذ K متراص في الفضاء الطبولوجي المنفصل X إذن K مغلق، ومنه $K\in\mathcal{B}_\tau(X)$ لأن العشيرة البوريلية $\mathcal{B}_\tau(X)$ مولدة كذلك بأسرة مغلقات X . الإحتواء $\mathcal{K}\subset\mathcal{B}_\tau(X)$ يستلزم أن

$$\mathcal{B}_\mathcal{K}(X)\subset\mathcal{B}_\tau(X).$$

2) نعتبر الفئة

$$\mathcal{A}=\{A\subset X : A\cap K\in\mathcal{B}_\mathcal{K}(X),\quad\forall K\in\mathcal{K}\}$$

ليكن F جزء مغلقا في X . مهما يكن المتراص K فإن $F\cap K$ مغلق في المتراص K فهو متراص، إذن $F\cap K\in\mathcal{B}_\mathcal{K}(X)$ وهذا يعني أن $F\in\mathcal{A}$ أي أن الفئة $\mathcal{A}$ تحوي فئة جميع أجزاء X المغلقة ومنه يكون لدينا الإحتواء

$$\mathcal{B}_\tau(X)\subset\mathcal{A}$$

نثبت الآن أن $\mathcal{A}$ عشيرة على X .
لدينا $X \in \mathcal{A}$ لأن $K \cap X = K \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$ مهما يكن المتراص K .
ليكن $A \in \mathcal{A}$ ، نبرهن أن $A^C \in \mathcal{A}$. من أجل كل متراص K لدينا ما يلي

$$\begin{aligned} A^C \cap K &= (A^C \cap K) \cup (K \cap K^C) \\ &= (A^C \cup K^C) \cap K \\ &= (A \cap K)^C \cap K \end{aligned}$$

بما أن $A \in \mathcal{A}$ فإن $A \cap K \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$ وبالتالي $(A \cap K)^C \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$ وكذلك بما أن $K \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$ نستنتج أن $A^C \cap K \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$ ومنه أخيرا

$$A^C \in \mathcal{A}.$$

نأخذ متتالية $(A_n)_n$ عناصرها تنتمي إلى الفئة $\mathcal{A}$ ، لدينا عندئذ

$$K \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (K \cap A_n)$$

من جهة أخرى $A_n \in \mathcal{A}$ من أجل كل $n \geq 1$ ، هذا يعني أن $K \cap A_n \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$ من أجل كل $n \geq 1$ عندئذ

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} (K \cap A_n) \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$$

ومنه

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

3) ليكن $K \in \mathcal{K}$ متراصا في X وهو يعتبر تغطية متراصة لنفسه، إذن K هو جزء σ -محدود . ولدينا كذلك
$K \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$ ومنه نستنتج أن $K \in \mathcal{C}$ وهو ما ينهي إثبات الإحتواء المطلوب .
نبرهن فيما يلي أن الفئة $\mathcal{C}$ تشكل عصبة على X . واضح أن $\emptyset \in \mathcal{C}$ كذلك من أجل $A, B \in \mathcal{C}$ توجد متتالية $(K_n)_n$ عناصرها من $\mathcal{K}$ (يعني متراصات من X) تحقق $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$ ومنه لدينا $(A - B) \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$
ومن جهة ثانية نعلم أن $(A - B) \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$ إذن يكون لدينا

$$(A - B) \in \mathcal{C}.$$

لتكن $(C_n)_n$ متتالية عناصرها تنتمي إلى الفئة $\mathcal{C}$ عندئذ توجد متتالية $(K_m^n)_m$ عناصرها أجزاء متراصة بحيث

$$C_n \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} K_m^n$$

من أجل كل $n \geq 1$ ومنه نحصل على

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{m=1}^{+\infty} K_m^n$$

وهذا يعني أن $\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$ جزء σ -محدود وينتمي إلى العشيرة $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$. أخيرا نحصل على

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \in \mathcal{C}$$

وهذا ينهي الإثبات أن الفئة $\mathcal{C}$ عبارة عن عصبة على X .

4) ليكن A جزء σ -محدود في X وينتمي إلى العشيرة البوريلية $\mathcal{B}_\tau(X)$ ، توجد عندئذ متتالية متراصات $(K_n)_n$ في X تحقق

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$$

ومنه لدينا

$$A = A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A \cap K_n)$$

حسب السؤال 2) لدينا $A \in \mathcal{A}$ وبالتالي $A \cap K_n \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$ من أجل كل $n \geq 1$ وهذا يثبت أن

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A \cap K_n) \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X).$$

5) نذكر أن الأجزاء المتراصة في الطبولوجياالمتقطعة $\tau = \mathcal{P}(X)$ هي الأجزاء المنتهية في X .

نضع $A = X$ عندئذ واضح أن $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$ وأن $A \in \mathcal{B}_\tau(X)$.

نستخدم البرهان بالخلف، حيث نفرض أن X جزء σ -محدود في A وهو ما يعني وجود متتالية متراصات $(K_n)_n$ في X تحقق

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n.$$

كل الأجزاء K_n متراصة إذن فهي أجزاء منتهية وبالتالي X يكتب على شكل إتحاد قابل للعد لأجزاء منتهية إذن X مجموعة قابلة للعد، وهو ما يناقض المعطيات .

الفصل الثالث

التوابع القيوسة

عناويـن الفصـل :

1.3 تذكير نظري للدروس

1.1.3 التوابع الدرجية

تعريف 1.1.3.
ليكن $(X,\mathcal{M})$ فضاءً قيوسا . نقول عن التابع العددي $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ أنه درجي إذا وجدت أسرة منتهية من الأجزاء القيوسة $(A_i)_{1\leq i\leq n} \subset \mathcal{M}$ ومجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية $\{a_1, ..., a_n\} \subset \mathbb{R}$ بحيث

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i} \tag{1.3}$$

أو بعبارة أخرى يكون التابع f درجيا إذا كانت صورته $f(X)$ مجموعة جزئية منتهية من $\mathbb{R}$.

ملاحظة 1.1.3.
إذا وضعنا $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$ من أجل كل $i = 1, ..., n$ نحصل على $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ مع $A_i \cap A_j = \emptyset$ من أجل كل $i \neq j$.
إذن كل تابع درجي f يكتب قانونيا بالشكل (1.3) حيث $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ تشكل تجزئة للمجموعة X .

قضية 1.1.3.
ليكن $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعان درجيان و $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن التوابع التالية كلها درجية $f.g,\ f + \lambda g,$ $\sup(f, g)$ و $\inf(f, g)$.

2.1.3 التوابع القيوسة

تعريف 2.1.3.
ليكن $(X,\mathcal{M})$ و $(Y,\mathcal{N})$ فضاءان قيوسان . نقول عن تطبيق $f : X \longrightarrow Y$ أنه قيوس إذا كان

$$\forall B \in \mathcal{N} : f^{-1}(B) \in \mathcal{M}.$$

مثال 1.1.3.
(1) كل التوابع f المعرفة من الفضاء $(X, \mathcal{P}(X))$ نحو الفضاء $(Y, \mathcal{P}(Y))$ قيوسة .
(2) ليكن $(X,\mathcal{M})$ و $(Y,\mathcal{N})$ فضاءان قيوسان . التطبيق المطابق لـ X

$$id : (X,\mathcal{M}) \longrightarrow (X,\mathcal{M}'),\ \ id(x) = x$$

قيوس إذا وفقط إذا كان $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$.
(3) ليكن $(X,\mathcal{M})$ و $(Y,\mathcal{N})$ فضاءان قيوسان و $f : X \longrightarrow Y$ تطبيقا ثابتا (بمعنى أنه يوجد $y_0 \in Y$ بحيث من أجل $x \in X$ لدينا $f(x) = y_0$) . عندئذ f قيوس .

(4) كل التوابع الدرجية قيوسة .
(5) ليكن $(X,\mathcal{M})$ فضاءً قيوسا و $A \subset X$. التابع المميز χ_A للمجموعة A المعرف من X نحو $\mathbb{R}$ مزود بعشيرته البوريلية $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ قيوس إذا وفقط إذا كان $A \in \mathcal{M}$.
لهذا السبب عناصر العشيرة $\mathcal{M}$ تسمى أجزاء قيوسة .

ملاحظة 2.1.3.
يحدث أحيانا أن يكون تابعا معينا قيوسا نسبة إلى عشيرة معينة لكنه غير قيوس نسبة إلى عشيرة أخرى . لرؤية ذلك نعتبر العشيرة المعرفة بأن

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \left\{A \subset \mathbb{R} : (\text{عدود } A) \text{ أو } \left(\text{عدود } A^C\right)\right\}$$

التطبيق

$$id : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

واضح أنه قيوس . غير أن التطبيق

$$id : (\mathbb{R}, \mathcal{D}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

غير قيوس حسب (2) في المثال السابق، لأن $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ حيث أن $[a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ لكن $[a,b] \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

قضية 2.1.3.
ليكن $(X,\mathcal{M})$ و $(Y,\mathcal{N})$ فضاءان قيوسان و $\mathcal{F}$ أسرة أجزاء من Y . بالإضافة إلى ذلك نفرض العشيرة $\mathcal{N}$ مولدة بواسطة الأسرة $\mathcal{F}$. عندئذ التطبيق $f : X \longrightarrow Y$ قيوس إذا وفقط إذا كان

$$\forall B \in \mathcal{F} : f^{-1}(B) \in \mathcal{M}. \qquad (2.3)$$

نتيجة 1.1.3.
ليكن X و Y فضاءان طبولوجيان مزودان بعشيرتيهما البوريليتين .
كل تابع مستمر من X نحو Y هو قيوس من $(X,\mathcal{B}(X))$ نحو $(Y,\mathcal{B}((Y))$.

نظرية 1.1.3.
تركيب تطبيقين قيوسين هو تطبيق قيوس .

3.1.3 قابلية القياس للتوابع العددية

فيما يلي نعتبر حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مزودا بالطبولوجيا الإعتيادية وبالعشيرة البوريلية $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. بما أن هذه الأخيرة مولدة بواسطة مجالات $\mathbb{R}$ من الشكل $]a,+\infty[$ إذن حسب القضية 2.1.3 يمكن أن نكتب النتيجة التالية

نتيجة 2.1.3.
ليكن $(X,\mathcal{M})$ فضاءً قيوسا .
يكون التابع العددي $f:(X,\mathcal{M})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ قيوسا إذا وفقط إذا كان

$$\forall a\in\mathbb{R}: f^{-1}(]a,+\infty[)\in\mathcal{M}.$$

الجزئين الموجب والسالب لتابع عددي

كل تابع عددي $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ يمكن كتابته كفرق تابعين موجبين f_+ و f_- معرفين كما يلي

$$f_+(x)=\sup\left(f(x),0\right) \text{ و } f_-(x)=\sup\left(-f(x),0\right).$$

حيث لدينا ما يلي

$$f=f_+-f_- \text{ و } |f|=f_++f_-.$$

عمليات على التوابع العددية القيوسة

قضية 3.1.3.
ليكن $f:(X,\mathcal{M})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ و $g:(X,\mathcal{M})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ تابعان عدديان قيوسان .
عندئذ التوابع التالية كلها قيوسة

$$f+g \text{ ، } fg \text{ ، } \sup(f,g) \text{ ، } \inf(f,g) \text{ ، } f_+ \text{ ، } f_- \text{ و } |f|$$

كذلك إذا كا ن التابع f لا ينعدم على كل X فإن التابع المقلوب $\frac{1}{f}$ قيوس .

ملاحظة 3.1.3.
إذا كان $|f|$ قيوسا فهذا لا يعني بالضرورة أن f قيوسا . لرؤية ذلك نأخذ $A\notin\mathcal{M}$ و $f=\chi_A-\chi_{A^c}$
وهذا يعني أن

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ -1, & x\in A^c\end{cases}$$

عندئذ التابع $|f|=1$ قيوس، لكن f غير قيوس لأن

$$\{1\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ و } f^{-1}(\{1\})=A\notin\mathcal{M}.$$

نذكر أن العشيرة البوريلية $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ على $\overline{\mathbb{R}}$ مولدة بفئة المجالات من الشكل $]a,+\infty]$, حيث $a\in\mathbb{R}$.

قضية 4.1.3.
لتكن $(f_n)_n$ متتالية توابع قيوسة معرفة من $(X,\mathcal{M})$ نحو $\left(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\right)$.
عندئذ التوابع التالية كلها قيوسة

$$\sup_n f_n \text{ ، } \inf_n f_n \text{ ، } \limsup_{n\longrightarrow+\infty} f_n \text{ و } \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n$$

بالإظافة إلى ذلك إ كانت $(f_n)_n$ متقاربة ببساطة نحو التابع f فإن f قيوس .

قضية 5.1.3.
ليكن $(X,\mathcal{M})$ فضاءً قيوسا . كل تابع عددي موجب قيوس $f:X\longrightarrow[0,+\infty]$ هو نهاية بسيطة لمتتالية توابع $(f_n)_n$ درجية، متزايدة وقيوسة .

القضية التالية تعمم القضية السابقة إلى حالة التوابع العددية القيوسة كيفية الإشارة

قضية 6.1.3.
ليكن $(X,\mathcal{M})$ فضاءً قيوسا . كل تابع عددي قيوس $f:(X,\mathcal{M})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ هو نهاية بسيطة لمتتالية توابع $(f_n)_n$ درجية قيوسة .

قضية 7.1.3.
ليكن $f,g:(X,\mathcal{M})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ تابعان قيوسان وليكن $a\in\mathbb{R}$. عندئذ الأجزاء التالية

$$\begin{aligned}
(f=a)&:=\{x\in X: f(x)=a\}\\
(f=g)&:=\{x\in X: f(x)=g(x)\}\\
(f\neq g)&:=\{x\in X: f(x)\neq g(x)\}\\
(f>g)&:=\{x\in X: f(x)>g(x)\}
\end{aligned}$$

كلها قيوسة، بمعنى أنها تنتمي إلى العشيرة $\mathcal{M}$.

2.3 تمارين الفصل الثالث

تمرين 1.3.
$\mathcal{M}$ فئة من أجزاء $\mathbb{Z}$ معرفة بأن $A \in \mathcal{M}$ إذا تحقق التكافؤ

$$\forall p \in \mathbb{N}^* : 2p \in A \Longleftrightarrow (2p+1) \in A$$

1) برهن أن $\mathcal{M}$ تشكل عشيرة على $\mathbb{Z}$ مع $\mathcal{M} \neq \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
2) ليكن التابع

$$f : (\mathbb{Z}, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{M}),\ f(n) = n+2$$

برهن أن f تقابل قابل للقياس بينما f^{-1} غير قابل للقياس .

تمرين 2.3.
$(X, \mathcal{M})$ و $(Y, \mathcal{N})$ فضائين قيوسين و $f : X \longrightarrow Y$ تطبيق .
1) تحقق أن $f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap f(X))$ من أجل كل $B \subset Y$.
2) نفرض أن $f(X)$ جزء عدود من Y وأن $f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{M}$ من أجل كل $y \in Y$
برهن أن f قابل للقياس .

تمرين 3.3.
ليكن $(X, \mathcal{M})$ فضاءً قيوسا و Y مجموعة كيفية و $f : X \longrightarrow Y$ تطبيق . نعتبر $\mathcal{N}$ فئة من أجزاء Y معرفة بأن

$$\mathcal{N} = \left\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\right\}. \tag{3.3}$$

برهن أن $\mathcal{N}$ هي أكبر عشيرة على Y تجعل f قابلا للقياس .

تمرين 4.3.
ليكن التابع $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
1) إذا كان f رتيبا فبرهن أنه قيوس (يمكنك أن تبرهن أن المجموعة $f^{-1}(]a, +\infty[)$ عبارة عن مجال من $\mathbb{R}$ مهما يكن العدد الحقيقي a) .
2) إذا كان f قابلا للإشتقاق على $\mathbb{R}$ فبرهن أن تابعه المشتق f' قيوس .
3) إذا كان f يقبل تابعا أصليا F على $\mathbb{R}$ فبرهن أن f قيوس .

تمرين 5.3.
من أجل كل $A \subset \mathbb{R}$ نضع

$$-A = \{-x : x \in A\},$$

ونعتبر الأسرة $\mathcal{T}$ التي عناصرها من $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ والمعرفة بأن

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A = -A\}.$$

1) برهن أن $\mathcal{T}$ عشيرة على $\mathbb{R}$.

2) لتكن $f, g, h : (\mathbb{R}, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{N})$ ثلاثة تطبيقات معرفة بأن

$$f(x) = e^x,\ g(x) = x^3,\ h(x) = \cos x.$$

أدرس قابلية القياس للتطبيقات f, g, h في كل حالة من الحالات الثلاثة التالية

أ) $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ و $\mathcal{N} = \mathcal{T}$.

ب) $\mathcal{M} = \mathcal{T}$ و $\mathcal{N} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

ج) $\mathcal{M} = \mathcal{T}$ و $\mathcal{N} = \mathcal{T}$.

تمرين 6.3.

ليكن التابع العددي $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ المعرف بأن

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

حدد بدقة المجموعة $f^{-1}(]a, +\infty[)$ من أجل كل عدد حقيقي $a \in \mathbb{R}$. ماذا تستنتج؟

تمرين 7.3.

من أجل $A \subset \mathbb{R}$ نعتبر المجموعة الجزئية $\alpha(A)$ من $\mathbb{R}^2$ المعرفة بأن

$$\alpha(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R} : |x - y| \in A\}.$$

برهن أنه إذا كان $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ فإن $\alpha(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

تمرين 8.3.

نعتبر المجموعة $E = \{0, 1, 2\}$ والتابع $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرف بـ $f(2) = 1$ و $f(0) = f(1) = 0$

نعتبر أربع أسر من أجزاء E معرفة كما يلي

$$\mathcal{M}_1 = \{\phi, E\},\ \mathcal{M}_2 = \{\phi, \{0\}, E\},\ \mathcal{M}_3 = \{\phi, \{0\}, \{1, 2\}, E\},\ \mathcal{M}_4 = \mathcal{P}(E)$$

1) أي من الأسر الأربعة تشكل عشيرة على E ؟ علل إجابتك؟

2) من بين العشائر السابقة ما هي العشيرة $\mathcal{M}_i$ التي تجعل التابع $f : (E, \mathcal{M}_i) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ قيوسا .

تمرين 9.3.
من أجل كل $n \geq 1$ نعرف تابعا درجيا $\varphi_n : [0,+\infty] \longrightarrow [0,+\infty[$ بأن

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 2^{-n}E(2^n t), 0 \leq t < n \\ n, \qquad\qquad t \geq n \end{cases}$$

حيث $E(x)$ يرمز إلى الجزء الصحيح للعدد $x \in \mathbb{R}$.

1) برهن أن $0 \leq \varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t)$ من أجل كل $t \in [0,+\infty]$ و $n \geq 1$.

2) نضع $f_n = \varphi_n \circ f$. تحقق أن f_n هي توابع درجية ثم برهن أن المتتالية $(f_n)_n$ متزايدة .

3) برهن أنه إذا كان $f(x) < \infty$ فإنه من أجل n كبير بقدر كاف لدينا

$$f(x) - 2^{-n} \leq f_n(x) \leq f(x).$$

ماذا تستنتج؟

تمرين 10.3.
لتكن $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ عشيرة من أجزاء $\mathbb{R}$ المعرفة في التمرين 8.2
برهن أنه إذا كان $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تطبيقا متباينا فهو قابل للقياس من الفضاء $(\mathbb{R}, \mathcal{D}(\mathbb{R}))$ نحو نفسه .

3.3 حلول تمارين الفصل الثالث

حل التمرين 1.3 :

1) لدينا $\mathbb{Z}\in\mathcal{M}$ لأن

$$2p\in\mathbb{Z}\Longleftrightarrow(2p+1)\in Z,$$

من أجل كل $p\in\mathbb{N}$.
ليكن الآن $A\in\mathcal{M}$ ، لدينا عندئذ

$$(2p\in A^C)\Longleftrightarrow(2p\notin A)\Longleftrightarrow(2p+1\notin A)\Longleftrightarrow(2p+1)\in A^C,$$

من أجل كل $p\in\mathbb{N}$. وهو ما يثبت أن $A^C\in\mathcal{M}$.
لتكن $(A_n)_n$ متتالية عناصرها من $\mathcal{M}$ ، عندئذ من أجل كل $p\in\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned}2p\in\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n&\Longleftrightarrow\exists n_0\in\mathbb{N}:2p\in A_{n_0}\\&\Longleftrightarrow\exists n_0\in\mathbb{N}:(2p+1)\in A_{n_0}\\&\Longleftrightarrow(2p+1)\in\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n.\end{aligned}$$

ومنه $\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\in\mathcal{M}$.
لدينا $\mathcal{M}\neq\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ لأن $\{2\}\in\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ غير أن $\{2\}\notin\mathcal{M}$.
2)التطبيق f تقابلي لأن المعادلة $p=f(n)$ تقبل حلا وحيدا $n=p-2$ من $\mathbb{Z}$ مهما يكن $p\in\mathbb{Z}$.
نثبت الآن أن f قابل للقياس، لتكن عندئذ $A\in\mathcal{M}$ ولدينا ما يلي

$$\begin{aligned}2p\in f^{-1}(A)&\Longleftrightarrow f(2p)\in A\\&\Longleftrightarrow 2p+2\in A\\&\Longleftrightarrow 2p+3\in A\\&\Longleftrightarrow f(2p+1)\in A\\&\Longleftrightarrow 2p+1\in f^{-1}(A),\end{aligned}$$

وهو ما يثبت أن $f^{-1}(A)\in\mathcal{M}$ أي أن f قابل للقياس .
لإثبات أن f^{-1} غير قابل للقياس يكفي البحث عن $B\in\mathcal{M}$ بحيث $(f^{-1})^{-1}(B)\notin\mathcal{M}$.
نأخذ $B=\{0\}$ ، عندئذ لدينا $\{0\}\in\mathcal{M}$ لأن $\{0\}^C=\mathbb{Z}^*\in\mathcal{M}$ وهذه الأخيرة ناتجة من التكافؤ التالي

$$2p\in\mathbb{Z}^*\Longleftrightarrow(2p+1)\in\mathbb{Z}^*.$$

ومن جهة ثانية لدينا مايلي

$$(f^{-1})^{-1}(\{0\})=f(\{0\})=\{2\}\notin\mathcal{M}.$$

حل التمرين 2.3 :

1) لدينا التكافؤات الصحيحة التالية

$$[x\in f^{-1}(B)]\Longleftrightarrow[f(x)\in B]\Longleftrightarrow[f(x)\in B\cap f(X)]\Longleftrightarrow[x\in f^{-1}(B\cap f(X))].$$

2) ليكن $B \in \mathcal{N}$. المجموعة $B \cap f(X)$ عدودة بإعتبارها محتواة في المجموعة العدودة $f(X)$ ومنه يكون لدينا ما يلي

$$B \cap f(X) = \bigcup_{i=1}^{n} \{y_i\}, y_1, ..., y_n \in Y,$$

وهذا يؤدي إلى ما يلي

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap f(X)) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{y_i\}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(\{y_i\}) \in \mathcal{M}.$$

وهو مايثبت أن f قيوس .

حل التمرين 3.3 :

لدينا $\emptyset \in \mathcal{N}$ لأن $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{M}$ وكذلك من أجل كل $B \in \mathcal{N}$ يكون $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ ومنه نحصل

$$f^{-1}(B^c) = \left[f^{-1}(B)\right]^c \in \mathcal{M}.$$

إذن $B^c \in \mathcal{N}$.
الآن لتكن $(B_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{N}$ متتالية عناصرها من $\mathcal{N}$. بما أن $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{M},$ من أجل كل $n \geq 1$ ، نستنتج أن

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{M}.$$

وهذا يعني أن $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{N}$ ومنه فإن الأسرة $\mathcal{N}$ تشكل عشيرة على Y .
من إنشاء العشيرة $\mathcal{N}$ واضح أن التابع $f : X \longrightarrow Y$ قيوس .
بقي إثبات أن $\mathcal{N}$ هي أكبر عشيرة تجعل التابع f قيوسا . لتكن $\mathcal{B}$ عشيرة على Y تجعل التابع التالي قيوسا

$$f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}),$$

ومنه $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$ لأنه من أجل كل $B \in \mathcal{B}$ لدينا $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ إذن $B \in \mathcal{N}$.

حل التمرين 4.3 :

1) نذكر أن المجموعة I تكون مجالا في $\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان من أجل كل x, y من I بحيث $x \leq y$ يكون لدينا $[x, y] \subset I$
نفرض أن f متزايد ونبرهن أن $f^{-1}(]a, +\infty[)$ مجالا في $\mathbb{R}$ من أجل كل $a \in \mathbb{R}$.
ليكن $x, y \in f^{-1}(]a, +\infty[)$ بحيث $x \leq y$ وليكن $t \in [x, y]$ ، من تزايد التابع f نستنتج أن

$$a < f(x) \leq f(t) \leq f(y),$$

وهذا يستلزم أن $f(t) > a$ وبالتالي $t \in f^{-1}(]a, +\infty[)$. ومنه أخيرا $[x, y] \subset f^{-1}(]a, +\infty[)$.
2) من تعريف العدد المشتق

$$f'(x_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

لدينا ما يلي

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} n \left[f(x+\frac{1}{n}) - f(x) \right]$$

نعتبر متتالية التوابع العددية $(g_n)_n$ المعرفة بأن

$$g_n(x) = n \left[f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x) \right], x \in \mathbb{R}$$

واضح أن التتوابع g_n قابلة للقياس على $\mathbb{R}$ لأن التابع f قيوس على $\mathbb{R}$ وكذلك $(g_n)_n$ متقاربة ببساطة نحو التابع f' .

إذن نستنتج أن هذا الأخير قيوس .

3) مثل ماسبق نستطيع أن نكتب

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = F'(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} n \left[F(x+\frac{1}{n}) - F(x) \right] = \lim_{n \longrightarrow +\infty} h_n(x)$$

بما أن F مستمر على $\mathbb{R}$ فإن $(h_n)_n$ هي متتالية لتوابع قيوسة على $\mathbb{R}$ وهي متقاربة ببساطة نحو التابع f على $\mathbb{R}$ وهذا يعني أن f قيوس .

حل التمرين 5.3 :

1) لإثبات أن $\mathcal{T}$ عشيرة على $\mathbb{R}$ نستعمل القضية 2.1.2 حيث نبرهن أن $\mathcal{T} = \varphi^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ وذلك بإعتبار التطبيق

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = |x| .$$

2) أ) بما أن التطبيقات الثلاثة f, g, h مستمرة فهي قابلة للقياس من الفضاء $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ نحو الفضاء $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ، ومنه باستعمال الإحتواء $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ نحصل على

$$\forall B \in \mathcal{T} : f^{-1}(B), g^{-1}(B), h^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

ب) في هذه الحالة التطبيق

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

غير قابل للقياس لأنه مثلا $\{e\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ولكن

$$f^{-1}(\{e\}) = \{1\} \notin \mathcal{T}.$$

وكذلك التطبيق

$$g : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

غير قابل للقياس لأن $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ولكن

$$g^{-1}(\{1\}) = \{1\} \notin \mathcal{T}.$$

لنبرهن أن التطبيق

$$h : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

قابل للقياس، ليكن عندئذ $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ و $x \in h^{-1}(B)$ لدينا التكافؤات التالية

$$x \in h^{-1}(B) \Longleftrightarrow \cos x \in B \Longleftrightarrow \cos(-x) \in B \Longleftrightarrow -x \in h^{-1}(B).$$

وهو ما يثبت أن $h^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ أي أن h قابل للقياس .
ج) في هذه الحالة التطبيق

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}),$$

غير قابل للقياس لأنه مثلا لدينا $\{-e, e\} \in \mathcal{T}$ غير أن

$$f^{-1}(\{-e\} \cup \{e\}) = \{1\} \notin \mathcal{T}.$$

لنبرهن أن التطبيق

$$g : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}),$$

قابل للقياس، ليكن عندئذ $B \in \mathcal{T}$ ونبرهن أن $g^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ أي نثبت صحة المساواة

$$-g^{-1}(B) = g^{-1}(B).$$

وهذا صحيح لأن

$$x \in g^{-1}(B) \Longleftrightarrow g(x) \in B \Longleftrightarrow -g(x) \in B \Longleftrightarrow g(-x) = -g(x) \in B \Longleftrightarrow -x \in g^{-1}(B).$$

إثبات أن التطبيق

$$h : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}),$$

قابل للقياس مماثل للحالة ب) أعلاه .

حل التمرين 6.3 :

من أجل كل $a \in \mathbb{R}$ لدينا

$$f^{-1}(]a, +\infty[) = \begin{cases} \left]\dfrac{-1}{a}, 0\right[\cup]0, a[, & \text{si } a > 0 \\ \mathbb{R}^*, & \text{si } a = 0 \\ \mathbb{R}, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

نلاحظ أنه في جميع الحالات لدينا $f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ وهذا يعني أن f قابل للقياس .

حل التمرين 7.3 :

نعتبر التابع f المعرف بأن

$$f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \; f(x, y) = |x - y|.$$

لدينا مباشرة

$$f^{-1}(A) = \alpha(A).$$

بما أن التطبيق f مستمر فهو قابل للقياس وهو ما يثبت أنه إذا كان $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ فإن $\alpha(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

حل التمرين 8.3 :

1) كل من الأسر $\mathcal{M}_1$ ، $\mathcal{M}_3$ و $\mathcal{M}_4$ هي عشائر على E بينما الأسرة $\mathcal{M}_2$ ليست عشيرة على E لأنه مثلا $\{0\} \in \mathcal{M}_2$ غير أن

$$\{0\}^C = \{1, 2\} \notin \mathcal{M}_2.$$

2) نلاحظ أن $f = \chi_{\{2\}}$ ومنه f قيوس إذا وفقط إذا كان $\{2\} \in \mathcal{M}_i$ ومنه العشيرة الوحيدة التي تجعل f قيوسا هي الأسرة $\mathcal{M}_4$.

حل التمرين 9.3 :

1) لدينا ثلاثة حالات

(i) إذا كان $t \geq n+1$ أو كذلك $t = +\infty$. فإن $\varphi_{n+1}(t) = n+1 > n = \varphi_n(t)$.

(ii) إذا كان $n \leq t < n+1$. فإنه من تزايد دالة الجزء الصحيح نحصل على

$$E(2^{n+1}t) \geq E(2^{n+1}n) = 2^{n+1}n,$$

وهذا يستلزم أن

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{1}{2^{n+1}} E(2^{n+1}t) \geq n = \varphi_n(t).$$

(iii) إذا كان $0 \leq t < n$.

بما أن

$$2^{n+1}t \geq 2E(2^n t) \in \mathbb{N},$$

فإن

$$E(2^{n+1}t) \geq 2E(2^n t).$$

ومنه نحصل على

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{1}{2^{n+1}} E(2^{n+1}t) \geq \frac{1}{2^n} E(2^n t) = \varphi_n(t).$$

إذن في جميع الحالات نستنتج أنه من أجل كل $t \in [0, +\infty]$ وكل $n \geq 1$ لدينا

$$\varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t).$$

2) واضح أن كل التوابع φ_n درجية، ومنه التوابع f_n كذلك كلها درجية لأن

$$f_n(X) = \varphi_n(f(X)) = \varphi_n([0, +\infty]),$$

وهذه المجموعة الأخيرة منتهية .

من جهة ثانية بإستخدام تزايد المتتالية $(\varphi_n)_n$ يمكن أن نكتب

$$f_n(x) = \varphi_n(f(x)) \leq \varphi_{n+1}(f(x)) = f_{n+1}(x),$$

من أجل كل $n \geq 1$ وكل $x \in X$.

3) من أجل n كبير بقدر كاف نختار $n > f(x)$ في هذه الحالة لدينا

$$f_n(x) = \frac{1}{2^n} E(2^n f(x)).$$

وبإستعمال خواص دالة الجزء الصحيح نجد

$$2^n f(x) - 1 \leq E(2^n f(x)) \leq 2^n f(x),$$

ومنه

$$f(x) - \frac{1}{2^n} \leq f_n(x) \leq f(x).$$

بالمرور إلى النهاية عندما $n \longrightarrow +\infty$ نحصل على التقارب البسيط $f_n \longrightarrow f$.

حل التمرين 10.3 :

أثبتنا في التمرين 8.2 أن العشيرة $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ مولدة بأسرة وحيدات العنصر $\mathcal{S} = \{\{y\}, y \in \mathbb{R}\}$ ومنه حسب القضية 2.1.3 يكفي إثبات أن $f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ من أجل كل $y \in \mathbb{R}$.
بما أن التطبيق f متباين فإن المجموعة $f^{-1}(\{y\})$ تحتوي على عنصر واحد $\alpha \in \mathbb{R}$ وإثبات ذلك أنه لو كان $\alpha, \beta \in f^{-1}(\{y\})$ فإن $f(\alpha) = f(\beta) = y$ وهو ما يثبت أن

$$f^{-1}(\{y\}) = \{\alpha\} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

الفصل الرابع

القياسات الموجبة والخارجية

عناوين الفصل :

1.4 تذكير نظري للدروس

1.1.4 تعريف القياس الموجب وخواصه

تعريف 1.1.4.
ليكن $(X,\mathcal{M})$ فضاءً قيوسا . نسمي قياسا موجبا على $(X,\mathcal{M})$ كل تطبيق مجموعاتي

$$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0,+\infty]$$

يحقق الشروط التالية
(ش1) $\mu(\emptyset)=0$.
(ش2) خاصية σ -جمعية محققة، أي من أجل كل متتالية $(A_n)_n \subset \mathcal{M}$ عناصرها من $\mathcal{M}$ وغير متقاطعة مثنى مثنى لدينا

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

في هذه الحالة نقول أن $(X,\mathcal{M},\mu)$ فضاء قياس أو فضاء مقيس .

ملاحظة 1.1.4.
1) في التعريف السابق يمكن إستبدال الشرط الأول (ش1) بالشرط التالي

$$\exists A \in \mathcal{M} : \mu(A) < \infty.$$

2) إذا كان عدد عناصر المتتالية المنفصلة مثنى مثنى $(A_n)_n$ منته فإن الخاصية σ -جمعية تسمى عندئذ الخاصية الجمعية ونعبر عنها كما يلي

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n\ ) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n\ ).$$

تعريف 2.1.4.
لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن $\mathcal{M}$ عشيرة على X . نسمي إحتمالا على X كل قياس موجب $\mathbb{P}$ على $(X,\mathcal{M})$ يحقق $\mathbb{P}(X)=1$.
نقول عندئذ أن $(X,\mathcal{M},\mathbb{P})$ فضاء إحتمال وعناصر $\mathcal{M}$ تسمى حوادث .

مثال 1.1.4.
1) **قياس العد**
هو القياس الموجب المعرف على فضاء القياس $(X,\mathcal{P}(X))$, كما يلي

$$\begin{cases} \mu(A) = card(A), & \text{إذا كان } card(A) < \infty \\ \mu(A) = \infty, & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

2) **قياس ديراك المركز عند نقطة**
لتكن X مجموعة غير خالية وليكن $a \in X$. قياس ديراك المركز عند النقطة a هو القياس الموجب

الذي نرمز له بالرمز δ_a والمعرف على الفضاء $(X,\mathcal{P}(X))$ كما يلي

$$\begin{cases} \delta_a(A)=1, a\in A & \text{إذا كان} \\ \delta_a(A)=0, a\notin A & \text{إذا كان} \end{cases}$$

من أجل كل $A\in\mathcal{P}(X)$.

3) **فضاء القياس المتقطع**

لتكن $X=\mathbb{N}$ و $\mathcal{M}=\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ولتكن $(a_n)_n$ متتالية أعداد حقيقية موجبة . عندئذ من أجل كل $A\in\mathcal{M}$ نضع

$$\mu(A)=\sum_{n\in A}a_n,$$

الثلاثية $(\mathbb{N},\mathcal{M},\mu)$ عبارة فضاء قياس، يسمى فضاء القياس المتقطع على $\mathbb{N}$.

تعريف 3.1.4.

1) نقول عن القياس الموجب μ أنه منته إذا كان

$$\forall A\in\mathcal{M}:\mu(A)<\infty.$$

أو بعبارة أخرى $\mu(X)<\infty$.

2) نقول عن القياس الموجب μ أنه σ -منته إذا وجدت متتالية $(E_n)_n\subset\mathcal{M}$ من الأجزاء القيوسة التي تحقق

$$\forall n\geqslant 1:\mu(E_n)<\infty \text{ و } X=\bigcup_{n=1}^{+\infty}E_n.$$

نظرية 1.1.4. (خواص القياس الموجب)

ليكن فضاء القياس $(X,\mathcal{M},\mu)$ ، عندئذ لدينا الخواص التالية:

1) **(الرتابة)** إذا كان $A,B\in\mathcal{M}$ مع $A\subset B$ فإن $\mu(A)\leq\mu(B)$.

2) إذا كان $A,B\in\mathcal{M}$ مع $A\subset B$ و $\mu(A)<\infty$ فإن $\mu(B\backslash A)=\mu(B)-\mu(A)$.

3) إذا كانت $(A_n)_n$ متتالية من $\mathcal{M}$ فإن

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\Big)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

4) **(الإستمرار المتزايد)** إذا كانت $(A_n)_{n\geq1}$ متتالية مزايدة من عناصر $\mathcal{M}$ فإن

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\Big)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\mu\left(A_n\right).$$

5) **(الإستمرار المتناقص)** إذا كانت $(A_n)_{n\geq1}$ متتالية متناقصة من عناصر $\mathcal{M}$ حيث $\mu(A_1)<\infty$ فإن

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n\Big)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\mu\left(A_n\right).$$

الأجزاء المهملة وفضاء القياس التام

تعريف 4.1.4.
ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس ولتكن $N \subset X$.
نقول عن المجموعة N أنها مهملة بالنسبة إلى القياس μ إذا وجد جزء قيوس $E \in \mathcal{M}$ بحيث $N \subset E$ و $\mu(E) = 0$.

ملاحظة 2.1.4.
إذا كانت $(A_n)_n$ متتالية أجزاء مهملة في فضاء القياس $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فإن المجموعة $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ مهملة .
بالفعل من أجل كل $n \geq 1$ يوجد $E_n \in \mathcal{M}$ بحيث $A_n \subset E_n$ و $\mu(E_n) = 0$. عندئذ لدينا

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \text{ et } \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0.$$

وبالتالي المجموعة $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ مهملة بالنسبة إلى القياس μ .

تعريف 5.1.4.
نقول عن فضاء القياس $(X, \mathcal{M}, \mu)$ أنه تام إذا كان كل جزء مهمل بالنسبة إلى القياس μ قيوسا (أي ينتمي إلى العشيرة $\mathcal{M}$) .
في هذه الحالة نقول كذلك أن القياس μ تام .

2.1.4 تعريف القياس الخارجي وخواصه

تعريف 6.1.4. القياس الخارجي
لتكن X مجموعة غير خالية . نقول عن تطبيق
$\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ أنه قياس خارجي على X إذا كان
(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$
(ii) إذا كان $A \subset B \subset X$ فإن $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
(iii) من أجل كل متتالية $(A_n)_n$ عناصرها أجزاء من X لدينا

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

ملاحظة 3.1.4.
واضح أن كل قياس موجب على $(X, \mathcal{P}(X))$ هو قياس خارجي على X . لكن العكس غير صحيح عموما .

تعريف 7.1.4.
ليكن μ^* قياسا خارجيا على مجموعة غير خالية X وليكن E جزءا من X .
نقول عن E أنه قابل للقياس نسبة إلى μ^* إذا تحقق

$$\forall A \subset X : \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c). \tag{1.4}$$

ونقول كذلك أن E قيوس بمفهوم كاراتيودوري (Carathéodory) نسبة إلى μ^* .
نرمز بالرمز $\mathcal{M}(\mu^*)$ لأسرة كل أجزاء E القيوسة نسبة إلى القياس الخارجي μ^*.

ملاحظة 4.1.4.
من أجل كل $A \subset X$ لدينا

$$A = A \cap (E \cup E^c) = (A \cap E) \cup (A \cap E^c),$$

ومنه بإستخدام الخاصية (iii) في تعريف القياس الخارجي نحصل على

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

إذن لإثبات أن الجزء $E \subset X$ قيوس نسبة إلى μ^* يكفي إثبات أن

$$\forall A \subset X : \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{2.4}$$

نظرية 2.1.4.
ليكن μ^* قياسا خارجيا على مجموعة غير خالية X . عندئذ الأسرة $\mathcal{M}(\mu^*)$ تشكل عشيرة على X وإقتصار μ^* على $\mathcal{M}(\mu^*)$ هو قياس موجب .

3.1.4 قياس لوبيغ على $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

نظرية 3.1.4.
يوجد قياس موجب وحيد على $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ يرمز له بالرمز λ ويحقق $\lambda(]a,b[) = b - a$ ، من أجل كل $a, b \in \mathbb{R}$ مع $a < b$.
هذا القياس الموجب يسمى قياس لوبيغ (Lebesgue) على $\mathbb{R}$.

ملاحظة 5.1.4.
1) قياس لوبيغ σ -منته لأن $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}]-n,n[$ و $\lambda(]-n,n[) = 2n < +\infty$
2) من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا $\lambda(\{x\}) = 0$ ، ومنه نستنتج أن

$$\lambda(]a,b[) = \lambda(]a,b]) = \lambda([a,b[) = \lambda([a,b]) = b - a.$$

بالفعل، لدينا $]x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}[\bigcap_{n=1}^{+\infty} = \{x\}$ ومنه بإستخدام خاصية الإستمرار المتناقص لقياس لوبيغ نحصل على

$$\lambda(\{x\}) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \lambda(]x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}[) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

قضية 4،1،1.
لتكن D مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ قابلة للعد، عندئذ $\lambda(D)=0$.

قضية 4،1،2.
من أجل كل $\alpha\in\mathbb{R}$ و $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ نضع $\alpha+A=\{a+\alpha,\ a\in A\}$ وكذلك $-A=\{-a,\ a\in A\}$.
عندئذ لدينا $\lambda(\alpha+A)=\lambda(A)$ و $\lambda(-A)=\lambda(A)$.

4.1.4 التقارب شبه الكلي والتقارب بالقياس

تعريف 4،1،8. الخاصية المحققة شبه كليا
ليكن $(X,\mathcal{M},\mu)$ فضاء قياس ولتكن $p(x)$ خاصية مرتبطة بالمتغير $x\in X$.
نقول أن هذه الخاصية صحيحة شبه كليا نسبة إلى القياس μ (ونكتب أحيانا μ -شبه كليا) إذا كانت المجموعة $\{x\in X:\ p(x)$ غير صحيحة$\}$ مهملة بالنسبة إلى القياس μ .

مثال 4،1،2. المساواة شبه كليا
إذا كان التابعان $f,g:X\longrightarrow\mathbb{R}$ متساويين شبه كليا فإنه يوجد جزء قيوس $A\in\mathcal{M}$ بحيث

$$(f\neq g)=\{x\in X: f(x)\neq g(x)\}\subset A \text{ و } \mu(A)=0$$

أي أن $f(x)=g(x)$ من أجل كل $x\in A^c$ و $\mu(A)=0$.
نلاحظ أنه إذا كان f و g قيوسين فإن $(f\neq g)\in\mathcal{M}$ وبالتالي $f=g$ شبه كليا إذا وفقط إذا كان $\mu(f\neq g)=0$.

قضية 4،1،3.
ليكن $(X,\mathcal{M},\mu)$ فضاء قياس تام وليكن $f,g:(X,\mathcal{M})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ تابعين حيث $f=g$ شبه كليا و f قيوس . عندئذ يكون التابع g قيوس .

تعريف 4،1،9. (التقارب شبه الكلي)
ليكن $(X,\mathcal{M},\mu)$ فضاء قياس ولتكن $(f_n)_n$ متتالية توابع قيوسة معرفة من X نحو $\mathbb{R}$ أو $[0,+\infty]$.
نقول أن المتتالية $(f_n)_n$ أنها متقاربة شبه كليا نحو التابع القيوس f المعرف من X نحو $\mathbb{R}$ أو $[0,+\infty]$

ونكتب إختصارا $f \longrightarrow f_n$ شك، إذا تحقق ما يلي

$$\mu\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n \neq f\right) = 0.$$

ملاحظة 6.1.4.
نلاحظ أن التقارب البسيط يستلزم التقارب شبه الكلي لأنه إذا كان $f \longrightarrow f_n$ ببساطة فإن

$$\mu\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n \neq f\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

تعريف 10.1.4. (التقارب بالقياس)
ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس ولتكن $(f_n)_n$ متتالية توابع قيوسة معرفة من X نحو $\mathbb{R}$ أو $[0, +\infty]$.
نقول أن المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بالقياس نحو التابع القيوس f المعرف من X نحو $\mathbb{R}$ أو $[0, +\infty]$
ونكتب إختصارا $f \xrightarrow{\mu} f_n$ إذا تحقق ما يلي

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

ملاحظة 7.1.4.
التقارب شبه الكلي لا يستلزم عموما التقارب بالقياس .

قضية 4.1.4.
إذا كان القياس منته فإن التقارب شبه الكلي يستلزم التقارب بالقياس .

2.4 تمارين الفصل الرابع

تمرين 1.4.
في فضاء القياس $(X,\mathcal{M},\mu)$ نعتبر الجزئين $A,B\in\mathcal{M}$.
1) برهن أن $\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)=\mu(A)+\mu(B)$.
2) إذا كان $\mu(A)<\infty$ ، استنتج أن $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$.
3) نفرض أن $\mu(A\cap B)<\infty$ وأن $\mu(A\Delta B)=0$ برهن أن $\mu(A)=\mu(B)$.

تمرين 2.4.
1) ليكن $(X,\mathcal{M},\mu)$ فضاء قياس . تحقق أن μ جمعي أي $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$ من أجل كل $A,B\in\mathcal{M}$ حيث $A\cap B=\emptyset$.
2) ليكن التطبيق $\nu:\mathcal{P}(\mathbb{N})\longrightarrow[0,+\infty]$ المعرف بأن

$$\nu(A)=\begin{cases}0, & \text{إذا كان } A=\emptyset\\ \sum\limits_{n\in A}\dfrac{1}{n^2}, & \text{إذا كان } A \text{ منته و } 0\notin A\\ +\infty, & \text{إذا كان } A \text{ غير منته أو } 0\in A\end{cases}$$

برهن أن ν جمعي غير أنه ليس σ -جمعي .

تمرين 3.4.
ليكن الفضاء القيوس $(\mathbb{N}^*,\mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ والتطبيق $\mu:\mathcal{P}(N^*)\longrightarrow[0,+\infty]$ المعرف بأن

$$\mu(A)=\begin{cases}0, & \text{إذا كان } A=\emptyset\\ \sum\limits_{n\in A}\dfrac{1}{n}, & \text{إذا كان } A\neq\emptyset\end{cases}$$

برهن أن μ قياس موجب على $(\mathbb{N}^*,\mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ ثم حدد الأجزاء المهملة في هذا الفضاء .

تمرين 4.4.
X مجموعة غير خالية .
1) أثبت أنه إذا كانت A,B,C ثلاثة أجزاء من X فإن

$$A\Delta C\subset(A\Delta B)\cup(B\Delta C)\,.$$

2) نعتبر الآن فضاء القياس $(X,\mathcal{M},\mu)$ ونعرف على $\mathcal{M}$ العلاقة $\mathcal{R}$ بأن

$$A\mathcal{R}B\Longleftrightarrow\mu\,(A\Delta B)=0.$$

أثبت أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathcal{M}$.

3) فيما يلي نرمز بالرمز $\mathcal{C}$ إلى مجموعة صفوف التكافؤ وفق العلاقة $\mathcal{R}$.
من أجل كل $\dot{A},\dot{B}\in\mathcal{C}$ نضع

$$d\left(\dot{A},\dot{B}\right)=\mu\left(A\Delta B\right).$$

أ) بين أن d معرفة جيدا، بمعنى أنه إذا كان A' ممثلا آخرا للصف $\dot{A}$ وكان B' ممثلا آخرا للصف $\dot{B}$ فإن

$$\mu\left(A\Delta B\right)=\mu\left(A'\Delta B'\right).$$

ب) برهن d مسافة على $\mathcal{C}$.

تمرين 5.4.
$(X,\mathcal{M})$ فضاء قيوس و $\mu:\mathcal{M}\longrightarrow[0,+\infty]$ تطبيق جمعي ويحقق خاصية الإستمرار المتزايد .
برهن أن μ قياس موجب على $(X,\mathcal{M})$.

تمرين 6.4.
من أجل كل $\ell>0$ نعتبر التابع المجموعاتي المعرف بأن

$$\mu_\ell:\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)\longrightarrow[0,+\infty]\,,\,\mu_\ell(A)=\sum_{k\in A}\ell^k,\,A\subset\mathbb{N}^*$$

(نقبل أنه من أجل $\ell=1$ ، التابع μ_1 هو بالضبط قياس العد) .
1) برهن أن μ_ℓ قياس موجب على $(\mathbb{N}^*,\mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ من أجل كل $\ell>0$.
2) من أجل $\ell>0$ هل القياس μ_ℓ منته؟ هل هو إحتمال؟ .
3) من أجل $n\in\mathbb{N}^*$ نعتبر المجموعة

$$B_n=\{n,n+1,\ldots\}\,.$$

أحسب عندئذ $\mu_\ell(B_n)$ وكذلك $\mu_\ell(\mathbb{N}^*-B_n)$.

تمرين 7.4.
ليكن $(X,\mathcal{M},\mu)$ فضاء قياس و $(Y,\mathcal{N})$ فضاء قيوس وليكن $f:X\longrightarrow Y$ تطبيق قيوس .
من أجل كل $B\in\mathcal{N}$ نضع $\nu(B)=\mu\left(f^{-1}(B)\right)$.
1) برهن أن ν قياس موجب على $(Y,\mathcal{N})$ (يدعى القياس صورة μ بواسطة التطبيق f) .
2) نضع $X=Y=\mathbb{R}$ و $\mathcal{M}=\mathcal{N}=\mathcal{B}(\mathbb{R})$ و $\mu=\delta_a$ قياس ديراك حيث $(a\in\mathbb{R})$. حدد صورة القياس δ_a بواسطة التطبيق القيوس $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.
3) نضع $(X,\mathcal{M},\mu)=(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ و $(Y,\mathcal{N})=(\mathbb{Z},\mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ و $f=E$ تابع الجزء الصحيح .
حدد صورة القياس λ

تمرين 8.4.
ليكن $(X,\mathcal{M},\mu)$ فضاء قياس يحقق $\mu(A)\in[0,1]$ من أجل كل $A\in\mathcal{M}$.
لتكن $(A_n)_n$ متتالية عناصرها من $\mathcal{M}$ حيث $\forall n\in\mathbb{N}:\mu(A_n)=1$.
أحسب كل من $\mu(X)$ و $\mu(\cup_n A_n)$ و $\mu(\cap_n A_n)$.

تمرين 9.4.
ليكن $(X,\mathcal{M},\mu)$ فضاء قياس حيث $\mu(X)=1$. ولتكن $A_1,A_2,...,A_n$ عناصر من $\mathcal{M}$.
برهن أنه إذا كان $\sum\limits_{p=1}^{n}\mu(A_p)>n-1$ فإن $\mu(\bigcap\limits_{p=1}^{n}A_p)>0$.

تمرين 10.4.
ليكن $(X,\mathcal{M})$ فضاء قيوس، ولتكن $(\mu_n)_n$ متتالية من القياسات الموجبة المعرفة على الفضاء $(X,\mathcal{M})$. من أجل كل $A\in\mathcal{M}$ نضع

$$\mu(A)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mu_n(A).$$

1) برهن أن μ قياسا موجبا على $(X,\mathcal{M})$.
2) نفرض أن كل القياسات μ_n هي عبارة عن احتمال بمعنى $\mu_n(X)=1$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$
ونعتبر متتالية الأعداد الحقيقية الموجبة $(p_n)_n$ التي تحقق

$$\sum_{n=0}^{+\infty}p_n=1.$$

وليكن $\mathbb{P}$ تطبيق مجموعاتي معرف على $\mathcal{M}$ بأن

$$\forall A\in\mathcal{M}:\mathbb{P}(A)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_n\mu_n(A).$$

برهن أن $\mathbb{P}$ يعرف إحتمالا على $(X,\mathcal{M})$.
3) **تطبيق عددي:** لتكن μ_1 ، μ_2 و μ_3 قياسات موجبة معرفة على الفضاء $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ بأن

$$\mu_1=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta_k,\quad \mu_2=\sum_{k=0}^{+\infty}k\delta_k,\quad \mu_3=\lambda.$$

حيث δ_k هو قياس ديراك و λ هو قياس لوبيغ المعرفين على الفضاء $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. ونعتبر الأجزاء القيوسة التالية

$$A_n=\left[n,n+1+\frac{1}{n^2}\right] \text{ où } \quad n\in\mathbb{N}^*,$$

$$B_n=\bigcup_{k=0}^{n}A_k \quad \text{و} \quad B=\bigcup_{k=0}^{+\infty}A_k$$

$$C_n=\bigcap_{k=0}^{n}A_k \quad \text{و} \quad C=\bigcap_{k=0}^{+\infty}A_k$$

أحسب قياس كل من الأجزاء القيوسة السابقة بواسطة القياسات الثلاثة السابقة .

تمرين 11.4.
الفضاء $\mathbb{R}$ مزود بعشيرته البوريلية وبقياس لوبيغ λ .
أحسب قياس المجموعات A و B حيث

$$A = [0,1] \setminus \mathbb{Q} \quad \text{و} \quad B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[n, n + \frac{1}{2^n} \right[.$$

تمرين 12.4.
ليكن μ قياس موجب على $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ يحقق
i) $\mu([0,1[) = 1$
ii) $\mu(x + A) = \mu(A)$ من أجل $x \in \mathbb{R}$ وكل $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ حيث $(x + A)$ هي مجموعة العناصر $x + a$ مع $a \in A$.

1) برهن أن $\mu([0, \frac{1}{n}[) = \frac{1}{n}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ (يمكن تقسيم المجال $[0,1[$ إلى مجالات عددها n وطول كل منها $\frac{1}{n}$)
2) أ) حدد المجموعة $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [0, \frac{1}{n}[$ ثم برهن أن $\mu(\{0\}) = 0$.
ب) برهن أن كل جزء عدود من $\mathbb{R}$ قياسه معدوم .
3) برهن أنه من أجل كل $r \in \mathbb{Q}$ حيث $r > 0$ لدينا $\mu([0, r[) = r$.
4) ليكن $a \in \mathbb{R}$ حيث $a > 0$. تحقق أن $[0, a[= \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} [0, r_n[$ حيث $(r_n)_n \subset \mathbb{Q}$ متتالية متزايدة ومتقاربة نحو a . ثم أحسب $\mu([0, a[)$.
5) برهن أنه من أجل كل $a, b \in \mathbb{R}$ لدينا $\mu([a, b[) = b - a = \mu(]a, b])$.
ما هو القياس μ .

تمرين 13.4.
ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس و $\mathcal{F}$ أسرة من أجزاء X معرفة كما يلي

$$\mathcal{F} = \{ Z \subset X : \exists A, B \in \mathcal{M}, A \subset Z \subset B \text{ et } \mu(B - A) = 0 \}$$

1) برهن أن $\mathcal{F}$ عشيرة على X تحوي العشيرة $\mathcal{M}$.
2) أ) تحقق أنه إذا كان $A \subset B$ وكان $\mu(B - A) = 0$ فإن $\mu(A) = \mu(B)$.
ب) نعرف التطبيق المجموعاتي $\nu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ بأن

$$\forall Z \in \mathcal{F} : \nu(Z) = \mu(A) = \mu(B)$$

حيث A, B هي العناصر من $\mathcal{M}$ التي تحقق $A \subset Z \subset B$ و $\mu(B - A) = 0$.
برهن أن ν قياس موجب على $(X, \mathcal{F})$.

3) ليكن $\mathcal{M} \ni Z$ حيث $\nu(Z)=0$.
برهن أنه إذا كان Z' جزء من X محتوى في Z فإنه حتما لدينا $Z' \in \mathcal{M}$.

تمرين 14.4.
X مجموعة غير خالية و $\mu^*:\mathcal{P}(X)\longrightarrow\{0,1\}$ تطبيق معرف كما يلي

$$\mu^*(A)=\begin{cases}0, & A=\emptyset\\ 1, & A\neq\emptyset\end{cases}$$

1) برهن أن μ^* قياس خارجي على X .
2) حدد $\mathcal{M}(\mu^*)$ أسرة الأجزاء القيوسة نسبة إلى القياس الخارجي μ^* . وتحقق أن نظرية كاراتيودوري (النظرية 2.1.4) محققة .
3) نفرض الآن أن $card(X)>1$ برهن عندئذ أن μ^* ليس قياس موجب على $(X,\mathcal{P}(X))$.

تمرين 15.4.
μ^* قياس خارجي معرف على مجموعة غير خالية X . لتكن E مجموعة جزئية من X حيث $\mu^*(E)=0$.
برهن أن E قابلة للقياس نسبة إلى القياس الخارجي μ^* .

تمرين 16.4.
μ^* قياس خارجي جمعي على مجموعة كل أجزاء المجموعة غير الخالية X .
برهن أن μ^* قياس موجب على $(X,\mathcal{P}(X))$.

تمرين 17.4.
1) ليكن $(X,\mathcal{M},\mu)$ فضاء قياس و $(A_n)_n$ متتالية عناصرها من $\mathcal{M}$ حيث $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\mu(A_n)=0$.
برهن أن المتتالية $(f_n\chi_{A_n})_n$ متقاربة بالقياس نحو 0 مهما تكن متتالية التوابع القيوسة $(f_n)_n$.
2) في الفضاء $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),card)$ برهن أنه إذا كان $f_n\longrightarrow f$ بالقياس على $\mathbb{N}$ فإن $f_n\longrightarrow f$ بإنتظام على $\mathbb{N}$.

تمرين 18.4.
ليكن $(X,\mathcal{M},\mu)$ فضاء قياس و $(f_n)_n$ متتالية توابع قيوسة .
1) إذا كان $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع مستمر بإنتظام و $f_n\longrightarrow f$ بالقياس، فبرهن أن $\varphi\circ f_n\longrightarrow\varphi\circ f$ بالقياس .
2) إذا كان $f_n\longrightarrow f$ بالقياس و g تابع قيوس حيث $f=g$ شبه كليا، فبرهن أن $f_n\longrightarrow g$ بالقياس .

3.4 حلول تمارين الفصل الرابع

حل التمرين 1.4 :

1) بما أن
$$A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B)$$
إذن
$$\begin{aligned} &\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A \backslash B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \backslash A) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$
وذلك لأن
$$(A \backslash B) \cap (A \cap B) = \emptyset \quad \text{و} \quad (B \backslash A) \cap (A \cap B) = \emptyset$$
2) من رتابة القياس الموجب نحصل على
$$\mu(A \cap B) \leq \mu(A) < \infty$$
هذا يثبت أن الحالة $\infty - \infty$ غير موجودة . ومنه نستطيع أن نكتب
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$
3) لدينا
$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$
بما أن المجموعتين $(B \backslash A)$ و $(A \backslash B)$ منفصلتين فإن
$$\mu(A \triangle B) = \mu(A \backslash B) + \mu(B \backslash A) = 0$$
وهذا يستلزم أن
$$\mu(A \backslash B) = \mu(B \backslash A) = 0$$
من جهة ثانية بما أن
$$A \backslash B = A \backslash A \cap B \quad \text{و} \quad B \backslash A = B \backslash A \cap B$$
وأن $\mu(A \cap B) < \infty$ فإن
$$\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) \quad \text{و} \quad \mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$$
وهو ما يثبت أن
$$\mu(A) - \mu(A \cap B) = \mu(B) - \mu(A \cap B) = 0$$
ومنه أخيرا
$$\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cap B).$$

حل التمرين 2.4 :

1) نعتبر $(A_n)_n$ متتالية من أجزاء X معرفة كما يلي

$$\begin{cases} A_1 = A \\ A_2 = B \\ A_n = \emptyset, \forall n \geq 3 \end{cases}$$

من خاصية σ - جمعية نستنتج أن

$$\mu(A \cup B) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) = \mu(A) + \mu(B).$$

2) ليكن A و B جزئين منفصلين من $\mathbb{N}$.
نميز ثلاثة حالات هي كما يلي
i) إذا كان $0 \in A \cup B$
في هذه الحالة يكون $0 \in A$ أو $0 \in B$ ومنه نستنتج أن

$$+\infty = \nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) = +\infty.$$

ii) إذا كان $0 \notin A \cup B$ و $A \cup B$ منته .
في هذه الحالة كل من A و B منته ولدينا عندئذ

$$\nu(A \cup B) = \sum_{n \in A \cup B} \frac{1}{n^2} = \sum_{k \in A} \frac{1}{k^2} + \sum_{k \in B} \frac{1}{k^2} = \nu(A) + \nu(B).$$

iii) إذا كان $0 \notin A \cup B$ و $A \cup B$ غير منته .
في هذه الحالة يكون A غير منته أو B غير منته، وذلك يستلزم ما يلي

$$+\infty = \nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) = +\infty.$$

بقي إثبات أن التطبيق ν لا يمتع بالخاصية σ - جمعية، من أجل ذلك نعتبر $(A_n)_n$ متتالية من أجزاء $\mathbb{N}$ حيث $A_n = \{n\}$
عندئذ لدينا

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \neq \sum_{n=1}^{+\infty.} \nu(A_n)$$

وذلك لأنه من جهة أولى لدينا

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{n\}\right) = \nu(\mathbb{N}^*) = +\infty,$$

غير أن

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \nu(\{n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

حل التمرين 3.4 :

لدينا تعريفا $\mu(\emptyset)=0$
لتكن الآن $(A_n)_n$ متتالية من أجزاء $\mathbb{N}^*$ منفصلة مثنى مثنى، لدينا عندئذ

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \sum_{k\in\cup A_n}^{+\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k\in A_1} \frac{1}{k} + \sum_{k\in A_2} \frac{1}{k} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k\in A_n} \frac{1}{k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

وهو ما يثبت أن μ قياس موجب على $\mathbb{N}^*$.
ليكن A جزءا من $\mathbb{N}^*$ يحقق $\mu(A)=0$ أي $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}=0$ إذن $A=\emptyset$.
وهو ما يثبت أن المجموعة المهملة الوحيدة بواسطة القياس μ هي المجموعة الخالية .

حل التمرين 4.4 :

1) لتكن A, B, C أجزاء من المجموعة X . من تعريف الفرق التناظري لدينا

$$A\Delta C = \left(A\cap C^C\right)\cup\left(A^C\cap C\right).$$

من جهة أولى لدينا الإحتواء التالي

$$A\cap C^C \subset (A\cap B^C)\cup(B\cap C^C)$$

الذي ينتج من الإحتواءات التالية

$$\begin{aligned}A\cap C^C &= A\cap C^C\cap(B^C\cup B)\\ &= \left(A\cap C^C\cap B^C\right)\cup\left(A\cap C^C\cap B\right)\\ &\subset (A\cap B^C)\cup(B\cap C^C).\end{aligned}$$

من جهة ثانية بنفس الطريقة نبرهن أن

$$A^C\cap C\subset(A^C\cap B)\cup(B^C\cap C).$$

ومنه، بما أن الإتحاد تجميعي نحصل على ما يلي

$$\begin{aligned}A\Delta C &\subset \left[(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)\right]\cup\left[(B\cap C^C)\cup(B^C\cap C)\right]\\ &= (A\Delta B)\cup(B\Delta C).\end{aligned}$$

2) أ) العلاقة $\mathcal{R}$ إنعكاسية لأنه من أجل كل $A\in\mathcal{M}$ لدينا

$$\mu(A\Delta A)=\mu(\emptyset)=0$$

أي أن $A\mathcal{R}A$.
ب) العلاقة $\mathcal{R}$ تناظرية حيث أن الإستلزام التالي صحيح

$$A\mathcal{R}B \Longrightarrow B\mathcal{R}A,$$

مهما كان $A, B \in \mathcal{M}$. وذلك ناتج عن المساواة التالية

$$\mu(A\Delta B) = \mu(B\Delta A).$$

جـ) نثبت الأن أن $\mathcal{R}$ علاقة متعدية . ليكن $A, B, C \in \mathcal{M}$ بحيث $A\mathcal{R}B$ و $B\mathcal{R}C$ أي أن

$$\mu(A\Delta B) = 0 \text{ و } \mu(B\Delta C) = 0.$$

ومنه بإستعمال الإحتواء الذي أثبتناه في السؤال الأول وخواص القياس الموجب نجد

$$\begin{aligned}\mu(A\Delta C) &\leq \mu\left[(A\Delta B) \cup (B\Delta C)\right]\\ &\leq \mu(A\Delta B) + \mu(B\Delta C) = 0.\end{aligned}$$

وهو ما يثبت أخيرا أن $A\mathcal{R}C$.

3) لإثبات أن d معرفة جيدا، نأخذ A' ممثلا آخر للصف $\dot{A}$ و B' ممثلا آخر للصف $\dot{B}$ وهذا يعني أن

$$\mu(A\Delta A') = 0 \text{ و } \mu(B\Delta B') = 0.$$

عندئذ لدينا ما يلي

$$\begin{aligned}\mu(A\Delta B) &\leq \mu\left[(A\Delta A') \cup (A'\Delta B)\right]\\ &\leq \mu(A\Delta A') + \mu(A'\Delta B)\\ &= \mu(A'\Delta B)\\ &\leq \mu\left[(A'\Delta B') \cup (B'\Delta B)\right]\\ &\leq \mu(A'\Delta B') + \mu(B'\Delta B)\\ &= \mu(A'\Delta B')\end{aligned}$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أن $\mu(A\Delta B) \leq \mu(A'\Delta B')$. بنفس الطريقة السابقة وإنطلاقا من $A'\Delta B'$ نبرهن أن $\mu(A'\Delta B') \leq \mu(A\Delta B)$ ، ومنه التساوي .

نبرهن أن d مسافة على $\mathcal{C}$.

أ) من أجل كل $\dot{A} \in \mathcal{C}$ لدينا

$$d(\dot{A}, \dot{A}) = \mu(A\Delta A) = \mu(\emptyset) = 0.$$

ب) من أجل كل $\dot{A}, \dot{B} \in \mathcal{C}$ لدينا

$$d(\dot{A}, \dot{B}) = \mu(A\Delta B) = \mu(B\Delta A) = d(\dot{B}, \dot{A}).$$

جـ) من أجل كل $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C} \in \mathcal{C}$ لدينا

$$\begin{aligned}d(\dot{A}, \dot{B}) &= \mu(A\Delta B)\\ &\leq \mu\left[(A\Delta C) \cup (C\Delta B)\right]\\ &\leq \mu(A\Delta C) + \mu(C\Delta B)\\ &= d(\dot{A}, \dot{C}) + d(\dot{C}, \dot{B}).\end{aligned}$$

حل التمرين 5.4 :

من الخاصية الجمعية نستنتج مباشرة ما يلي $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset)$ وهو ما يثبت أن $\mu(\emptyset) = 0$.
لتكن الآن $(A_n)_n$ متتالية من الأجزاء القيوسة المنفصلة مثنى مثنى، لدينا عندئذ

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

من أجل كل n نضع $B_n = \cup_{k=1}^{n} A_k$. واضح عندئذ أن المتتالية $(B_n)_n$ متزايدة .
بتطبيق خاصية الإستمرار المتزايد وجمعية μ نحصل على ما يلي

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu(B_n) \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).
\end{aligned}$$

حل التمرين 6.4 :

1) لدينا مباشرة $\mu_\ell(\emptyset) = 0$.
لتكن $(A_n)_n$ متالية من أجزاء $\mathbb{N}^*$ عناصرها منفصلة مثنى مثنى، عندئذ لدينا

$$\mu_\ell\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{k\in\cup_n A_n} \ell^k = \sum_{n\geq 1}\sum_{k\in A_n} \ell^k = \sum_{n\geq 1} \mu_\ell(A_n).$$

2) بالحساب نحصل مباشرة على

$$\mu_\ell(\mathbb{N}^*) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \ell^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \ell^k = \begin{cases} \dfrac{\ell}{1-\ell}, & \ell < 1 \text{ إذا كان} \\ +\infty, & \ell \geq 1 \text{ إذا كان} \end{cases}$$

ومنه μ_ℓ منته إذا وفقط إذا كان $\ell < 1$.
وكذلك يكون μ_ℓ إحتمالا إذا وفقط إذا كان $\dfrac{\ell}{1-\ell} = 1$ وهذا يكافئ أن $\ell = \dfrac{1}{2}$.
3) لدينا

$B_n = \{n, n+1, ...\}$ و $\mathbb{N}^* - B_n = \{1, 2, ..., n-1\}$

ومنه لدينا

$$\mu_\ell(B_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \ell^k = \begin{cases} \dfrac{\ell^n}{1-\ell}, & \ell < 1 \text{ إذا كان} \\ +\infty, & \ell \geq 1 \text{ إذا كان} \end{cases}$$

وكذلك

$$\mu_\ell(\mathbb{N}^* - B_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \ell^k = \begin{cases} \dfrac{\ell-\ell^n}{1-\ell}, & \ell \neq 1 \text{ إذا كان} \\ n-1, & \ell = 1 \text{ إذا كان} \end{cases}$$

حل التمرين 7.4 :

1) بما أن μ قياس موجب فإن

$$\nu(\emptyset)=\mu\left(f^{-1}(\emptyset)\right)=\mu\left(\emptyset\right)=0.$$

لتكن الآن $(B_n)_n$ متتالية من الأجزاء القيوسة من $\mathcal{N}$ المنفصلة مثنى مثنى، لدينا عندئذ

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n\right)&=\mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n\right)\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}f^{-1}\left(B_n\right)\right)\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu\left(f^{-1}\left(B_n\right)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\nu(B_n).\end{aligned}$$

2) نذكر أن قياس ديراك معرف كما يلي

$$\forall A\subset\mathbb{R}:\delta_a(A)=\begin{cases}1,\ a\in A\\0,\ a\notin A\end{cases}$$

تحديد صورة قياس ديراك . من أجل كل $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ لدينا ما يلي

$$\begin{aligned}\delta_a(f^{-1}\left(B\right))&=\begin{cases}1,\ a\in f^{-1}\left(B\right)\\0,\ a\notin f^{-1}\left(B\right)\end{cases}\\&=\begin{cases}1,\ f(a)\in B\\0,\ f(a)\notin B\end{cases}\\&=\delta_{f(a)}(B).\end{aligned}$$

ومنه صورة قياس ديراك δ_a هو قياس ديراك $\delta_{f(a)}$.

3) لتكن $B\subset\mathbb{Z}$ لدينا إذن

$$B=\cup_{n\in B}\left\{n\right\},$$

ومنه نحصل على

$$\nu(B)=\sum_{n\in B}\nu(\{n\}).$$

ومن جهة ثانية لدينا

$$\nu(\{n\})=\lambda\left(E^{-1}\left(\{n\}\right)\right)=\nu([n,n+1[)=1.$$

أخيرا نحصل على

$$\nu(B)=\sum_{n\in B}1=card(B).$$

ومنه صورة قياس لوبيغ هو قياس العد $card$.

حل التمرين 8.4 :

لدينا الإحتواءات التالية

$$A_n\subset\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\subset X.$$

ومنه بإستخدام رتابة القياس الموجب نحصل على

$$1=\mu(A_n)\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)\leq \mu(X)\leq 1,$$

ومنه نستنتج أن

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)=1 \text{ و } \mu(X)=1.$$

لنحسب الآن $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n\right)$، حيث بإمكاننا أن نكتب ما يلي

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n\right)&=\mu\left(X-\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n\right)^c\right)\\&=\mu(X)-\mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n\right)^c\right)\\&=\mu(X)-\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n^c\right).\end{aligned}$$

من جهة ثانية لدينا

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n^c\right)\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n^c)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(X)-\mu(A_n)=0,$$

ومنه أخيرا

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n\right)=\mu(X)=1.$$

حل التمرين 9.4 :

لدينا مباشرة

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcap_{p=1}^{n}A_p\right)&=\mu(X)-\mu\left(\bigcup_{p=1}^{n}A_p^c\right)\\&\geq\mu(X)-\sum_{p=1}^{n}\mu(A_p^c)\\&=\mu(X)-n\mu(X)+\sum_{p=1}^{n}\mu(A_p)\\&>\mu(X)-n\mu(X)+n-1=0\end{aligned}$$

وهو ما يثبت المطلوب .

حل التمرين 10.4 :

1) في هذا السؤال نستعمل النتيجة التالية (التي سوف نعالجها لاحقا في التمرين ??) . لتكن $(a_{n,k})_{n,k}$ متتالية مزدوجة حدودها أعداد حقيقية موجبة أي $a_{n,k}\geq 0$ من أجل كل $n,k\in\mathbb{N}$ ، عندئذ لدينا

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n,k}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}a_{n,k}.$$

نثبت الآن أن μ قياس موجب .

بما أن $\mu_n(\emptyset)=0$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن $\mu(\emptyset)=0$. لتكن الآن $(A_n)_n$ متتالية أجزاء قيوسة منفصلة مثنى مثنى من العشيرة $\mathcal{M}$ ، عندئذ لدينا

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mu_n(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\mu_n(A_k)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\mu_n(A_k)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mu(A_k).\end{aligned}$$

وهو ما ينهي إثبات أن μ قياس موجب على الفضاء القيوس $(X,\mathcal{M})$.

2) بما أن $p_n\mu_n$ قياس موجب من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ إذن حسب السؤال السابق $\mathbb{P}$ قياس موجب على الفضاء $(X,\mathcal{M})$. من جهة أخرى لدينا

$$\mathbb{P}(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_n\mu_n(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_n=1.$$

وهو ما يثبت أن $\mathbb{P}$ إحتمالا على الفضاء $(X,\mathcal{M})$.

3)**التطبيق العددي**

(i) بالنسبة للمجموعة A_n . لدينا $\mu_1(A_1)=3$ ، ومن أجل كل $n\geq 2$ لدينا

$$\mu_1(A_n)=\chi_{A_n}(n)+\chi_{A_n}(n+1)=2.$$

لدينا $\mu_2(A_1)=1+2+3=6$ ، ومن أجل كل $n\geq 2$ لدينا

$$\mu_2(A_n)=n\chi_{A_n}(n)+(n+1)\chi_{A_n}(n+1)=2n+1.$$

من أجل كل $n\geq 1$ لدينا

$$\mu_3(A_n)=1+\frac{1}{n^2}$$

(ii) بالنسبة للمجموعة B_n و المجموعة B .

لدينا $B_n=\left[1,n+1+\frac{1}{n^2}\right]$ و $B=[1,+\infty[$ ومنه نحصل مباشرة على $\mu_1(B_1)=3$ وكذلك من أجل كل $n\geq 2$ لدينا $\mu_1(B_n)=n+1$ ولدينا $\mu_2(B_1)=6$.

من أجل كل $n\geq 2$ نحصل على

$$\mu_2(B_n)=1+2+3+...+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

أخيرا، من أجل كل $\forall n\in\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\mu_3(B_n)=n+\frac{1}{n^2},$$

وكذلك

$$\mu_1(B)=\mu_2(B)=\mu_3(B)=+\infty.$$

(iii) بالنسبة إلى المجموعتين C_n ، C نميز الحالات $n = 1, 2, 3$ و $n \geq 4$.

لدينا $C_1 = [1, 3]$ ومنه

$$\mu_1(C_1) = 3, \mu_2(C_1) = 6, \mu_3(C_1) = 2.$$

وكذلك $C_2 = [2, 3]$ ومنه

$$\mu_1(C_2) = 2, \mu_2(C_2) = 3, \mu_3(C_2) = 1.$$

وكذلك $C_3 = \{3\}$ ومنه

$$\mu_1(C_3) = 1, \mu_2(C_3) = 3, \mu_3(C_3) = 0.$$

الآن من أجل كل $n \geq 4$ لدينا $C_n = \emptyset$ إذن نستنتج أن

$$\mu_1(C_n) = \mu_2(C_n) = \mu_3(C_n) = 0.$$

وكذلك من السهل أن نرى أن $C = \emptyset$ ومنه نستنتج أن

$$\mu_1(C) = \mu_2(C) = \mu_3(C) = 0.$$

حل التمرين 11.4 :

لحساب قياس المجموعة A لدينا ما يلي

$$A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q} = [0, 1] \setminus ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

من جهة ثانية بما أن $[0, 1] \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$ فإن $\lambda\left([0, 1] \cap \mathbb{Q}\right) = 0$ وذلك ناتج من كون

$$\lambda\left([0, 1] \cap \mathbb{Q}\right) \leq \lambda\left(\mathbb{Q}\right) = 0.$$

ومنه أخيرا

$$\lambda(A) = \lambda([0, 1]) - \lambda\left([0, 1] \cap \mathbb{Q}\right) = 1.$$

لحساب قياس المجموعة B نثبت أولا أن المجالات $\left[n, n + \frac{1}{2^n}\right[$ منفصلة مثنى مثنى، من أجل ذلك ليكن $n < m$ ونفرض أن $x \in \left[n, n + \frac{1}{2^n}\right[$. عندئذ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا ما يلي

$$n \leq x < n + \frac{1}{2^n} < n + 1 \leq m.$$

إذن لدينا $x < m$ وهذا يعني أن $x \notin \left[m, m + \frac{1}{2^m}\right[$ ومنه

$$\left[n, n + \frac{1}{2^n}\right[\cap \left[m, m + \frac{1}{2^m}\right[= \emptyset.$$

بإستخدام خاصية σ - جمعية نجد

$$\lambda(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda\left(\left[n, n + \frac{1}{2^n}\right[\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

حل التمرين 12.4 :

1) نقسم المجال $[0,1[$ كما يلي

$$\begin{aligned}[0,1[&= \left[0,\frac{1}{n}\right[\cup \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right[\cup \left[\frac{2}{n},\frac{3}{n}\right[\cup \ldots \cup \left[\frac{n-1}{n},1\right[\\ &= \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right[.\end{aligned}$$

من أجل $k = 0,1,...,n-1$ ، المجالات $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right[$ منفصلة مثنى مثنى إذن بإستخدام خاصية الجمعية والفرضيات i) و ii) نحصل على

$$\begin{aligned}1 = \mu\left([0,1[\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mu\left(\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right[\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu\left(\frac{k}{n} + \left[0,\frac{1}{n}\right[\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mu\left(\left[0,\frac{1}{n}\right[\right) = n\mu\left(\left[0,\frac{1}{n}\right[\right),\end{aligned}$$

ومنه نستنتج أن

$$\mu\left(\left[0,\frac{1}{n}\right[\right) = \frac{1}{n}.$$

2) أ) ليكن $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[0,\frac{1}{n}\right[$ عندئذ لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq x < \frac{1}{n},$$

بالمرور إلى النهاية عندما $n \longrightarrow +\infty,$ نحصل على $x = 0$. وهذا يعني أن

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[0,\frac{1}{n}\right[= \{0\}.$$

متتالية المجالات $\left(\left[0,\frac{1}{n}\right[\right)_{n\geq 1}$ متناقصة وكذلك $\mu\left(\left[0,\frac{1}{n}\right[\right) < \infty$.
نستعمل إذن خاصية الإستمرار المتناقص لنحصل على

$$\begin{aligned}\mu\left(\{0\}\right) &= \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[0,\frac{1}{n}\right[\right) \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu\left(\left[0,\frac{1}{n}\right[\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n} = 0.\end{aligned}$$

ب) ليكن A جزءا قابلا للعد في $\mathbb{R}$ عندئذ لدينا

$$A = \cup_{n=1}^{+\infty} \{x_n\}, x_n \neq x_m, \forall n \neq m.$$

ومنه نحصل على

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu\left(\{x_n\}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu\left(x_n + \{0\}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu\left(\{0\}\right) = 0.\end{aligned}$$

3) ليكن $r \in \mathbb{Q}$ نضع $r = \frac{p}{q}$ حيث $p \in \mathbb{Z}$ و $q \in \mathbb{Z}$ مع $q \neq 0$. عندئذ لدينا ما يلي

$$\begin{aligned}[0,r[&= \left[0,\frac{p}{q}\right[= \left[0,\frac{1}{q}\right[\cup \left[\frac{1}{q},\frac{2}{q}\right[\cup \ldots \cup \left[\frac{p-1}{q},\frac{p}{q}\right[\\ &= \bigcup_{k=0}^{p-1} \left[\frac{k}{q},\frac{k+1}{q}\right[.\end{aligned}$$

إذن باستعمال الفرضية ii) والسؤال الأول نحصل على

$$\begin{aligned}\mu\left([0,r[\right) &= \sum_{k=0}^{p-1} \mu\left(\frac{k}{q} + \left[0,\frac{1}{q}\right[\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \mu\left(\left[0,\frac{1}{q}\right[\right) \\ &= \frac{p}{q} = r.\end{aligned}$$

4) ليكن $x \in [0,a[$ عندئذ من كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$ نستنتج أنه توجد متتالية $(r_n)_n$ عناصرها من $\mathbb{Q}$ متزايدة ومتقاربة نحو العدد الحقيقي a . نضع الآن $\varepsilon = a - x > 0$ في تعريف النهاية $a \longrightarrow r_n$ لنحصل على عدد طبيعي n يحقق

$$-\varepsilon < r_n - a$$

وهو ما يثبت أن $x \in [0,r_n[$ ومنه لدينا الإحتواء الأول

$$[0,a[\subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} [0,r_n[\,.$$

بالنسبة للإحتواء العكسي، ليكن $x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} [0,r_n[$ ومنه

$$\exists n \in \mathbb{N} : 0 \leq x < r_n \leq \sup_n r_n = a$$

وهو ما يثبت أن $x \in [0,a[$.

بما أن المتتالية الحقيقية $(r_n)_n$ متزايدة فإن $[0,r_n[\subset [0,r_{n+1}[$ من أجل كل عدد طبيعي n وهو ما يعني أن متتالية المجالات $([0,r_n[)_n$ متزايدة . ومنه حسب خاصية الإستمرار المتزايد للقياس نجد

$$\mu\left([0,a[\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu\left([0,r_n[\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} r_n = a.$$

وهو المطلوب إثباته .

5) بإستخدام الأسئلة السابقة وفرضيات التمرين نجد ما يلي

$$\mu([a,b[) = \mu(a + [0,b-a[) = \mu([0,b-a[) = b - a,$$

وكذلك

$$\begin{aligned}\mu(]a,b]) &= \mu\left([a,b[\cup \{b\} \setminus \{a\}\right) \\ &= \mu\left([a,b[\right) + \mu\left(\{b\}\right) - \mu\left(\{a\}\right) \\ &= \mu\left([a,b[\right) = b - a.\end{aligned}$$

تنص نظرية كاراتيودوري على أن قياس لوبيغ هو القياس الموجب الوحيد المعرف على العشيرة البوريلية $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ الذي يحقق الخاصية $\mu\left([a,b[\right) = b - a$ من أجل كل عددين حقيقيين a, b وهو ما يثبت أن $\mu = \lambda$.

حل التمرين 13.4 :

1) إذا وضعنا $A=B=\emptyset$ نحصل على $\emptyset\in\mathcal{F}$.
نثبت الآن $\mathcal{F}$ مستقرة بالنسبة إلى المتممة .
ليكن $Z\in\mathcal{F}$ يوجد عندئذ $A,B\in\mathcal{M}$ حيث $A\subset Z\subset B$ و $\mu(B-A)=0$.
عندئذ لدينا $B^C\subset Z^C\subset A^C$ وكذلك

$$\mu\left(A^C-B^C\right)=\mu\left(B-A\right)=0,$$

وهو ما يثبت أن $Z^C\in\mathcal{F}$.
بالنسبة إلى الإسقرار نسبة إلى الإتحاد العدود، لتكن $(Z_n)_n$ متتالية من $\mathcal{F}$ عندئذ توجد متتاليتين $(A_n)_n$ و $(B_n)_n$ من العشيرة $\mathcal{M}$ حيث

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: A_n\subset Z_n\subset B_n \quad \text{و} \quad \mu\left(B_n-A_n\right)=0$$

من الإحتواءات التالية، التي يمكن إثباتها بسهولة،

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{+\infty}Z_n\subset\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n,$$

و

$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n\right)-\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)\subset\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(B_n-A_n\right)\right),$$

نستنتج أن

$$\mu\left[\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n\right)-\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)\right]\le\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(B_n-A_n)=0.$$

وهو ما يثبت أن $\bigcup_{n=1}^{+\infty}Z_n\in\mathcal{F}$. ومنه الأسرة $\mathcal{F}$ تشكل عشيرة على X .
واضح أن $\mathcal{M}\subset\mathcal{F}$ لرؤية ذلك يكفي أخذ $A,B,Z\in\mathcal{M}$ حيث $A=Z=B$.
2) أ) بما أن $A\subset B$ فإن

$$\mu(B)=\mu(A)+\mu(B-A)=\mu(A).$$

ب) واضح أن $\nu(\emptyset)=0$ وذلك بوضع $A=B=\emptyset$.
لتكن $(Z_n)_n$ متتالية منفصلة مثنى مثنى من $\mathcal{F}$ ومنه توجد متتاليتان $(A_n)_n$ و $(B_n)_n$ من العشيرة $\mathcal{M}$ بحيث

$$\forall n\in\mathbb{N}^*:\begin{cases}A_n\subset Z_n\subset B_n\\ \text{و}\\ \mu\left(B_n-A_n\right)=0\end{cases}$$

ومنه نحصل على

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{+\infty}Z_n\subset\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n.$$

إذن حسب ما سبق لدينا

$$\mu\left[\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n\right)-\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)\right]=0.$$

$(A_n)_n$ منفصلة مثنى مثنى لأن $(Z_n)_n$ كذلك . الآن بما أن μ قياس موجب فإن

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} Z_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(Z_n).$$

وهو ما يثبت أن ν قياس موجب على $(X, \mathcal{F})$.

حل التمرين 14.4 :

1) لتكن $A, B \in \mathcal{P}(X)$ حيث $A \subset B$.
إذا كان $A = \emptyset$ فإن $\mu^*(A) = 0 \leq \mu^*(B)$.
أما إذا كان $A \neq \emptyset$ فإن $B \neq \emptyset$ وبالتالي $\mu^*(A) = 1 = \mu^*(B)$.
لتكن الآن متتالية $(A_n)_n$ من أجزاء X . نميز حالتين
الحالة الأولى: إذا كانت كل الأجزاء A_n خالية، فإن

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \mu^*(\emptyset) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

الحالة الثانية: في الحالة العكسية، إذا وجد $j \in \mathbb{N}$ بحيث $A_j \neq \emptyset$ لدينا $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \neq \emptyset$ ومنه

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = 1 = \mu^*(A_j) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

وهذا يعني أن μ^* قياس خارجي على X .
2) لدينا

$$\mathcal{M}(\mu^*) = \{\emptyset, X\}.$$

3) بما أن $card(X) > 1$ ، يمكن أن نجد عنصرين $a, b \in X$ بحيث $a \neq b$. في هذه الحالة إذا وضعنا $A = \{a\}$ و $B = \{b\}$ يكون μ^* ليس جمعيا لأن

$$\mu^*(A \cup B) = 1 \neq \mu^*(A) + \mu^*(B) = 2,$$

وبالتالي μ^* ليس قياسا موجبا على $(X, \mathcal{P}(X))$.

حل التمرين 15.4 :

يكفي إثبات صحة المتراجحة (2.4) من أجل كل $A \subset X$.
بما أن $A \cap E \subset E$ فإن $\mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$ وبالتالي $\mu^*(A \cap E) = 0$.
وكذلك بما أن $A \cap E^c \subset A$ فإن $\mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$. ومنه نحصل على المتراجحة المطلوبة

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

حل التمرين 16.4 :

يكفي إثبات خاصية σ -جمعية . لتكن إذن $(A_n)_{n\geq 1}$ متتالية من $\mathcal{P}(X)$ عناصرها منفصلة مثنى مثنى .
نلاحظ أولا أن

$$\forall p \in \mathbb{N}^* : \bigcup_{n=1}^{p} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

حسب فرضية الجمعية و (ii) من التعريف 6.1.4 نحصل على

$$\sum_{n=1}^{p} \mu^*(A_n) = \mu^*(\bigcup_{n=1}^{p} A_n) \leq \mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n).$$

بعد المرور إلى النهاية، في المتراجحة السابقة، عندما $p \longrightarrow +\infty$ نجد ما يلي

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n).$$

هذه الأخيرة مع (iii) من التعريف 6.1.4 تنهي البرهان .

حل التمرين 17.4 :

1) ليكن $\varepsilon > 0$ نضع

$$B_n = (|f_n \chi_{A_n}| \geq \varepsilon).$$

عندئذ لدينا

$$\begin{aligned} B_n &= \{x \in X : |f_n(x)| \geq \varepsilon \quad \text{و} \quad x \in A_n\} \\ &= (|f_n| \geq \varepsilon) \cap A_n \subset A_n, \end{aligned}$$

ومنه

$$\mu(B_n) \leq \mu(A_n) \longrightarrow 0.$$

وهذا يستلزم أن

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(B_n) = 0.$$

يعني أن متتالية التوابع $(f_n \chi_{A_n})_n$ متقاربة بالقياس نحو التابع المعدوم 0 .

2) التقارب المنتظم يستلزم التقارب شبه المنتظم وهذا الأخير يستلزم التقارب بالقياس .
من أجل الإستلزام العكسي نفرض أن $f_n \longrightarrow f$ بالقياس، ذلك يعني أن

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(\{x \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

ومنه

$$\forall \alpha > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : card\{x \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \alpha.$$

نختار الآن $\alpha = \frac{1}{2}$ لنحصل على $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث من أجل كل $n \geq n_0$ لدينا

$$card\{x \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

وذلك يعني أن

$$\{x \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = \emptyset$$

من أجل كل $n \geq n_0$.
ومنه نحصل على ما يلي

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

وهذا يستلزم أن

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{N}} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0,$$

يعني أن متتالية التوابع $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام نحو التابع f على $\mathbb{N}$.

حل التمرين 18.4 :

1) φ مستمر بإنتظام على $\mathbb{R}$ يعني أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث من أجل كل $x, y \in \mathbb{R}$ لدينا

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

وعليه العكس النقيض للإستلزام السابق محقق أي من أجل كل $x, y \in \mathbb{R}$ لدينا

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \geq \varepsilon \Longrightarrow |x - y| \geq \delta.$$

ومنه نستطيع كتابة ما يلي

$$\forall n \in \mathbb{N} : \{|\varphi \circ f_n - \varphi \circ f| \geq \varepsilon\} \subset \{|f_n - f| \geq \delta\}.$$

من رتابة القياس الموجب نجد

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mu \{|\varphi \circ f_n - \varphi \circ f| \geq \varepsilon\} \leq \mu \{|f_n - f| \geq \delta\} \longrightarrow 0.$$

وهذا يعني أن

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu \{|\varphi \circ f_n - \varphi \circ f| \geq \varepsilon\} = 0,$$

إذن $\varphi \circ f_n \longrightarrow \varphi \circ f$ بالقياس .
2) نضع $A = (f \neq g)$ إذن حسب المعطيات لدينا $\mu(A) = 0$. ليكن الآن $\varepsilon > 0$ عندئذ نستطيع كتابة ما يلي

$$\begin{aligned} \{|f_n - g| \geq \varepsilon\} &= \{|f_n - g| \geq \varepsilon\} \cap \left(A \cup A^C\right) \\ &= [\{|f_n - g| \geq \varepsilon\} \cap A] \cup \left[\{|f_n - g| \geq \varepsilon\} \cap A^C\right] \end{aligned}$$

بما أن

$$\mu(A) = 0 \text{ و } \{|f_n - g| \geq \varepsilon\} \cap A \subset A$$

فإن

$$\mu(\{|f_n - g| \geq \varepsilon\} \cap A) = 0$$

وهذا يستلزم أن

$$\mu\left(\{|f_n-g|\geq\varepsilon\}\right)=\mu\left(\{|f_n-g|\geq\varepsilon\}\cap A^C\right). \tag{3.4}$$

من جهة ثانية بما أن $g = f$ على A^C فإن

$$\{|f_n-g|\geq\varepsilon\}\cap A^C=\{|f_n-f|\geq\varepsilon\}\cap A^C\subset\{|f_n-f|\geq\varepsilon\}.$$

بالرجوع إلى (3.4) وإستخدام الإحتواء السابق نحصل على

$$\begin{aligned}\mu\left(\{|f_n-g|\geq\varepsilon\}\right)&=\mu\left(\{|f_n-f|\geq\varepsilon\}\cap A^C\right)\\&\leq\mu\left(\{|f_n-f|\geq\varepsilon\}\right)\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

ومنه

$$\forall\varepsilon>0:\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mu\left(\{|f_n-g|\geq\varepsilon\}\right)=0,$$

وهذا يعني أن $f_n \longrightarrow g$ بالقياس .

الفصل الخامس

تكامل لوبيغ

عناوين الفصل :

1.5 تذكير نظري للدروس

في كل ما يلي الثنائية $(X, \mathcal{M})$ تعبر عن فضاء قياس معطى .

1.1.5 تكامل التوابع الموجبة القيوسة

نرمز بالرمز $\mathcal{E}_+$ لمجموعة التوابع الدرجية الموجبة القيوسة المعرفة من $(X, \mathcal{M})$ نحو $\mathbb{R}_+$ مزودا بعشيرته البوريلية
نرمز بالرمز $\mathcal{L}_+^0$ لمجموعة التوابع الموجبة القيوسة المعرفة من $(X, \mathcal{M})$ نحو $\mathbb{R}_+$ مزودا بعشيرته البوريلية

تعريف 1.1.5.
ليكن $f \in \mathcal{E}_+$ حيث $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i}.$ عندئذ نضع

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i.\mu(A_i) \in [0, +\infty]$$

ملاحظة 1.1.5.
من أجل كل $A \in \mathcal{M}$ لدينا $\mu(A) = \int \chi_A d\mu$.

تعريف 2.1.5.
ليكن $f \in \mathcal{L}_+^0$. تكامل f على X بالنسبة إلى القياس μ معرف كما يلي

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu : s \in \mathcal{E}_+, \ \ s \leq f \right\} \in [0, +\infty] \, .$$

من أجل $A \in \mathcal{M}$ نضع

$$\int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu.$$

قضية 1.1.5.
ليكن $f, g \in \mathcal{L}_+^0,$ إذا كان $f \leq g$ فإن $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

نظرية 1.1.5. (نظرية التقارب الرتيب لـ: بيبوليفي)

لتكن $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة لتوابع موجبة قيوسة . وليكن التابع f حيث

$$f = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n = \sup_{n\geq 1} f_n.$$

عندئذ لدينا

$$\int f d\mu = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \sup_{n\geq 1} \int f_n d\mu.$$

نتيجة 5.1.1.
إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة لتوابع من $\mathcal{L}_+^0$ بحيث $\int f_1 d\mu < \infty$ عندئذ لدينا

$$\int f d\mu = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu,$$

مع $f = \lim_{n\longrightarrow +\infty} f_n$.

نتيجة 5.1.2.

من أجل كل $f, g \in \mathcal{L}_+^0$ وكل $\alpha \in [0, +\infty[$ لدينا

$$\int (\alpha f + g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \int g d\mu$$

.

نتيجة 5.1.3.
لتكن $(f_k)_{k\geq 1}$ متتالية لتوابع قيوسة موجبة معرفة من X نحو $\mathbb{R}$.
عندئذ التابع $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ كذلك قيوس ولدينا ما يلي

$$\int \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k\right) d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int f_k d\mu\right) \in [0, +\infty] .$$

نتيجة 5.1.4. (توطئة فاتو Fatou)
إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية لتوابع موجبة قيوسة فإن

$$\liminf_{n\longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu \geq \int \liminf_{n\longrightarrow +\infty} f_n d\mu.$$

نتيجة 5.1.5.
إذا كان $f \in \mathcal{L}_+^0$ و $A \in \mathcal{M}$ بحيث $\mu(A) = 0$ فإن $\int_A f d\mu = 0$.

قضية 5.1.2. (بعض خواص تكامل لوبيغ)
ليكن $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ تابع موجب قيوس .
1) متراجحة Tchebychev
من أجل كل $a > 0$ لدينا

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int f d\mu.$$

2) $\int f d\mu = 0$ إذا وفقط إذا كان $f = 0$ شبه كليا على X .

3) إذا كان $\int f d\mu < \infty$ فإن $f < \infty$ شبه كليا على X .

4) إذا كان $f, g \in \mathcal{L}^0_+$ بحيث $f = g$ شبه كليا على X فإن $\int f d\mu = \int g d\mu$.

إنطلاقا من قياس موجب μ وتابع موجب قيوس f يمكن تعريف قياس موجب آخر بالطريقة التالية

نظرية 2،1،5.
من أجل فضاء القياس $(X, \mathcal{M}, \mu)$ والتابع الموجب القيوس $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ نعتبر التابع المجموعاتي $\nu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ المعرف بأن

$$\nu(A) := \int_A f d\mu, \;\; A \in \mathcal{M}$$

عندئذ، ν قياس موجب على $(X, \mathcal{M})$.

2.1.5 تكامل التوابع القيوسة من إشارة كيفية

ليكن $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعا قيوسا، نكتب إختصارا $f \in \mathcal{L}^0$ ، وليكن f_+ و f_- الجزئين الموجب والسالب للتابع f المعرفين كما يلي

$$f_+ = \sup\{f, 0\} \text{ و } f_- = \sup\{-f, 0\}.$$

بما أن هذه التوابع تحقق

$$f = f_+ - f_- \text{ و } |f| = f_+ + f_-,$$

فإن التابع f قيوس إذا وفقط إذا كانت التوابع f_+ و f_- قيوسة .

تعريف 3،1،5.
نقول أن التابع f أنه قابل للمكاملة، أو كمول، نسبة إلى القياس μ إذا حقق ما يلي

$$\int |f| \, d\mu < \infty.$$

في هذه الحالة نكتب

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu.$$

مجموعة التوابع $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ الكمولة نسبة إلى القياس μ يشار إليها بالرمز $\mathcal{L}^1(\mu)$.

ملاحظة 2،1،5.
واضح أن التعريف السابق له معنى وذلك لأنه إذا فرضنا أن $\int |f| \, d\mu < \infty,$ فإنه من صحة المتراجحتين

$$f_+ \leq |f| \text{ و } f_- \leq |f|$$

نستنتج أن
$$\int f_+ d\mu < \infty \text{ و } \int f_- d\mu < \infty$$

قضية 3.1.5.
ليكن $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ تابع حقيقي كمول .
عندئذ المجموعة التالية
$$A = \{x \in X : |f(x)| = +\infty\}$$
مهملة نسبة إلى القياس μ . بعبارة أخرى، كل تابع كمول
$$f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}.$$
ينطبق شبه كليا على تابع كمول
$$\tilde{f} : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

نظرية 3.1.5.
ليكن $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. عندئذ $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ولدينا
$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

قضية 4.1.5. (بعض الخواص)
من أجل كل تابع كمول $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, نضع
$$\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu.$$
عندئذ لدينا الخواص التالية
1) إذا كان $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ بحيث $\|f\|_1 = 0$ فإن $f = 0$ شبه كليا .
2) إذا كان $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ فإن $f + g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ و $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}$. كذلك التطبيق التالي $f \longmapsto \int f d\mu$ هو شكل خطي على الفضاء الشعاعي $\mathcal{L}^1(\mu)$ ولدينا
$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \text{ و } \|\alpha f\|_1 = |\alpha| \, \|f\|_1 .$$
3) إذا كان $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ و $f \leq g,$ فإن $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.
4) إذا كان $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ و $f = g$ شبه كليا . فإن $\int f d\mu = \int g d\mu$.

3.1.5 الفضاء $L^1(\mu)$.

$\mathcal{R}$ هي علاقة التكافؤ المعرفة على الفضاء $\mathcal{L}^1(\mu)$ بأن

$f\mathcal{R}g$ إذا وفقط إذا كان $f=g$ شبه كليا

فيما يلي $L^1(\mu)$ هي مجموعة حاصل القسمة للفضاء $\mathcal{L}^1(\mu)$ على علاقة التكافؤ $\mathcal{R}$.
صف تكافؤ العنصر f من $\mathcal{L}^1(\mu)$ سوف يرمز له بالرمز $\dot{f}$ فتكون $L^1(\mu)$ هي المجموعة

$$L^1(\mu)=\mathcal{L}^1(\mu)\backslash\mathcal{R}=\left\{\dot{f}: f\in\mathcal{L}^1(\mu)\right\}.$$

نستطيع التحقق بسهولة أن $L^1(\mu)$ هو فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ مزود بالعمليات الإعتيادية على صفوف التكافؤ.
نلاحظ أنه إذا كان $f,g\in\mathcal{L}^1(\mu)$ بحيث $\dot{f}=\dot{g}$ فإن $\int f d\mu=\int g d\mu$. إذن يمكن تعريف تكامل الصف $\dot{f}\in L^1(\mu)$ كما يلي

$$\int \dot{f} d\mu=\int f d\mu \quad \text{و} \quad \left\|\dot{f}\right\|_1=\int |f|\, d\mu.$$

قضية 5.1.5.
ليكن $(X,\mathcal{M},\mu)$ فضاء قياس . لدينا ما يلي
(i) التطبيق $\dot{f}\longmapsto\|f\|_1$ يعرف نظيما على الفضاء الشعاعي $L^1(\mu)$.
(ii) التطبيق $\Psi:\dot{f}\longmapsto\int f d\mu$ يعرف شكلا خطيا مستمرا على الفضاء الشعاعي $L^1(\mu)$ ذو نظيم أصغر أويساوي 1 .

ملاحظة 3.1.5.
من الناحية العملية، إذا لم يكن هناك إلتباس، نرمز بنفس الحرف f للتابع $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$ وصف تكافؤه $\dot{f}\in L^1(\mu)$. الفائدة من هذا الترميز هو كون عناصر الفضاء $\mathcal{L}^1(\mu)$ هي توابع (ليست صفوف تكافؤ) بينما الفائدة من الترميز $L^1(\mu)$ هو كون هذا الأخير فضاءً شعاعيا نظيميا .

نظرية 4.1.5. (نظرية التقارب بالهيمنة)
ليكن فضاء القياس $(X,\mathcal{M},\mu)$ ولتكن $(f_n)_n$ متتالية توابع حقيقية قيوسة معرفة من X نحو $\mathbb{R}$.
لنفرض أن
1) $f_n\longrightarrow f$ شبه كليا
2) يوجد تابع كمول $g:X\longrightarrow[0,+\infty[$ يهيمن شبه كليا على كل التوابع f_n أي أن

$$|f_n|\leq g \quad \text{شبه كليا}$$

عندئذ f قابل للمكاملة ولدينا $\|f_n-f\|_1\longrightarrow 0$ عندما $n\longrightarrow+\infty$
ونكتب كذلك

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int f_n d\mu=\int\lim_{n\longrightarrow+\infty}f_n d\mu=\int f d\mu$$

نتيجة 6.1.5.
ليكن فضاء القياس $(X,\mathcal{M},\mu)$ ولتكن $(\varphi_n)_n$ متتالية توابع حقيقية قيوسة معرفة من X نحو $\mathbb{R}$.

لنفرض أن السلسلة $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k$ متقاربة شبه كليا وأن التوابع $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k\right|$ محدودة من الأعلى بتابع حقيقي كمول غير مرتبط بالعدد الطبيعي n .
عندئذ التابع φ حيث $\varphi=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k$ كمول ولدينا

$$\int\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\right)d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int\varphi_k d\mu.$$

4.1.5 المقارنة بين تكاملي لوبيغ وريمان

قضية 6.1.5.
الشروط التالية متكافئة من أجل أي تابع $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$
(i) f قابل للمكاملة حسب ريمان على المجال $[a,b]$.
(ii) f محدود على $[a,b]$ والمجموعة التي يكون فيها f غير مستمر، مهملة بالنسبة إلى قياس لوبيغ λ .

نظرية 5.1.5.
ليكن $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا محدودا على المجال $[a,b]$. إذا كان f قابل للمكاملة حسب ريمان على $[a,b]$ فإنه قابل للمكاملة حسب لوبيغ على نفس المجال ولدينا

$$\int_{[a,b]}f d\lambda=\int_a^b f(x)dx$$

.

التكاملات الموسعة أو المعممة
ليكن $I=(\alpha,\beta)$ مجالا غير متراص من $\mathbb{R}$ (أي I غير محدود أو I محدود لكنه غير مغلق) .
ليكن $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع قابل للمكاملة حسب ريمان على كل مجال متراص $[a,b]$ محتوى في I .

تعريف 4.1.5.
إذا كانت النهاية التالية موجودة

$$\lim_{a\overset{>}{\longrightarrow}\alpha,b\overset{<}{\longrightarrow}\beta}\int_a^b f(x)dx$$

نقول أن التكامل $\int_I f(x)dx$ متقارب . ونضع عندئذ

$$\int_I f(x)dx=\lim_{a\overset{>}{\longrightarrow}\alpha,b\overset{<}{\longrightarrow}\beta}\int_a^b f(x)dx$$

في الحالة العكسية نقول أن التكامل $\int_I f(x)dx$ متباعد .
إذا كان التكامل التالي $\int_I|f(x)|\,dx$ متقاربا، نقول أن التكامل $\int_I f(x)dx$ متقارب مطلقا.

النظرية التالية تبرز العلاقة بين التقارب المطلق للتكامل $\int_I f(x)dx$ وقابلية المكاملة حسب لوبيغ للتابع f على المجال I .

نظرية 6.1.5.
ليكن I مجالا غير متراص من $\mathbb{R}$. وليكن $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع قابل للمكاملة حسب ريمان على كل مجال متراص $[a, b]$ محتوى في I . عندئذ الشروط التالية متكافئة
(i) f قابل للمكاملة حسب لوبيغ على المجال I .
(ii) التكامل التالي متقارب $\int_I |f(x)|\, dx$.
في حالة تحقق أحد الشرطين السابقين، نكتب

$$\int_I f d\lambda = \int_I f(x)dx.$$

5.1.5 الإستمرارية وقابلية الإشتقاق للتوابع المعرفة بتكامل لوبيغ

ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس وليكن f تابع معرف من $X \times \mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$. في كل ما يلي نشير بالرمزين f_t, f_x إلى التوابع الجزئية

$$x \longmapsto f_t(x) = f(x, t) \text{ et } t \longmapsto f_x(t) = f(x, t).$$

ولنفرض أن التابع f_t قابل للمكاملة حسب لوبيغ من أجل كل $t \in \mathbb{R}$ أي أن

$$f_t \in L^1(\mu), \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

عندئذ نعرف التابع $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ بأن

$$F(t) = \int f_t(x)d\mu(x) = \int f(x, t)d\mu(x) \tag{2.5}$$

فيما يلي ندرس إستمرارية وإشتقاقية التابع F .

نظرية 7.1.5. (نظرية الإستمرار)
ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس وليكن $t_0 \in \mathbb{R}$.
$f : X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع يحقق الفرضية (1.5) . نفرض زيادة على ذلك ما يلي
(i) التابع $f_x : t \longmapsto f_x(t)$ مستمر عند النقطة $t_0 \in \mathbb{R}$ من أجل $x \in X$ شبه كليا .
(ii) يوجد $\varepsilon > 0$ وتابع $g \in L^1(\mu)$ بحيث

$$|f(x, t)| \leq g(x), \ \forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[.$$

عندئذ التابع $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرف بـ (2.5) مستمر عند النقطة t_0 .

نظرية 8.1.5. (نظرية الإشتقاق)
ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس وليكن $t_0 \in \mathbb{R}$.
$f : X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع يحقق الفرضية (1.5) .
نفرض زيادة على ذلك أنه يوجد $\varepsilon > 0$ و $g \in L^1(\mu)$ بحيث
(i) التطبيق $t \mapsto f(x,t)$ قابل للإشتقاق عند كل نقطة $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ شبه كليا على X
(ii) من أجل كل $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ المتراجحة التالية محققة شبه كليا على X

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \leq g(x).$$

عندئذ التابع $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرف بـ (2.5) قابل للإشتقاق عند النقطة t_0 بالإظافة إلى ذلك لدينا

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x).$$

2.5 تمارين الفصل الخامس

في كل ما يلي نعتبر الحقل $\mathbb{R}$ مزود بعشيرته البوريلية $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ وقياس لوبيغ λ .

تمرين 1.5.

1) في فضاء القياس $(X, \mathcal{M}, \mu)$ نعتبر متتالية الأجزاء القيوسة المتزايدة $(A_n) \subset \mathcal{M}$ حيث $X = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

برهن أنه من أجل كل تابع عددي موجب قيوس f يكون

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{A_n} f d\mu = \int f d\mu.$$

2) تطبيق: نضع $X = [0, +\infty[$ ، $\mathcal{M} = \mathcal{B}([0, +\infty[)$ ، $\mu = \lambda$ و $A_n = [0, n[$

أحسب التكاملين

$$I = \int_{[0,+\infty[} e^{-E(x)} d\lambda$$

$$J = \int_{[0,+\infty[} \frac{1}{E(x)!} d\lambda$$

تمرين 2.5.

في فضاء القياس $(X, \mathcal{M}, \mu)$ نعتبر متتالية التوابع القيوسة الموجبة $(f_n)_n$ والتابع f الموجب الذي تكامله منته ويحقق

- $f \leq \liminf_{n \to +\infty} f_n$
- $\limsup_{n \to +\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$

برهن أن

$$\lim_{n \to +\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

تمرين 3.5. (متراجحة فاتو التامة)

λ هو قياس لوبيغ على $X = [-1, 1]$. g هو التابع المعرف بأن $g = \chi_{[0,1]}$ و (f_n) متتالية التوابع المعرفة بأن

$$f_n(x) = \begin{cases} g(x), & \text{إذا كان } n \text{ زوجيا} \\ g(-x), & \text{إذا كان } n \text{ فرديا} \end{cases}$$

برهن أن $\liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n = \chi_{\{0\}}$ وأن

$$\int \left(\liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n \right) d\lambda < \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n d\lambda.$$

تمرين 4.5.
p, q عددين حقيقيين موجبين تماما و $(f_n)_n$ متتالية توابع عددية معرفة على المجال $I =]0,1[$ بأن

$$f_n(x) = (1 - x^q)\, x^{p-1} \sum_{j=1}^{n} \left(x^{2q}\right)^j .$$

1) برهن أن

$$\forall x \in I : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{x^{p-1}}{1 + x^q}.$$

2) برهن أن

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1 + x^q} dx = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p + 2jq} - \frac{1}{p + (2j+1)q} \right)$$

تمرين 5.5. مبررا جميع الخطوات وبإستخدام نظرية التقارب الرتيب أحسب النهاية التالية

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n} \right)^{-1} dx$$

حيث α عدد حقيقي غير معدوم .

تمرين 6.5. بإستخدام متراجحة فاتو، مبررا جميع الخطوات أحسب النهاية التالية

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n \left(\ln \left(1 + \frac{f(x)}{n} \right) \right)^\alpha dx$$

حيث $\alpha \in]0,1[$ و $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ تابع مستمر و غير معدوم على كل $\mathbb{R}$.

تمرين 7.5.
ليكن $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعا قيوسا .
نفرض أنه يوجد جزء قيوس $A \in \mathcal{M}$ يحقق
(i) $\mu(A) < \infty$ و $f(x) = 0$ من أجل كل $x \notin A$.
(ii) يوجد عدد حقيقي موجب تماما $C > 0$ حيث $|f(x)| \leq C$ من أجل كل $x \in A$.
برهن عندئذ أن $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

تمرين 8.5.
ليكن $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعا محدودا ومستمر على $\mathbb{R}$. أحسب النهاية التالية، طبعا بعد إثبات وجودها

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x) dx.$$

تمرين 9.5.
(f_n) متتالية توابع حقيقية معرفة بأن $f_n(x) = ne^{-n|x|}$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$.
تحقق أن $f_n \longrightarrow 0$ شبه كليا .
هل المساواة التالية محققة

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int f_n d\lambda = \int \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\lambda.$$

تمرين 10.5.
مبررا جميع الخطوات أحسب النهاية التالية

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1-(\cos x)^n}{1+x^2}dx.$$

تمرين 11.5.
مبررا جميع الخطوات أحسب النهاية التالية

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}dx, \quad x\in\,]0,+\infty[\,.$$

تمرين 12.5.
أحسب ما يلي

$$I = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1\frac{n\sin(\frac{x}{n})}{1+x^2}dx$$

$$J = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1\frac{\sin x}{x^2}\frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}dx$$

تمرين 13.5.
ليكن $(X,\mathcal{M},\mu)$ فضاء قياس وليكن $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع قابل للمكاملة
1) برهن أن

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{\left(\frac{1}{n}\leq|f|<n\right)}|f|\,d\mu = \int|f|\,d\mu.$$

2) إستنتج أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد جزء قيوس $A\in\mathcal{M}$ بحيث

$$\int_{A^c}|f|\,d\mu\leq\varepsilon \text{ ، } \sup_{x\in A}|f(x)|<\infty \text{ و } \mu(A)<+\infty$$

تمرين 14.5.

ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس ونعتبر التوابع القيوسة $(f_n)_n$ و f المعرفة من $(X, \mathcal{M})$ نحو $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
نقول عن متتالية التوابع $(f_n)_n$ أنها متقاربة في الفضاء $\mathcal{L}^1(\mu)$ نحو التابع f إذا تحقق ما يلي

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

1) أثبت أنه إذا كانت $(f_n)_n$ متقاربة نحو f في $\mathcal{L}^1(\mu)$ فإنها متقاربة بالقياس نحو التابع f .
2) نعتبر الآن $X = [0, 1]$ مزود بعشيرته البوريلية $\mathcal{M} = \mathcal{B}([0, 1])$ وقياس لوبيغ λ ومتتالية التوابع $(f_n)_n$ المعرفة من $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1])$ نحو $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ بالشكل $f_n = n\chi_{[0, \frac{1}{n}]}$.

- برهن أن $(f_n)_n$ متقاربة بالقياس نحو 0 .
- من كل أجل عدد طبيعي $n \geq 1$ أحسب التكامل $\int f_n d\lambda$.

تمرين 15.5.

ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس ولتكن $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ متتالية توابع حقيقية موجبة متقاربة ببساطة نحو تابع f .
نفرض أنه يوجد عدد حقيقي ثابت يحقق

$$\forall n \in \mathbb{N} : \int f_n d\mu \leq K.$$

برهن أن

$$\int f d\mu \leq K.$$

تمرين 16.5.

ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس و h تابع عددي قابل للمكاملة على X .
برهن أن

$$\lim_{r \longrightarrow +\infty} \int_{(|h|>r)} |h| \, d\mu = 0.$$

إرشاد: إستخدم متتالية التوابع العددية $(h_n)_n$ المعرفة بأن

$$h_n = h.\chi_{(|h|>r_n)},$$

حيث $(r_n)_n$ متتالية أعداد حقيقية متزايدة تؤول إلى $+\infty$ وكذلك $(|h| > r_n)$ هي المجموعة المعرفة بأن

$$(|h| > r_n) = \{x \in X : |h(x)| > r_n\}.$$

تمرين 17.5.
لتكن التوابع F ، G و H ذات المتغير $t \geq 0$ المعرفة على $[0,+\infty[$ بأن

$$F(t)=\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}dx, \quad G(t)=\left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2, \quad H(t)=F(t)+G(t).$$

1) برهن أن F ينتمي إلى الصف C^1 على المجال $[0,+\infty[$ وأحسب F' .
2) قل لماذا ينتمي التابع G إلى الصف C^1 على المجال $[0,+\infty[$ ثم برهن أن

$$\forall t \geq 0 : H'(t)=0.$$

3) أ) حدد قيمة $H(0)$ ثم أحسب النهايتين

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} F(t) \quad \text{و} \quad \lim_{t\longrightarrow+\infty} G(t)$$

ب) استنتج قيمة التكامل

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

تمرين 18.5.
F هو التابع الحقيقي المعرف على $\mathbb{R}$ بأن

$$F(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)}dx.$$

1) برهن أن F قابل للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم أكتب عبارة F' بدون رمز التكامل $\int$.
2) إستنتج عبارة $F(t)$.
3) نضع

$$I=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan(x)}{x}\right)^2 dx.$$

برهن أن

$$F(1)=\frac{1}{2}I,$$

ثم استنتج قيمة التكامل I .

3.5 حلول تمارين الفصل الخامس

حل التمرين 1.5 :

1) نطبق نظرية التقارب الرتيب .

بما أن $\int_{A_n} f d\mu = \int f\chi_{A_n} d\mu$ فنضع $f_n = f\chi_{A_n}$.

$(f_n)_n$ هي متتالية لتوابع قيوسة موجبة لأن f قيوس وكذلك $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{M}$.

من جهة ثانية، بما أن

$$\forall n \in \mathbb{N} : A_n \subset A_{n+1}$$

فإن

$$\forall n \in \mathbb{N} : \chi_{A_n} \leq \chi_{A_{n+1}}$$

وحيث f موجب، إذن نستنتج أن المتتالية $(f_n)_n$ متزايدة .

بالنسبة للنهاية البسيطة للمتتالية $(f_n)_n$ لدينا ما يلي

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f\chi_{\lim A_n} = f\chi_{\cup A_n} = f\chi_X = f.$$

إذن حسب نظرية التقارب الرتيب لدينا

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{A_n} f d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

2) نضع $f(x) = e^{-E(x)}$ وهو تابع موجب قيوس لأنه متناقص من كون تابع الجزء الصحيح $x \longmapsto E(x)$ متزايد .

$([0, n[)_{n\geq1}$ هي متتالية مجالات متزايدة و

$$[0, +\infty[= \bigcup_{n=1}^{+\infty} [0, n[.$$

إذن حسب السؤال السابق لدينا

$$I = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{[0,n[} e^{-E(x)} d\lambda.$$

ومن جهة ثانية بما أن

$$\forall x \in [k, k+1[: E(x) = k,$$

فإن

$$\begin{aligned}\int_{[0,n[} e^{-E(x)} d\lambda &= \int_{\bigcup_{k=0}^{n-1} [k,k+1[} e^{-E(x)} d\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[k,k+1[} e^{-k} d\lambda \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k} \lambda\left([k, k+1[\right) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k}.\end{aligned}$$

ومنه أخيرا

$$\int e^{-E(x)} d\lambda = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k} = \frac{e}{e-1}.$$

بالنسبة للتكامل J لدينا

$$J = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{[0,n[} \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x)$$

ومن جهة ثانية لدينا

$$\begin{aligned}\int_{[0,n[} \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) &= \int_{\underset{k=0}{\overset{n-1}{\cup}}[k,k+1[} \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[k,k+1[} \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[k,k+1[} \frac{1}{k!} d\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \lambda\left([k,k+1[\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}.\end{aligned}$$

إذن

$$\int \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

حل التمرين 2.5 :

من المتراجحة $f \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \inf f_n$ وباستخدام رتابة تكامل لوبيغ نحصل على

$$\int f d\mu \leq \int (\lim_{n \longrightarrow +\infty} \inf f_n) d\mu,$$

ومنه حسب توطئة فاتو لدينا

$$\int f d\mu \leq \int (\lim_{n \longrightarrow +\infty} \inf f_n) d\mu \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \inf \int f_n d\mu,$$

بدمج المتراجحات الأخيرة مع المتراجحة الثانية المعطاة في نص التمرين مع الأخذ بعين الإعتبار أن

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \inf f_n \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sup f_n,$$

نجد ما يلي

$$\int f d\mu \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \inf \int f_n d\mu \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

وهو ما يثبت أن

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \inf \int f_n d\mu = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sup \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

أي أن المتتالية $\left(\int f_n d\mu\right)_n$ متقاربة نحو $\int f d\mu$.

حل التمرين 3.5 :

أولا من تعريف $(f_n)_n$ نلاحظ أن

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_{n+2} = f_n.$$

بالإعتماد على التمثيل البياني لكل من التابعين f_n, f_{n+1} في معلم واحد، نحصل على ما يلي

$$\inf_{k \geq n} f_k = \inf \{f_n, f_{n+1}\} = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \text{ إذا كان } \\ 1, & x = 0 \text{ إذا كان } \end{cases} = \chi_{\{0\}}.$$

ومنه $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\inf f_n = \chi_{\{0\}}$ أي نحصل على

$$\int(\lim_{n\longrightarrow+\infty}\inf f_n)d\lambda = \int \chi_{\{0\}}d\lambda = \lambda(\{0\}) = 0.$$

ومن جهة ثانية لدينا

$$\begin{aligned} n \text{ زوجي} &\Longrightarrow \quad f_n = \chi_{[0,1]} \quad \Longrightarrow \int f_n d\lambda = 1 \\ n \text{ فردي} &\Longrightarrow f_{n+1} = \chi_{[-1,0]} \Longrightarrow \int f_n d\lambda = 1, \end{aligned}$$

وهو ما يثبت أن

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\inf \int f_n d\lambda = 1.$$

وأخيرا نستنتج أن

$$0 = \int(\lim_{n\longrightarrow+\infty}\inf f_n)d\lambda < \lim_{n\longrightarrow+\infty}\inf \int f_n d\lambda = 1.$$

حل التمرين 4.5 :

1) بما أن $0 < x < 1$ فإن $0 < x^{2q} < 1$ ، وبالتالي نحصل على

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) &= (1-x^q)\,x^{p-1}\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{j=0}^{n}\left(x^{2q}\right)^j \\ &= (1-x^q)\,x^{p-1}\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1-\left(x^{2q}\right)^{n+1}}{1-x^{2q}} \\ &= \frac{(1-x^q)\,x^{p-1}}{1-x^{2q}} \\ &= \frac{x^{p-1}}{1+x^q}. \end{aligned}$$

2) المتتالية $(f_n)_n$ متزايدة لأن

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in I : f_{n+1}(x) - f_n(x) = (1-x^q)x^{p-1}x^{2q(n+1)} \geq 0.$$

التوابع $f_n(x) \longmapsto x$ موجبة، قابلة للقياس لأنها مستمرة على I . ومنه حسب نظرية التقارب الرتيب لدينا

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\right)dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx$$

وحيث أن

$$\forall x\in I : f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} x^{2qj+p-1} - \sum_{j=0}^{n} x^{2qj+q+p-1},$$

نحصل على

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{p+2qj} - \frac{1}{p+q(2j+1)}\right),$$

ومنه النتيجة

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{p+2qj} - \frac{1}{p+q(2j+1)}\right) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx.$$

حل التمرين 5.5 :

نضع

$$f_n(x) = \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1}$$

نلاحظ أن التوابع f_n غير معرفة عند النقطة $x=0$ من أجل $\alpha<0$. لكن بملاحظة أن

$$\alpha<0 \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^{-\alpha}}{1+\frac{x^{-\alpha}e^x}{n}} = 0$$

فيمكن أن نمدد التوابع f_n بالإستمرار لتكون معرفة ومستمرة على $[0,1]$ وذلك بوضع $f_n(0)=0$.
ومنه هذه التوابع قابلة للمكاملة حسب ريمان (وبالتالي حسب لوبيغ) على المجال $[0,1]$.
ومن جهة أخرى بما أن $\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n}$ فإن

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0,1] : 0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x)$$

وهذا يعني أن المتتالية $(f_n)_n$ متزايدة .
ندرس تقارب المتتالية $(f_n)_n$ ، من أجل كل $x\in]0,1]$ وكل $\alpha\in\mathbb{R}^*$ لدينا

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = x^{-\alpha} = h_\alpha(x)$$

ذلك يعني أن

$$\lambda\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n \neq h_\alpha\right) = \lambda\left(\{0\}\right) = 0$$

أي $(f_n)_n$ متقاربة شبه كليا نحو التابع h_α .
الآن نظرية التقارب الرتيب لبيبوليفي (Beppo-Levi) تضمن الآتي

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{[0,1]} f_n d\lambda = \int_{[0,1]} \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\lambda$$
$$= \int_0^1 h_\alpha(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha<1, \alpha\neq 0 \\ +\infty, & \alpha\geq 1. \end{cases}$$

حل التمرين 6.5 :

نسمي $(f_n)_n$ متتالية التوابع المعرفة من $\mathbb{R}$ نحو $[0,+\infty[$ بأن

$$f_n(x) = n\left(\ln\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)\right)^\alpha.$$

هذه التوابع قيوسة على $\mathbb{R}$ لأنها مستمرة وهي كذلك موجبة لأن التابع f موجب . من جهة ثانية لدينا

$$\forall x\in\mathbb{R} : \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{f(x)}{n} = 0.$$

إذن عندما $n \longrightarrow +\infty$ لدينا ما يلي

$$f_n(x) \overset{+\infty}{\backsim} n^{1-\alpha} f(x)^\alpha,$$

ومنه

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(n^{1-\alpha} f(x)^\alpha\right) = +\infty.$$

بتطبيق متراجحة فاتو على متتالية التوابع $(f_n)_n$ نحصل على

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n \left(\ln\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)\right)^\alpha dx &\geq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx \\ &\geq \int_{-\infty}^{+\infty} \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)dx = +\infty\end{aligned}$$

إذن النهاية المطلوبة تساوي $+\infty$.

حل التمرين 7.5 :

من (i) و (ii) نستنتج أن

$$|f| \leq C\chi_A.$$

ومنه

$$\int |f|\, d\mu \leq \int C\chi_A d\mu = C\mu(A) < \infty.$$

بالإضافة إلى ذلك بما أن التابع f قيوس، نستنتج أن $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

حل التمرين 8.5 :

التوابع $x \longmapsto f_n(x) = e^{-nx} f(x)$ قيوسة على $[0, +\infty[$ لأنها مستمرة .

بما أن التابع f محدود فإنه يوجد عدد حقيقي $M > 0$ حيث

$$\left|e^{-nx} f(x)\right| \leq M.e^{-nx},\ \forall x \in [0, +\infty[,\ \forall n \geq 1.$$

بما أن $\int_0^{+\infty} e^{-nx} < \infty$ فإن $\int_0^{+\infty} \left|e^{-nx} f(x)dx\right| < \infty$ ومنه النهاية المطلوبة موجودة .
حسب النظرية 6.1.5 لدينا ما يلي

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x)dx = \int_{[0,+\infty[} f_n d\lambda$$

كذلك المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة نحو $f = 0$.
ومن جهة ثانية من أجل كل $x \in [0, +\infty[$ وكل $n \geq 1$ لدينا

$$\left|e^{-nx} f(x)\right| \leq M.e^{-x} = g(x),$$

و لدينا

$$\int_{[0,+\infty[} g d\lambda = \int_0^{+\infty} g(x)dx < \infty.$$

عندئذ بإستخدام نظرية التقارب بالهيمنة نجد

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-nx}f(x)dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{[0,+\infty[} f_n d\lambda = \int_{[0,+\infty[} f d\lambda = 0$$

حل التمرين 9.5 :

من أجل كل $x \neq 0$ لدينا ما يلي

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{|x|}\frac{n\,|x|}{e^{n|x|}} = 0$$

ومنه

$$\lambda\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n \neq 0\right) = \lambda\left(\{0\}\right) = 0$$

وهو ما يثبت أن $f_n \longrightarrow 0$ شبه كليا .
من جهة أولى لدينا

$$\int \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\lambda = \int 0 d\lambda = 0$$

ومن جهة ثانية التوابع f_n قابلة للمكاملة حسب ريمان على $\mathbb{R}$ لأن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ne^{-n|x|}dx = 2\int_0^{+\infty} ne^{-nx}dx = 2 < \infty$$

إذن هي قابلة للمكاملة حسب لوبيغ ولدينا

$$\int f_n d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 2$$

أخيرا

$$\int (\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n) d\lambda \neq \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int f_n d\lambda.$$

حل التمرين 10.5 :

نسمي $(f_n)_n$ متتالية التوابع المعرفة على $[0,+\infty[$ بأن

$$f_n(x) = \frac{1-\cos^n(x)}{1+x^2}$$

التوابع f_n قيوسة على $[0,+\infty[$ لأنها مستمرة . وقابلة للمكاملة حسب ريمان على المجال $[0,+\infty[$ لأن

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{1-\cos^n(x)}{1+x^2}\right|dx \leq \int_0^{+\infty}\frac{2}{1+x^2}dx = 2\left(\lim_{x\longrightarrow+\infty}\arctan(x) - \arctan(0)\right) = \pi$$

بالإضافة إلى ذلك لدينا

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n(x)}{1+x^2}dx = \int_{[0,+\infty[} f_n d\lambda$$

الآن نحقق من شروط نظرية التقارب بالهيمنة على المتتالية $(f_n)_n$.

من أجل كل $x \in [0,+\infty[$ حيث $x \neq n\pi, n \in \mathbb{N}$ لدينا $|\cos x| < 1$ وبالتالي

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \cos^n(x) = 0$$

فيكون

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

. من كل $x \notin \{n\pi : n \in \mathbb{N}\}$.

من جهة أخرى، واضح أن المجموعة $\{n\pi : n \in \mathbb{N}\}$ قابلة للعد وبالتالي

$$\lambda\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n \neq \frac{1}{1+x^2}\right) = \lambda\left(\{n\pi : n \in \mathbb{N}\}\right) = 0$$

وهذا يعني أن المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة شبه كليا نحو التابع $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

مما يلي

$$\forall x \in [0,+\infty[: |f_n(x)| \leq \frac{2}{1+x^2} = g(x)$$

نستنتج أن التابع g (القابل للمكاملة على المجال $[0,+\infty[$) يهيمن على كل التوابع f_n ، إذن حسب نظرية التقارب بالهيمنة لدينا

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n(x)}{1+x^2}dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{[0,+\infty[} f_n d\lambda = \int_{[0,+\infty[} \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

حل التمرين 11.5 :

نسمي $(f_n)_n$ متتالية التوابع المعرفة على $]0,+\infty[$ بأن

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}.$$

كل التوابع f_n قيوسة على $]0,+\infty[$ لأنها مستمرة وكذلك متقاربة ببساطة نحو التابع المعدوم لأن

$$\forall x \in]0,+\infty[: \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} = 0$$

من السهل التحقق كذلك أن

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \forall x \in]0,+\infty[: |f_n(x)| \leq g(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

وهذا يعني أن التابع g يهيمن على كل التوابع f_n .

التابع g قابل للمكاملة على المجال $[1,+\infty[$ لأن

$$\forall x \in [1,+\infty[: g(x) \leq e^{-x} \Longrightarrow \int_1^{+\infty} g(x)dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x}dx = e^{-1} < \infty$$

وكذلك قابل للمكاملة على $]0,1[$ لأن

$$\forall x \in]0,1[: g(x) \leq \tfrac{1}{\sqrt{x}} \text{ و } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2 - \lim_{x \longrightarrow 0^+} \left(2\sqrt{x}\right) = 2 < \infty$$

إذن التابع المهيمن g قابل للمكاملة على $]0,+\infty[$.
ومنه حسب نظرية التقارب بالهيمنة لدينا

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}dx = 0.$$

حل التمرين 12.5 :

حساب النهاية I
التوابع $x \longmapsto f_n(x)$ حيث

$$f_n(x) = \frac{n\sin(\frac{x}{n})}{1+x^2}$$

مستمرة على $[0,1]$ فهي قيوسة .
كذلك لدينا

$$\forall x \in]0,1] : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\sin(\dfrac{x}{n})}{\dfrac{x}{n}} \frac{x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2},$$

ومن أجل $x = 0$ لدينا $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(0) = 0$.
نثبت شرط الهيمنة، من المتراجحة المعروفة $|\sin x| \leq |x|$ الصحيحة من أجل كل $x \in [0,1]$ نستنتج شرط الهيمنة

$$\forall x \in [0,1] : |f_n(x)| \leq \frac{x}{1+x^2} = g(x)$$

إن التابع g كمول على المجال $[0,1]$ لأن

$$\int_0^1 g(x)dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2} < \infty$$

أخيرا حسب نظرية التقارب بالهيمنة نجد

$$I = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{n\sin(\dfrac{x}{n})}{1+x^2}dx = \int_0^1 \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\ln 2}{2}$$

حساب النهاية J
من أجل $x \in]0,1[$ نضع

$$g_n(x) = \frac{\sin x}{x^2} \frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}$$

بما أن $\sin x > 0$ من أجل كل $x \in]0,1[$ فإن كل التوابع g_n موجبة وهي كذلك قيوسة على المجال $]0,1[$ لأنها مستمرة
واضح أن متتالية التوابع $(g_n)_n$ متقاربة ببساطة نحو التابع $x \longmapsto \frac{\sin x}{x^2}$.
ومنه حسب توطئة فاتو نجد

$$\begin{aligned}J &\geq \liminf_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 g_n(x)dx \geq \int_0^1 \liminf_{n\longrightarrow+\infty} g_n(x)dx\\ &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}dx \overset{0}{\backsim} \int_0^1 \frac{x}{x^2}dx\\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty,\end{aligned}$$

أي أن $J = +\infty$.

حل التمرين 13.5 :

1) نضع $A_n = \left(\frac{1}{n} \leq |f| < n\right)$. بما أنه لدينا

$$\int_{A_n} |f|\, d\mu = \int |f|\, \chi_{A_n} d\mu$$

فنعتبر متتالية التوابع $(f_n)_n$ المعرفة من X نحو $\mathbb{R}$ كما يلي

$$f_n(x) = |f(x)|\, \chi_{A_n}(x) = \begin{cases} |f(x)|\,, & \frac{1}{n} \leq |f(x)| < n\\ 0, & |f(x)| < \frac{1}{n} \text{ أو } |f(x)| \geq n\end{cases}$$

من السهولة التأكد أن

$$\forall x \in X : \lim_{n\longmapsto+\infty} f_n(x) = |f(x)| \text{ و } |f_n| \leq |f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

ومنه بتطبيق نظرية التقارب بالهيمنة نحصل على

$$\lim_{n\longmapsto+\infty} \int_{\left(\frac{1}{n}\leq|f|<n\right)} |f|\, d\mu = \int \lim_{n\longmapsto+\infty} |f|\, \chi_{A_n} d\mu = \int |f|\, d\mu$$

2) لدينا ما يلي

$$\int |f|\, d\mu = \int_{A_n} |f|\, d\mu + \int_{A_n^c} |f|\, d\mu$$

ومنه من السؤال السابق نستنتج أن

$$\lim_{n\longmapsto+\infty} \int_{A_n^c} |f|\, d\mu = \int |f|\, d\mu - \lim_{n\longmapsto+\infty} \int_{A_n} |f|\, d\mu = 0$$

حسب تعريف النهاية من كل $\varepsilon > 0$ لدينا ما يلي

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \int_{A_{n_0}^c} |f|\, d\mu \leq \varepsilon$$

ومن تعريف المجموعة A_n يمكن أن نكتب المتراجحة

$$\frac{1}{n_0}\chi_{A_{n_0}} \leq |f|$$

بمكاملة طرفي هذه المتراجحة نجد

$$\frac{1}{n_0}\mu(A_{n_0}) \leq \int |f|\, d\mu < \infty$$

وهو مايثبت أن $\mu(A_{n_0}) < \infty$.
المتراجحة التالية واضحة

$$\sup_{x\in A_{n_0}} |f(x)| \leq n_0$$

حل التمرين 14.5 :

1) حسب متراجحة Tchebychev لدينا

$$\forall \varepsilon > 0 : \mu\left(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int |f_n - f|\, d\mu.$$

وحيث

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int |f_n - f|\, d\mu = 0,$$

إذن

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\longrightarrow+\infty}\mu\left(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

وهو ما يعني أن $(f_n)_n$ متقاربة بالقياس نحو التابع f .
2) من أجل كل $\varepsilon > 0$ لدينا

$$\begin{aligned}\{|f_n - 0| \geq \varepsilon\} &= \underbrace{\left\{x \notin \left[0, \frac{1}{n}\right] : 0 \geq \varepsilon\right\}}_{=\emptyset} \cup \left\{x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] : n \geq \varepsilon\right\}\\ &= \left\{x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] : n \geq \varepsilon\right\} \subset \left[0, \frac{1}{n}\right]\end{aligned}$$

ومنه

$$\lambda\left(\{|f_n - 0| \geq \varepsilon\}\right) \leq \lambda\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

وهو ما يستلزم أن

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\lambda\left(\{|f_n - 0| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

يعني أن $(f_n)_n$ متقاربة بالقياس نحو التابع 0 .
من جهة ثانية، من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا

$$\int |f_n|\, d\lambda = n\lambda\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right) = 1 \neq 0$$

ومنه

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int |f_n - 0|\, d\lambda \neq 0$$

وذلك يعني أن $(f_n)_n$ لا تتقارب نحو 0 في الفضاء $\mathcal{L}^1(\lambda)$.

حل التمرين 15.5 :

التقارب البسيط لمتتالية التوابع $(f_n)_n$ نحو التابع f يستلزم أن

$$f = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n = \liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n$$

ومنه بتطبيق توطئة فاتو على المتتالية $(f_n)_n$ نحصل على

$$\int f d\mu = \int \liminf_{n \longrightarrow +\infty} d\mu \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu \leq K.$$

حل التمرين 16.5 :

التابع $|h|$ قابل للقياس لأنه قابل للمكاملة وكذلك التابع المميز $\chi_{(|h|>r_n)}$ قابل للقياس لأن $(|h| > r_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ، وهو مايثبت أن التوابع $x \longmapsto h_n(x)$ قابلة للقياس . من جهة ثانية بما أن المتتالية $(r_n)_n$ متزايدة فإن

$$(|h| > r_{n+1}) \subset (|h| > r_n),$$

ومنه

$$\chi_{(|h|>r_{n+1})} \leq \chi_{(|h|>r_n)}.$$

وهو ما يعني أن

$$\forall n \in \mathbb{N} : |h| \, \chi_{(|h|>r_{n+1})} \leq |h| \, \chi_{(|h|>r_n)}.$$

إذن المتتالية $(h_n)_n$ متناقصة . كذلك التابع h_0 قابل للمكاملة لأن

$$\int |h_0| \, d\mu = \int |h| \, \chi_{(|h|>r_0)} d\mu = \int_{(|h|>r_0)} |h| \, d\mu \leq \int_X |h| \, d\mu < \infty.$$

لندرس الآن تقارب متتالية التوابع $(h_n)_n$ ، لدينا

$$h_n(x) = \begin{cases} |h(x)| \, , & |h(x)| > r_n \\ 0, & |h(x)| \leq r_n \end{cases}$$

بما أن $\lim_{n \longrightarrow +\infty} r_n = +\infty$ ، من تعريف هذه النهاية ينتج ما يلي

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : r_n \geq |h(x)| \, ,$$

وذلك يعني أن

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : h_n(x) = 0.$$

أي نستنتج أن

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} h_n(x) = 0.$$

الآن حسب النتيجة 1.1.5 (الناتجة عن نظرية التقارب الرتيب) نستنتج

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{(|h|>r_n)} |h| \, d\mu = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_X h_n d\mu = \int_X \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} h_n \right) d\mu = 0.$$

أخيرا هذا يستلزم أن

$$\lim_{r \longrightarrow +\infty} \int_{(|h|>r)} |h| \, d\mu = 0.$$

حل التمرين 17.5 :

1) من أجل كل $t \geq 0$ و $x \in [0,1]$ نضع

$$f(x,t) = \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}.$$

لدينا ما يلي

• التابع

$$f_t : x \longmapsto f_t(x) = f(x,t)$$

قيوس على المجال $[0,1]$ من أجل كل $t \geq 0$ لأنه مستمر .

f_t كذلك قابل للمكاملة على $[0,1]$ من أجل كل $t \geq 0$ لأن

$$\forall t \geq 0 : \int_0^1 |f_t(x)|\, dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+x^2} dx = \frac{\pi e^{-t^2}}{4} < \infty.$$

• من أجل كل $x \in [0,1]$ التابع $t \longmapsto f(x,t)$ ينتمي إلى الصف C^1 على المجال $[0,+\infty[$ ولدينا

$$\forall x \in [0,1], \forall t \geq 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -2te^{-t^2(1+x^2)}.$$

• لدينا كذلك مايلي

$$\forall x \in [0,1], \forall t \geq 0 : \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq \sup_{t\geq 0}\left(2te^{-t^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{e}} = g \in L^1(\mu).$$

ومنه حسب نظريتي إستمرار وإشتقاق التوابع المعرفة بتكامل لوبيغ فإن التابع F ينتمي إلى الصف C^1 على المجال $[0,+\infty[$ ولدينا

$$\forall t \geq 0 : F'(t) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx = -2te^{-t^2}\int_0^1 e^{-t^2x^2}dx.$$

2) بما أن التابع $x \longmapsto e^{-x^2}$ مستمر على المجال $[0,+\infty[$ فإن التابع G ينتمي إلى الصف C^1 على المجال $[0,+\infty[$ ولدينا

$$\forall t \in [0,+\infty[: H'(t) = F'(t) + G'(t),$$

ومن جهة ثانية بإستخدام التبديل في المغير، بوضع $x = tu$ نحصل على

$$G'(t) = 2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}dx = 2te^{-t^2}\int_0^1 e^{-t^2u^2}du = -F'(t),$$

إذن

$$\forall t \in [0,+\infty[: H'(t) = 0.$$

3) أ) لدينا ما يلي

$$H(0) = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + 0 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

بما أن

$$\forall t \geq 0 : F(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 e^{-t^2(1+x^2)}dx \leq \int_0^1 e^{-t^2}dx = e^{-t^2}$$

فإن

$$\forall t \geq 0 : 0 \leq F(t) \leq e^{-t^2}$$

وهذا يعني أن

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} F(t) = 0$$

كذلك بما أن

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \chi_{[0,n[} = \chi_{\cup_{n=1}^{+\infty}[0,n[} = \chi_{[0,+\infty[} = 1$$

نستخدم نظرية التقارب الرتيب لنحصل على ما يلي

$$\begin{aligned}
\lim_{t \longrightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x^2}dx &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{[0,+\infty[} \chi_{[0,n[}e^{-x^2}dx \\
&= \int_{[0,+\infty[} \lim_{n \longrightarrow +\infty} \chi_{[0,n[}e^{-x^2}dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx.
\end{aligned}$$

ومنه نحصل على

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} G(t) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2.$$

ب) حسب السؤال السابق لدينا

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} H(t) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} F(t) + \lim_{t \longrightarrow +\infty} G(t) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2.$$

الآن حسب نتيجة السؤال 2)، التابع H ثابت ولدينا

$$\forall t \geq 0 : H(t) = H(0) = \frac{\pi}{4},$$

بالمرور إلى النهاية لما $t \longrightarrow +\infty$ نستنتج أن

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

وهذا يعني أن

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

حل التمرين 18.5 :

1) من أجل كل $t \in \mathbb{R}$ و $x \in]0,+\infty[$ نضع

$$f(x,t) = \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)}$$

بما أن التابع arctan فردي فإن التابع $t \longmapsto F(t)$ فردي، ومنه يكفي دراسة F على المجال $[0, +\infty[$.
لدينا ما يلي
• التابع

$$f_t : x \longmapsto f_t(x) = f(x,t)$$

قيوس على المجال $]0, +\infty[$ من أجل كل $t \geq 0$ لأنه مستمر .
ندرس قابلية المكاملة للتابع f_t على المجال $]0, +\infty[$. من جهة أولى، عندما $x \longrightarrow 0$ لدينا

$$\forall t \geq 0 : \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)} \overset{0}{\sim} \frac{tx}{x(1+x^2)} = \frac{t}{(1+x^2)} \overset{0}{\sim} t, \quad \int_0^1 t dx < \infty$$

ومنه

$$\int_0^1 \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)} dx < \infty$$

ومن جهة أخرى، عندما $x \longrightarrow +\infty$ لدينا

$$\forall t \geq 0 : \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)} \overset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x(1+x^2)} \overset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x^3}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x^3} dx < \infty$$

ومنه

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)} dx < \infty$$

ومنه نستنتج أن

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)} dx < \infty$$

وهذا يعني أن $f_t \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ من أجل كل $t \geq 0$ ومنه التابع F معرف جيدا على المجال $]0, +\infty[$.
• من أجل كل $x \geq 0$ التابع $t \longmapsto f(x,t)$ قابل للإشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ ولدينا

$$\forall x \geq 0, \forall t \geq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+x^2)}.$$

• لدينا كذلك ما يلي

$$\forall x \geq 0, \forall t \geq 0, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq \frac{1}{1+x^2} = g(x)$$

حيث g قابل للمكاملة على $]0, +\infty[$ لأن

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} < \infty.$$

ومنه حسب نظرية الإشتقاق الخاصة بالتوابع المعرفة بتكامل لوبيغ فإن التابع F يقبل الإشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ ولدينا

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+x^2)} dx \tag{3.5}$$

لحساب $F'(t)$ بدون رمز التكامل، لدينا التفكيك التالي

$$\forall x \geq 0, x \neq 1 : \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+x^2)} = \frac{\frac{1}{1-t^2}}{1+x^2} + \frac{\frac{t^2}{t^2-1}}{1+t^2x^2},$$

ومنه بتعيين الدوال الأصلية نجد

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{1}{1-t^2}\left[\arctan(x)\right]_0^{+\infty} - \frac{t}{1-t^2}\left[\arctan(tx)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{1-t}{1-t^2} = \frac{\pi}{2(1+t)} \end{aligned}$$

بما أن التابع المشتق F' زوجي فإن

$$\forall t \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} : F'(t) = \frac{\pi}{2(1+|t|)} \tag{4.5}$$

لحساب $F'(1)$ نضع $t = 1$ في المساواة (3.5) فنجد

$$F'(1) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

ونتمم الحساب بواسطة تفكيك الكسر السابق إلى كسور بسيطة .

2) بتعيين الدوال الأصلية في العلاقة (4.5) نجد

$$F(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\ln(1+t), & t \geq 0, \quad t \neq 1 \\ -\frac{\pi}{2}\ln(1-t), & t \leq 0, t \neq -1 \end{cases}$$

بما أن التابع F مستمر على $\mathbb{R}$ لأنه قابل للإشتقاق وكذلك التوابع $t \longmapsto \ln(1+t)$ و $t \longmapsto \ln(1-t)$ مستمرة على $[0, +\infty[$ و $]-\infty, 0]$ الترتيب فإن

$$\forall t \in \mathbb{R} : F(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\ln(1+t), & t \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2}\ln(1-t), & t \leq 0 \end{cases}$$

3) باستخدام طريقة المكاملة بالتجزئة نجد

$$\begin{aligned} F(1) &= \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x(1+x^2)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x(1+x^2)}\frac{1}{x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(\arctan x)^2 \frac{1}{x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} I. \end{aligned}$$

ومن جهة ثانية بإستخدام عبارة $F(t)$ في السؤال السابق نجد

$$F(1) = \frac{\pi}{2}\ln(1+1) = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

ومنه أخيرا

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2 dx = I = 2F(1) = \pi \ln 2.$$

الفصل السادس

تمارين إضافية

عناوين الفصل :

في هذا الفصل نقدم مجموعة من التمارين الإضافية (الحلول غير مدرجة). نشير إلى أن أغلب هذه التمارين والمسائل تم جمعها من المرجعين [3] و [15] .

1.6 تمارين إضافية للفصل الأول

تمرين 1.6.
f و g تابعان معرفان على المجال $[-1,5]$ بأن

$$f(x)=\begin{cases}1, x\neq 0\\ 3, x=0\end{cases} \text{ و } g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ -2, & x=0\end{cases}$$

برهن أن تكامل ستيلجس $\int_{-1}^{5} fdg$ غير موجود .

تمرين 2.6.
ليكن $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا مستمرا .
برهن أن

$$\int_0^n fd\,[x]=\sum_{i=1}^{n} f(i)$$

حيث يرمز بـ $[x]$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x .

تمرين 3.6.
ليكن f التابع المميز لمجموعة الأعداد الناطقة التي تنتمي إلى المجال $[a,b]$ ، أي أن

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\cap[a,b]\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\cap[a,b]\end{cases}$$

وليكن التابع $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ الذي يحقق $g(a)\neq g(b)$.
برهن أن التابع f لا يقبل المكاملة حسب ستيلجس نسبة للتابع g على المجال $[a,b]$.

تمرين 4.6.
أثبت أنه إذا كان $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع يقبل المكاملة حسب ستيلجس نسبة إلى كل تابع متزايد $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ فإن التابع f مستمر على المجال $[a,b]$.

تمرين 5.6.
ليكن $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا كمولا حسب ريمان على المجال $[a,b]$.
1) برهن أنه اذا كان التابع $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ يحقق شرط ليبشيتز فإن تكامل ستيلجس التالي

موجود

$$\int_a^b fdg.$$

2) ليكن التابع $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرف بأن

$$h(x) = c + \int_a^b \varphi(t)dt, \qquad x \in [a, b]$$

حيث c عدد حقيقي ثابت والتكامل التالي موجود ومحدود

$$\int_a^b |\varphi(t)|\, dt.$$

برهن أن تكامل ستيلجس التالي موجود

$$\int_a^b hdg.$$

تمرين 6.6.
ليكن $f_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ و $f_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعان يحققان

$$\forall x \in [a, b] : f_1(x) \leq f_2(x).$$

إذا كان التكاملان

$$\int_a^b f_1dg \qquad \text{و} \qquad \int_a^b f_2dg$$

موجودين من أجل التابع المتزايد $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ برهن أن

$$\int_a^b f_1dg \leq \int_a^b f_2dg.$$

تمرين 7.6.
برهن أن تكامل ستيلجس التالي

$$\int_a^b fdg$$

غير موجود اذا كان كل من التابعين $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ غير مستمر عند النقطة $x_0 \in [a, b]$

تمرين 8.6.

لتكن $(f_n)_n$ متتالية توابع عددية متقاربة ببساطة على المجال $[a, b]$ نحو التابع المستمر f . بالإضافة إلى ذلك نفرض وجود عدد حقيقي موجب تماما M بحيث

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b] : |f_n(x)| \leq M.$$

وليكن g تابعا متزايدا تماما على المجال $[a,b]$. برهن صحة العلاقة

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^b f_n dg=\int_a^b f dg.$$

تمرين 9.6.
لتكن $(f_n)_n$ متتالية توابع عددية مستمرة ومتقاربة بإنتظام على المجال $[a,b]$ نحو التابع f وليكن g تابعا ذو تغير محدود على المجال $[a,b]$.
برهن أن

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^b f_n dg=\int_a^b f dg.$$

تمرين 10.6.
1) ليكن $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا مستمرا على المجال $[a,b]$ وليكن $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا ذو تغير محدود على $[a,b]$. برهن أنه من أجل كل $\varepsilon>0$ وكل تقسيم P للمجال $[a,b]$ وكل تقسيم Q مرافق لـ P لدينا

$$\left|S(f,g,P,Q)-\int_a^b f dg\right|<\varepsilon V_a^b(g).$$

2) ليكن $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا مستمرا على المجال $[a,b]$ ولتكن $(g_n)_n$ متتالية توابع عددية ذات تغيرات محدودة على المجال $[a,b]$ ومتقاربة ببساطة على المجال $[a,b]$ نحو التابع g بحيث يوجد عدد حقيقي $M>0$ يحقق

$$\forall n\in\mathbb{N}: V_a^b(g_n)\leq M.$$

برهن أن

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^b f_n dg=\int_a^b f dg.$$

تمرين 11.6.

$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ و $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعان يحققان $\int_a^b f dg=0$.
نفرض أن التابع f مستمر على $[a,b]$ وأن التابع g مستمر عند النقطة $x_0\in]a,b[$.
برهن أن $g(x_0)=g(a)$.

تمرين 12.6.
ليكن $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا مستمرا على $[a,b]$ وليكن $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا تغيره محدود على $[a,b]$.
من أجل كل $x\in[a,b]$ نضع

$$\varphi(x)=\int_a^x f dg,$$

ونفرض أن $\varphi(a) = 0$.

1) برهن أن φ تابعا ذو تغير محدود على المجال $[a, b]$.

2) برهن أنه إذا كان التابع g مستمرا عند النقطة $x_0 \in [a, b]$ فإن التابع φ يكون كذلك .

3) برهن أنه إذا كان التابع g قابلا للإشتقاق عند النقطة $x_0 \in [a, b]$ فإن التابع φ يكون كذلك .

4) برهن أنه من أجل أي تابع $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ مستمر على $[a, b]$ لدينا

$$\int_a^b h d\varphi = \int_a^b h f dg.$$

2.6 تمارين إضافية للفصل الثاني

تمرين 13.6.
لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن $(A_n)_n$ متتالية من أجزاء X .
أ) برهن أنه من أجل كل جزء $B \subset X$ لدينا

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim}(B - A_n).$$

وكذلك

$$\underline{\lim} A_n = \overline{\lim}(B - A_n).$$

ب) برهن أن

$$\overline{\lim} A_n - \underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim}(A_n \Delta A_{n+1}).$$

تمرين 14.6.
لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن $(A_n)_{n\geq 1}$ متتالية من أجزاء X .
حدد بدقة كل من $\overline{\lim} A_n$ و $\underline{\lim} A_n$ في كل حالة من الحالتين التاليتين
أ)

$$\begin{cases} A_{2n} = \left[-1, 2 + \dfrac{1}{n}\right[\\ A_{2n+1} = \left]-2 - \dfrac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

ب)

$$A_n = \left]-\infty, a_n\right], a_n \in \mathbb{R}.$$

تمرين 15.6.
X مجموعة غير خالية و $(A_n)_n$ تجزئة للمجموعة X . لتكن $\mathcal{M}$ العشيرة المولدة بالأسرة $\mathcal{S}$ المعرفة بأن

$$\mathcal{S} = \{A_n : n \in \mathbb{N}^*\}.$$

حدد بدقة جميع عناصر العشيرة $\mathcal{M}$.

تمرين 16.6.
لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن $\mathcal{S}$ أسرة من أجزاء X .
تعريف: نقول عن الأسرة $\mathcal{S}$ أنها نصف جبر على X إذا تحققت الشروط التالية
ش1) $\emptyset \in \mathcal{S}$ و $X \in \mathcal{S}$.
ش2) إذا كان $A, B \in \mathcal{S}$ فإن $A \cap B \in \mathcal{S}$.
ش3) إذا كان $A \in \mathcal{S}$ فإن $A^C = \bigcup_{j=1}^{n} S_j$ حيث $S_j \in \mathcal{S}$ من أجل كل $j = 1, ..., n$.

1) برهن أن الجبر المولد بنصف الجبر $\mathcal{S}$ هو الجبر $\mathcal{Q}$ المعرف بأن

$$\mathcal{Q}=\left\{A : A=\bigcup_{j=1}^{n} A_j, \quad A_j\in\mathcal{S}, \;\; j=1,\dots,n\right\},$$

يعني الإتحادات المنتهية لعناصر $\mathcal{S}$.

2) نعتبر الفضاءان القيوسان $(X_1,\mathcal{M}_1)$ و $(X_2,\mathcal{M}_2)$.

$\mathcal{S}$ هي أسرة من أجزاء X معرفة بأن

$$\mathcal{S}=\{A\subset X_1\times X_2 : A=A_1\times A_2, \;\; A_1\in\mathcal{M}_1, A_2\in\mathcal{M}_2\}$$

برهن أن $\mathcal{S}$ نصف جبر على $X_1\times X_2$.

3) برهن أن الأسرة المشكلة من كل مجالات $\mathbb{R}$ هي نصف جبر .

4) ليكن $\mathcal{S}_1$ و $\mathcal{S}_2$ أنصاف جبر على X ولتكن $\mathcal{S}$ أسرة مشكلة من أجزاء X معرفة بأن

$$\mathcal{S}=\{S_1\cap S_2 : S_1\in\mathcal{S}_1, S_2\in\mathcal{S}_2\}$$

أ) برهن أن $\mathcal{S}$ تشكل نصف جبر على X .

ب) برهن أن الجبر المولد بالأسرة $\mathcal{S}$ ينطبق على الجبر المولد بواسطة $\mathcal{S}_1$ و $\mathcal{S}_2$.

تمرين 17،6.

الهدف من هذا التمرين هو إثبات أنه لاتوجد عشيرة غير منتهية وقابلة للعد .

ليكن $(X,\mathcal{M})$ فضاء قيوس بحيث $\mathcal{M}$ عشيرة غير منتهية وقابلة للعد .

من أجل كل $x\in X$ نضع

$$A_x=\bigcap_{A\in\mathcal{M}_x} A \quad \text{و} \quad \mathcal{M}_x=\{A\in\mathcal{M} : x\in A\}$$

1) برهن أن $A_x\neq\emptyset$ و $A_x\in\mathcal{M}$.

2) برهن أنه إذا كان $x,y\in X$ وكان $A_x\cap A_y\neq\emptyset$ فإن $A_x=A_y$.

3) برهن أنه توجد مجموعة أدلة B بحيث الأسرة $(A_x)_{x\in B}$ تشكل تجزئة للمجموعة X .

4) ليكن $\Phi:\mathcal{P}(B)\longrightarrow\mathcal{M}$ تطبيقا معرفا بأن $\Phi(X)=\bigcup_{x\in X} A$.

برهن أن Φ معرف جيدا وتقابل . ما تستنتج؟

3.6 تمارين إضافية للفصل الثالث

تمرين 18.6.
ليكن $(X,\mathcal{M})$ فضاء قيوسا و $(Y,\mathcal{T})$ فضاء طبولوجيا و $\mathcal{B}(Y)$ العشيرة البوريلية على Y و $f: X \longrightarrow Y$ تطبيقا يحقق

$$\forall O \in \mathcal{T} : f^{-1}(O) \in \mathcal{M}.$$

برهن أن التطبيق f قابلا للقياس .

تمرين 19.6.
ليكن $(X,\mathcal{M})$ فضاء قيوسا ولتكن $(f_n)_n$ متتالية توابع قيوسة من الفضاء $(X,\mathcal{M})$ نحو الفضاء $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ متقاربة ببساطة نحو التابع $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ على المجموعة $A \subset X$.

1) برهن أن

$$A = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{n\geq N} \left\{ |f_n - f| < \frac{1}{k} \right\}$$

2) إستنتج أن $A \in \mathcal{M}$.

تمرين 20.6.
برهن أن التوابع التالية قيوسة

أ) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = E(x)$ (دالة الجزء الصحيح)

ب) $g(0) = 0$ ، $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = sgn(x) = \begin{cases} +1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

ج) $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

د) $k: \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ k(x) = \ln(|x|),\ k(0) = -\infty$

تمرين 21.6.
ليكن f تابع قيوس من $(X,\mathcal{M})$ نحو $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
$g: (X,\mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ تابع معرف بأن

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(x)}, & \text{si } f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) = 0 \end{cases}$$

برهن أن g قيوس .

تمرين 22.6.
ليكن f تطبيقا قيوسا ومحدودا لفضاء قيوس $(X,\mathcal{M})$ نحو $\mathbb{R}_+$ مزودا بعشيرته البوريلية $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ ،

ومن أجل $\alpha \in \mathbb{R}_+$ و $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ نضع

$$\|h\|_\infty = \sup_{x\in X} |h(x)| \quad \text{و} \quad (h > \alpha) = \{x \in X : h(x) > \alpha\}.$$

1) نضع $a = \frac{1}{2}\|f\|_\infty$ و $g_1 = a\chi_{(f>\alpha)}$. برهن أن

$$\|f - g_1\|_\infty \leq a \quad \text{و} \quad 0 \leq g_1 \leq f.$$

2) برهن وجود متتالية توابع درجية (وقيوسة) $(g_n)_n$ بحيث

$$\forall n \geq 1 : 0 \leq \sum_{i=1}^{n} g_i \leq f \quad \text{و} \quad \left\| f - \sum_{i=1}^{n} g_i \right\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}\|f\|_\infty .$$

إرشاد : يمكن تكرار ما ورد في السؤال السابق على التابع $f - g_1$ ثم على التابع $f - g_1 - g_2$.

3) إستنتج وجود متتالية توابع درجية متزايدة (قيوسة) $(f_n)_n$ ومتقاربة بإنتظام نحو التابع f .

تمرين 23.6.

نعتبر الفضائين القيوسين $(X, \mathcal{M})$ و $(Y, \mathcal{N})$ ومتتالية التوابع القيوسة $(f_n)_n$ المعرفة من $(X, \mathcal{M})$ نحو $(Y, \mathcal{N})$.

1) نعتبر المجموعة القيوسة $B \in \mathcal{N}$ ونضع

$$\forall x \in X : K(x) = \inf\{p \in \mathbb{N}^* : f_p(x) \in B\},$$

مع الإتفاق على أن $\inf(\emptyset) = +\infty$. برهن التطبيق $K : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\right)$ قابل للقياس .

2) نعتبر التطبيق $\phi : X \longrightarrow \mathbb{N}^*$ ، برهن عندئذ أن التطبيق

$$\Phi : X \longrightarrow Y, \quad \Phi(x) = f_{\phi(x)}(x),$$

قابل للقياس .

تمرين 24.6.

ليكن (X, d) و (Y, d) فضائين متريين (لهما نفس المسافة d) وليكن f تطبيقا معرفا من X نحو Y ونرمز بالرمز $C(f)$ إلى المجموعة الجزئية من X المشكلة من نقاط إستمرار التطبيق f بمعنى آخر

$$C(f) = \left\{x \in X : \text{مستمر عند النقطة } x \; f\right\}.$$

برهن $C(f) \in \mathcal{B}(X)$ (أي تنتمي إلى العشيرة البوريلية للفضاء المتري X) .

4.6 تمارين إضافية للفصل الرابع

تمرين 25.6.
في فضاء القياس $(X, \mathcal{M}, \mu)$ نعتبر الجزئين $A, B \in \mathcal{M}$ و $\mu_B : \mathcal{M} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ التطبيق المعرف بأن

$$\forall A \in \mathcal{M} : \mu_B(A) = \mu(A \cap B)$$

برهن أن μ_B قياس موجب على X .

تمرين 26.6.
لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن $\mathcal{G}$ أسرة من أجزاء X . نقول عن $\mathcal{G}$ انها σ -جمعية إذا تحققت الشروط التالية
ش1) $\emptyset, X \in \mathcal{G}$.
ش2) إذا كانت $(A_n)_n$ متتالية متزايدة عناصرها من $\mathcal{G}$ فإن $\bigcup\limits_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{G}$.
ش3) من أجل كل $A, B \in \mathcal{G}$ لدينا:
إذا كان $A \subset B$ فإن $B - A \in \mathcal{G}$.
إذا كان $A \cap B = \emptyset$ فإن $A \cup B \in \mathcal{G}$.
1) هل العشيرة أسرة σ -جمعية .
2) ليكن μ و ν قياسين موجبين على الفضاء القيوس $(X, \mathcal{M})$ بحيث

$$\mu(X) = \nu(X) < \infty.$$

برهن أن الأسرة المعرفة بأن

$$\mathcal{G} = \{E \in \mathcal{M} : \mu(E) = \nu(E)\}.$$

هي أسرة σ -جمعية على X .
3) إذا كانت $\mathcal{T}$ أسرة من أجزاء X فبرهن أنه توجد أصغر أسرة σ -جمعية على تحوي $\mathcal{T}$ (وهي الأسرة σ -جمعية المولدة بواسطة $\mathcal{T}$) .
4) إذا كانت $\mathcal{T}$ أسرة مستقرة نسبة إلى التقاطع المنتهي، برهن أن العشيرة المولدة بواسطة الأسرة $\mathcal{T}$ تنطبق على الأسرة σ -جمعية المولدة بواسطة $\mathcal{T}$.

تمرين 27.6.
ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس منتهي ولتكن $E \in \mathcal{M}$ حيث $\mu(E) < \infty$. نفرض أن $\mathcal{M}$ تحوي أسرة $\mathcal{D}$ عناصرها منفصلة مثنى مثنى .
1) برهن أنه توجد متتالية $(D_n)_n$ عناصرها من $\mathcal{D}$ تحقق

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \mu(E \cap D_n) \neq 0. \qquad (1.6)$$

2) ليكن $E \in \mathcal{M}$ حيث

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : E = \bigcup_{n\geq 1} E_n, \quad E_n \in \mathcal{M}, \quad \mu(E_n) < \infty$$

برهن أن E يحقق (1.6) من أجل المتتالية $(D_n)_n$ المعرفة بأن

$$\mathcal{D}_n = \left\{ D \in \mathcal{D} : \mu(E \cap D) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

تمرين 28.6.
ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس $\mathcal{N}$ هي أسرة الأجزاء المهملة في X بالنسبة للقياس μ ولتكن $\mathcal{M}_0$ الأسرة المشكلة من أجزاء X المعرفة بأن

$$\mathcal{M}_0 = \{ E \subset X : E = F \cup N, \quad F \in \mathcal{M} \text{ و } N \in \mathcal{N} \}.$$

نعتبر كذلك التطبيق $\mu_0 : \mathcal{M}_0 \longrightarrow [0, +\infty]$ المعرف بأن

$$\mu_0(E) = \mu_0(F \cup N) = \mu(F), E = F \cup N$$

1) برهن أن $\mathcal{M}_0$ هي العشيرة المولدة بواسطة الأسرة $\mathcal{M}$ و الأسرة $\mathcal{N}$.
2) برهن أن μ_0 قياس موجب تام على الفضاء $(X, \mathcal{M}_0)$ وأن $\mu_0 = \mu$ على $\mathcal{M}$.
2) أ) برهن أن $F \in \mathcal{M}_0$ إذا وفقط إذا وجد $E \in \mathcal{M}$ بحيث تكون المجموعة $E \Delta F$ مهملة بالنسبة إلى القياس μ .
ب) برهن أن $F \in \mathcal{M}_0$ إذا وفقط إذا وجد $E \in \mathcal{M}$ و $N \in \mathcal{N}$ بحيث $F = E \Delta N$.

تمرين 29.6.
ليكن التابع $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ وليكن μ القياس الموجب المعرف على $(X, \mathcal{P}(X))$ بأن

$$\forall E \in \mathcal{P}(X) : \mu(E) = \sum_{x \in E} f(x)$$

أوجد الشروط اللازمة والكافية بدلالة f التي تجعل μ منتهيا و σ -منتهيا .

تمرين 30.6.
ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس ولتكن $(E_n)_n$ متتالية عناصرها من $\mathcal{M}$.
1) برهن أنه إذا كان $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) < \infty$ وكان $\mu(E_n) \geq \varepsilon > 0$ من أجل عدد غير منته من قيم n فإن $\mu(\overline{\lim} E_n) > 0$.
أعط مثالا يبين أنه لا يمكن الإستغناء عن الشرط $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) < \infty$.

2) برهن أن $\mu(\underline{\lim} E_n) \leq \liminf\limits_{n\longrightarrow+\infty} (\mu(E_n))$.

3) برهن أنه إذا كان $\mu\left(\bigcup\limits_{n\geq 1} E_n\right) < \infty$ فإن $\limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} (\mu(E_n)) \leq \mu\left(\overline{\lim}(E_n)\right)$.

تمرين 31.6.

ليكن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضاء قياس وليكن $f : X \longrightarrow Y$ تطبيقا غامرا ولنضع $\mathcal{N}$ أسرة لأجزاء Y معرفة بأن

$$\mathcal{N} = \left\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\right\}$$

وكذلك ν تطبيق مجموعاتي معرف بأن

$$\forall B \in \mathcal{N} : \nu(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right)$$

برهن أن $\mathcal{N}$ عشيرة على Y وأن ν قياس موجب على $(X, \mathcal{N})$

تمرين 32.6.

لتكن $r_1, r_2, ...r_n, ...$ أعداد ناطقة تنتمي إلى المجال $I = [0,1]$ حيث r_n هو العدد ذو المرتبة n الذي يكتب على شكل كسر غير قابل للإختزال $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ ولتكن $(f_n)_n$ متتالية التوابع العددية المعرفة على المجال $I =$ بأن

$$f_n(x) = \exp\left\{-(p_n - xq_n)^2\right\}.$$

1) برهن أن $(f_n)_n$ متقاربة بالقياس نحو التابع المعدوم على المجال $[0,1]$ لكنها لا تتقارب ببساطة على نفس المجال .

2) إستخرج من $(f_n)_n$ متتالية جزئية متقاربة شبه كليا نحو التابع المعدوم على المجال I .

قائمة المراجع

[1] شحادة الأسدي، غادة علي جوجة، نظرية القياس ، منشورات جامعة حلب كلية العلوم 2009-2010.

[2] يوسف عتيق، مدخل إلى نظرية القياس والمكاملة (مطبوعة دروس)، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة (2015).

[3] يوسف عتيق، حول نظرية القياس والمكاملة (مطبوعة : تمارين ومسائل)، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة (2015).

[4] أندري كولموغوروف ، مبادئ في نظرية التوابع وفي التحليل التابعي، ديوان المطبوعات الجامعية، ترجمة أبوبكر خالد سعد الله 1987.

[5] S. Axler, Measure, Integration & Real Analysis, Springer Nature Switzerland, 2020.

[6] V. Bogachev, Measure theory (Volume I), Springer Science & Business Media Berlin Heidelberg, 2007.

[7] A. Bouziad et J. Calbrix, Théorie de la Mesure et de l'intégration, 185. Puli. univ. Rounen, 1993.

[8] T. Gallay, Théorie de la Mesure et de l'intégration, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2009. https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ edumas/integration.pdf

[9] J. Genet, Mesure et intégration (théorie élémentaire), Vuibert Print book. French. 1976.

[10] R. Godement, Analyse mathématique IV: Intégration et théorie spectrale, analyse harmonique, le jardin des délices modulaires, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

[11] P. R. Halmos, Measure theory, Springer-Verlag New York, 1950.

[12] B. Hauchecorne, Les contre-exemples en Mathématiques, Ellipses Edition Marketing S.A., 2007.

[13] H. König, Measure and integration (An advanced course in basic procedures and applications), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.

[14] E. Laamri, Mesure, intégration, convolution et transformée de Fourrier des fonctions, Sciences Sup, Dunod, 2007.

[15] L. Meziani, Mesure et intégration, Université d'Alger, 1977.

[16] P. Krée, intégration et théorie de la mesure, ellipses / édition, marketing SA, Paris (15^e), 1997.