الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة - بوسعادة
المجاهد الفريق أحمد قايد صالح
قسم: العلوم الدقيقة

Ecole Normale Supérieure
Bou-Saada
Dép. Sciences Exactes

دروس في تاريخ الرياضيات

المقياس: تاريخ الرياضيات

موجهة: لطلبة التخرج المدرسة العليا للأساتذة شعبة الرياضيات &
طلبة السنة ثانية جامعي ل.م.د رياضيات وإعلام آلي

تقديم. أحمد عباسي

أستاذ محاضر بالمدرسة العليا للأساتذة -بوسعادة-

السنة الجامعية: 2020/2019

مقدمة.

لقد تم إدراج وحدة تاريخ الرياضيات في المنظومة الجامعية مع بداية نظام LMD في السنة الثانية من ليسانس رياضيات كوحدة استكشافية ذات طابع تثقيفي بالنسبة للطالب مع رسم بعض الأهداف كتمكين الطالب من دراسة تطور الرياضيات وتعلم لغة قراءة المخطوطات والنصوص القديمة وتحليلها. وفي المنظومة التربوية تم إدخال السيرة الذاتية لنخبة من العلماء مع مستهل بعض المواضيع في الكتب المدرسية لخدمة هدفين أساسيين هما الطابع التثقيفي والتشويقي.

أما بالنسبة للمدارس العليا للأساتذة فقد ادرجت هذه الوحدة في قسم الرياضيات منذ مطلع التسعينات بفضل جهد العديد من الاساتذة من أمثال الأستاذ **أحمد جبار** من جامعة ليل– فرنسا–، والذي يعود الفضل إليه في تكوين نخبة من الأساتذة في هذه المادة بالمدرسة العليا للأساتذة بالقبة مثل: الأستاذ **يوسف قرقور** رحمه الله والأستاذ **عبد المالك بوزاري** اللذين ساهموا بدورهم في إعداد برامج لهذه المادة وتوفير بعض الوثائق والمراجع الهامة لتدريس محتوى هذا المقياس، ومن نفس المدرسة لا يفوتني أن أنسى المجهودات الهائلة التي بذلت من طرف الأستاذين: **يوسف عتيق و أبوبكر خالد سعدالله** في تمتين علاقة الطالب والأستاذ على حدٍ سواء بهذه المادة، كانت هذه النواة الأولى لانطلاق تدريس تاريخ الرياضيات في المدرسة العليا بالقبة.

عموما هذا المحتوى موجه خصوصا لسنوات التخرج: السنة رابعة رياضيات–متوسط–والسنة الخامسة رياضيات –ثانوي–من طلبة المدارس العليا للأساتذة. لاستعماله كوسيلة ديداكتكية، بحيث تُمكنهم من زيادة الدافعية وتنمية الاتجاهات الموجبة لدى تلاميذهم، والتشجيع على تذوق طبيعة المادة لديهم. وإبراز دور الرياضيات في بناء الثقافة المدرسية. وهو كذلك يوافق البرنامج المقرر للسنة الثانية من ليسانس رياضيات LMD الذي سبق وأن درستهُ بجامعة الجلفة بدءًا من السنة الجامعية 2012–2013 حتى 2017–2018. إن تاريخ الرياضيات يزودنا بعدد وافر من الأمثلة التي تساعد على إثراء وتدعيم المقررات المدرسية، فضلا عن أن الأنشطة المرتكزة على تاريخ الرياضيات تعتبر مناسبة مع التلاميذ. إضافة لذلك نقدم للطالب الاستاذ مادة ثقافية وبحثية لمن شاء المواصلة في هذا المضمار.

فهرس عام

أهمية دراسة تاريخ العلوم.

تبدأ عوامل النهضة عند الشعوب بالاهتمام بالماضي، وكشف حقائقه، وربطها بالحاضر. ومما لا شك فيه أن أي أمة لا تكون على صلة بماضيها لا تستطيع احترام حاضرها.

التراث العلمي تكون لبنة لبنة على مدى العصور، وحذف أي جزء منه، يعطي صورة ناقصة وغير منطقية اتجاه تلك الجهود المضنية والتضحيات العظيمة التي قدمها العلماء والباحثون أثناء بحثهم عن الحقيقة.

الفكر البشري كائن ينمو ويتطور، فأجزاء منه تقوم بأدوار معينة في أوقات خاصة؛ لتُمهد لأدوارٍ أخرى تليهِ، ومن واجبنا عند الحديث عن تاريخ العلوم، توخي الدقة والأمانة العلمية.

وهنا يطرح سؤال نفسه: على ماذا يجب أن يركز الباحث في تاريخ العلوم؟ يجب التأكيد على ضرورة التفريق بين سرد الوقائع، وكيفية بناء النظريات، فإن لم يتعرض المؤرخ إلى التقنيات التي استخدمها العلماء، وكيفية تطورها، فإنه لا قيمة لعملهم. أي أن تاريخ العلوم ليس تأريخًا بالمعنى الخاص، بل هو علم قائم بذاته مهمته الكشف عن تاريخ النظريات العلمية وكيفية تكونها، وعن تبلور أفكار العلماء وتقدير إسهاماتهم، مقارنة بمن سبقوهم، ومدى تأثيرهم على من أتوا بعدهم. إن تاريخ العلوم هو علم له مقوماته وله منهجه العلمي الخاص به.

فلقد اعتمد المصريون على البابليين، واعتمد الإغريق على المصريين، كما اعتمد الرومان والهنود على من سبقهم من الإغريق وغيرهم، وأخذ العرب عن هؤلاء، واقتبست أوروبا عن العرب وعن الذين سبقوهم. وهكذا فالجهود الفكرية ملك عام للبشرية.

أثبتت الأبحاث الحديثة أن العلوم ميدان اشتركت فيه القرائح المختلفة، وهذا الشأن يقول *G. Sarton(m.1956)* "**من الضلال أن يقال: أن أُقليدس هو أبو علم الهندسة، أو أبوقراط هو أبو علم الطب**"، ويقصد أن العلوم هي نتاج الشعوب على مر التاريخ.

ويقول كذلك *I. Newton(m.1727)* عندما نحقق إنجازا فذالك لأننا وقفنا على أكتاف العمالقة اللذين أتوا قبلنا، ونحن مدينون للمفكرين الذين شكلت أعمالهم أفكارنا.

ويعتقد *G. Sarton* بأن العرب كانوا من أعظم المعلمين في العالم، وأنهم زادوا على العلوم التي أخذوها، وأنهم لم يكتفوا بذلك، بل أوصلوها درجة جديرة بالاعتبار من حيث النمو والارتقاء. وقال كارا دي فو: "..

إن الميراث الذي تركه اليونان لم يحسن الرومان القيام به. أما العرب فقد أتقنوه وعملوا على تحسينه وإنمائه حتى سلموه إلى العصور الحديثة...".

يدعو *A. Conte(m.1857)* إلى ضرورة الاهتمام بتاريخ العلوم، بل سيقرر أنه لا يمكن أن نعرف علما من العلوم على حقيقته إلا إذا عرفنا تاريخه"**نحن مقتنعون اقتناعا راسخا أن معرفة تاريخ العلوم هو ذو أهمية قصوى، بل أعتقد أننا لا نعرف علما من العلوم بشكل تام ما لم نعرف تاريخه"**

علاقة الابستومولوجيا بتاريخ العلوم.

تتجلى العلاقة بين تاريخ العلم والابستومولوجيا، فمادامت هذه الأخيرة دراسة نقدية لمبادئ وفروض ونتائج العلوم المختلفة، فإنها تختبر النظريات والأنساق العلمية .. فتاريخ العلوم أطلعنا أن معارفنا ليست سوى مقاربات نسقية، و أن هناك عدة مقاربات ممكنة، فتاريخ الرياضيات مثلا يبين أن الهندسة الإقليدية أصبحت مجرد هندسة ممكنة –شأنها شأن الهندسات اللاأقليدية ونقصد بها هندسة *Riemann(m.1866)* و*Lobatchevski(m.1856)*– وليست الهندسة الوحيدة وهكذا فموضوع الابستومولوجيا هو مسار الفكر العلمي عبر التاريخ، لذلك فتاريخ العلم من منظور ابستومولوجي هو الذي يبحث عن الأسس المعرفية المتحكمة في المعرفة العلمية، كما أن الابستومولوجي لا يؤرخ للانتصارات العلمية فقط .. بل يؤرخ للخطأ والصواب، فيرى التاريخ قطائع وانفصالات.

Bachelard(m.1962) يتصور أن للفكر العلمي، أسلوبين أو نمطين من التأريخ:

- تأريخ يستهدف إثبات الوقائع العلمية في الديمومة اعتمادا على تحليل الوثائق العلمية ونقدها. حيث يقتصر مؤرخ العلم على وصف هذه الوقائع العلمية وإثبات انتمائها إلى زمان ومكان محددين.
- نوعا آخر من التأريخ يمكن أن نسميه تاريخا إبستمولوجيا، فإذا كان مؤرخ العلوم ينظر إلى الأفكار كما لو كانت وقائع، فإن الإبستمولوجي يعتبر الوقائع العلمية كما لو كانت أفكارا.

إن تاريخ العلوم ليس ذاكرة العلم فقط، إنما هو كذلك مختبر الإبستيمولوجيا.

يدعو *A. Conte* إلى ضرورة الاهتمام بتاريخ العلوم، بل سيقرر أنه لا يمكن أن نعرف علما من العلوم على حقيقته إلا إذا عرفنا تاريخه، فيقول: "**نحن مقتنعون اقتناعا راسخا أن معرفة تاريخ العلوم هو ذو أهمية قصوى، بل أعتقد أننا لا نعرف علما من العلوم بشكل تام ما لم نعرف تاريخه".**

أن العلوم التي نملكها اليوم نشأت تدريجيا وببطء كبير ولكنها استمرت في سيرها إلى أن انتهت إلى استقلالها من حيث المنهج ومن الموضوع.

أهمية دراسة تاريخ الرياضيات.

بدراسة تاريخ الرياضيات، كأننا نعيد اكتشاف الرياضيات كعلم وعلاقات ومبرهنات؛ لأننا نرصد نموها التاريخي، ولكن بشكل سريع أقرب منه إلى الشريط السينمائي في فترة زمنية محددة، وتؤكد لنا دراسة تاريخ الرياضيات على مثابرة وصبر العلماء في بحوثهم ومعالجاتهم لحل مسائل رياضية، كما فعل العالم المجري *Bolyai(m.1856)*، حيث كرس حياته بكاملها لدراسة مسلمة التوازي (**المسلمة الخامسة لإقليدس**)، ولم يحقق نتيجة، بينما توصل ابنه إلى فكرة الهندسة **اللاأقليدية**. هذه المسلمة الخامسة التي تطلبت دراستها من قِبل العلماء آلاف السنين، لكي يثبتوا استقلاليتها عن بقية مسلمات **أُقليدس**، أو إمكانية برهانها.

ونذكر أيضًا العالم النرويجي *N. Abel(m.1829)*، الذي كتب مذكراته الرياضية قبل ساعتين من إعدامه وهو رهين السجن، وكان لم يتجاوز الثلاثين من عمره، حيث أصبحت تلك الأفكار التي سجلها معلمًا هامًا، وفتحت آفاقًا واسعة في الرياضيات، وهي تنتمي إلى الرياضيات الحديثة (ق 19 م)، كما أن العالم الفرنسي *Galois(m.1832)* مات في مبارزة وهو في سن الحادية والعشرين، ولكنه ترك أثرًا ملحوظًا في الرياضيات الحديثة وأفكاره تعرف بنظرية *Galois*.

يؤكد ذلك أن النتاجات العظيمة للعقل البشري في مجال الرياضيات لها قصة وتاريخ شيق مليء بالأحداث والمفاجآت، بالنجاحات والإخفاقات، بالصبر والدروس الغنية للأجيال.

إن دراسة تاريخ الرياضيات، ولو بشكل موجز، تعطي للإنسان نظرة شاملة مترابطة حول نشوء وتطور الأفكار الرياضية، مما يساعد على بلورة منطق علمي تاريخي، ويؤكد على التواصل الحضاري.

إن التاريخ الذي تتدرج فيه ترجمة العلماء هو ذاته عند الجميع، نريد أن نتكلم عن زمن بروز حقيقة علمية وزمن إثباتها (تسارع أو تباطؤ). كما أن تاريخ الرياضيات لا ينحصر في تاريخ الأدوات والأكاديميات إلا إذا وُضعت في علاقة بالنظريات. ويعمل الباحث في تاريخ الرياضيات على:

- تبويب الوثائق وفرزها.
- وصف الأدوات والتقنيات.
- تفسير المسائل والمناهج.

- تحليل المفاهيم والأفكار وتتبع سيرورات تطورها ثم نقدها.

كما نضيف أيضاً أن دراسة تاريخ الرياضيات تعلم الدارس ما يلي:

- التفكير الموضوعي الذي يعتمد على الدليل.
- النظر إلى المعارف العلمية بشكل ديناميكي.
- عدم التسليم المطلق بالأشياء بل الجدل والسعي نحو الحقيقة.
- اعتماد روح الشك في التعامل مع القضايا الرياضية.
- احترام العلماء وتقدير جهودهم وتضحياتهم الشخصية.
- التواضع وعدم الغرور.

وأن ينظر الدارس لنفسه على أنه جزء من التطور وأن يحترم الفكر العلمي و لايستهين بالرأي الآخر. فهناك علماء اكتشفوا نظريات مهمة وجديدة، ولكنها وجدت مقاومة وعدم تقبل في حينها إلا بعد مرور عشرات السنين (هندسة لوباتشوفسكي اللاإقليدية) قوبلت بالرفض في وقتها ولكن فيما بعد اقتنع العلماء والأوساط العلمية بهذه الهندسة وعرفوا قيمتها العظيمة ولكن بعد موت *Lobatchevski* نفسه.

الفصل الأول

الريـاضيات البـابـليـة. 3500 ق.م– 60 ق.م

إن البحوث المنجزة خلال القرن التاسع عشر، أدَّت إلى العثور على 3000 **لوحة مسمارية**(ألواح طينية). حيث أن الباحثين *O. Neugebaur, Thureau-Dangn* قدما التفسيرات الأولى لهذه الألواح التي مكنت فيما بعد *Rutten, Bruins* من تقديم التحليل الرياضي(حوالي 300 لوحة تهم الرياضيات) لتعرف على مضمون الرياضيات البابلية.

1. نظام العد والحساب.

نظام العد البابلي مختلط ستيني (Sexagésimal)عشري(Décimal) ووضعي (أي الوضع مهم في كتابة الأرقام، وهذا الاختراع مهم لأنهم أول من اخترع الوضع للأرقام الذي يميز نظامنا العشري الحالي).

سؤال1. *في رأيك ما أهمية اعتماد الوضع للأرقام؟*

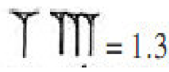
للبابليين رمزين مشهورين لكتابة وتمثيل أي عدد، هما:

 للوحدات  للعشرات

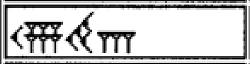
ملاحظة: في نظام العد الستيني يكتب العددN على شكل:

$$N = \overline{a_n \dots a_1 a_0} = a_0 + a_1.60 + a_2.60^2 + \dots + a_n.60^n$$

أمثلة:

90 = 

135 = 

Cuneiform	Transliteration	Decimal value
	1,15	75
	1,40	100
	16,43	1003
	44,26,40	160000
	1,24,51,10	305470

 : قد يمثل 1 أو 60 أو 60^2 أو 60^3 ... أو $60^{-1} = \frac{1}{60}$ أو $60^{-2} = \frac{1}{60^2}$

يمثل 30، أو نصف(نصف ساعة).

يمثل 80 أو واحد وثلث($1+\frac{20}{60}$).

سؤال2. *في رأيك لماذا فضل البابلي استعمال النظام الستيني؟*

الكسور بالمفهوم القديم هي الأجزاء (أي الكسر الذي صورته واحد ومقامه عدد طبيعي $\frac{1}{n}$، وهذا يختلف عن مفهوم الكسر فيما بعد عند العرب والهنود).

مضمون الجبر البابلي(الأدوات الجبرية)

العمليات الحسابية يعود تاريخها إلى 5000 سنة ق.م، المهم في تاريخ الرياضيات الوسائل المستعملة في هذه العمليات فالعمليات الحسابية +،−، x، : ، $\sqrt{\ }$ تظهر لأول مرة عند البابليين. وتوسع استعمال هذه العمليات إلى أشياء مجردة من مساحات وقياس ووزن، يعد قفزة نوعية في تطور الرياضيات.

والمسائل التي ظهرت لأول مرة في اللوحات الطينية− Tablettes d'argile−(مكتوبة بالكتابة المسمارية−Ecriture cunéiforme) أغلبها ذات طبيعة اقتصادية، حيث اشتملت على المتطابقات الشهيرة (التي كان يعتقد أنها من اختراع **أقليدس**- *Euclid*- حتى القرن 20 م).

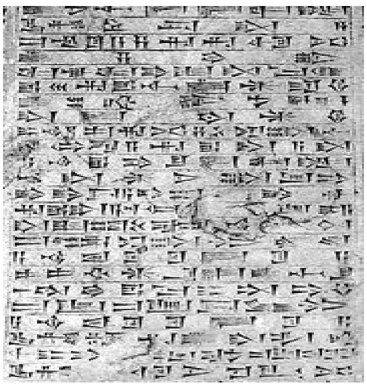
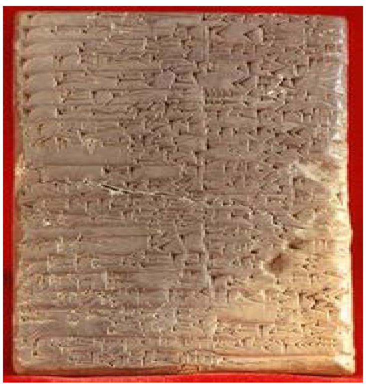
- المتطابقات الشهيرة:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \quad ، \quad (a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

$$(a+b)^2+(b-a)^2=2a^2+2b^2 \quad ، \quad ab=\frac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2}$$

$$ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$$

تعطى هذه النتائج عند البابليين دون برهان.

- مسائل جبرية (معادلات جبرية بالمفهوم الحديث: $x^2 + px = q$) غير معبر عنها بالرموز من مثل:

– حقل مربع نزيد عليه طول ضلعه يساوي 40.($x^2 + x = 40$).

– عند إنقاص طول ضلع مربع من مساحته نجد 14;30. ($x^2 - x = 14;30$).

حل هذه المسائل يعتمد على خوارزميات هي نفسها التي نعرفها اليوم.

- جمل معادلات(ذات مجهولين) مثل: حقل مستطيل مساحته 20 ومجموع طوله وعرضه 10.

عند كتابة هذه الجملة بالرموز العصرية نجد: $\begin{cases} x.y = 20 \\ x + y = 10 \end{cases}$ حل هذه المسألة يعتمد عند البابلي على وسيلة تسمى الزيادة والنقصان وذلك بوضع: $\begin{cases} x = \frac{s}{2} + a \\ y = \frac{s}{2} - a \end{cases}$ حيث أن: $x + y = s$ حل هذه الجملة يؤول إلى حل معادلة من الدرجة الثانية.

يظهر هنا جليا أن البابلي قد استعمل طريق تغيير المجهول بشكل جيد، وهذه خطوة هامة في تطور الرياضيات.

- مسائل من الشكل:

$$x^3 = a \text{ ، } x^2(x+1) = a \text{ ، } (x^3)^2 = a .$$

- لم يخترع البابليون كل الجبر، لأن البابلي كان يعيد دومًا نفس الطريقة في حلول المسائل المتعددة، ولم ينتبه إلى أن هناك وراء كل حلٍ خوارزمية مستقلة خاصة بالمسألة.

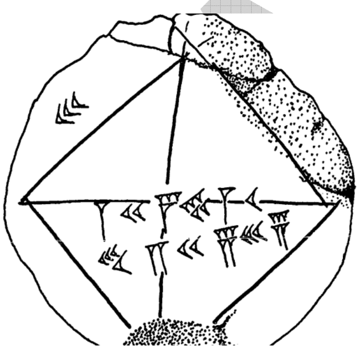
مسائل في التقريب:

- إحدى المسائل التي تم فيها استخدام $\sqrt{2}$ تم اكتشافها على لوحة طينية بحجم كف طفل كما في الشكل الرسم عبارة عن مربع تم رسم قطريه وكتب في منتصفه عددان هما:

$1;24,51,10$ ، $42;25,35$ وعلى أحد ضلعيه العدد 30

وعند تحويل العدد الأول للنظام العشري نجد:

$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$; 1.41421296 وهي قيمة مقربة $\sqrt{2}$



اللوحYBC-7289-bw

ملاحظة هامة: انتقل الحساب البابلي إلى اليونان من خلال النشاطات الفلكية، ولكن اليونانيون غيَّروا الأرقام، وتركوا الحروف المسمارية واستعملوا الحروف الأبجدية.

الهندسة والفلك:

أينعت الهندسة في الحضارة البابلية من جرّاء نشاطها التجاري والفلكي، فاكتشف البابليون (دون برهان):

- مساحة المربع والمستطيل وشبه المنحرف والمثلث
- الزاوية المرسومة في نصف دائرة قائمة.
- حجم متوازي المستطيلات والأسطوانة القائمة والموشور والهرم رغم وجود بعض الأخطاء.
- محيط الدائرة كثلاثة أضعاف القطر: $l = 3d$ ومساحتها بـ: $s = \dfrac{1}{12} l^2$
- تقدير قيمة العدد: π بـ 3، وفي بعض الأحيان استعمال القيمة $3 + \dfrac{1}{8}$.
- استعمال ما يعرف الآن بـ مبرهنة فيثاغورث، من خلال ثلاثيات تحقق هذه المبرهنة (اللوح: Plimpton 322)
- الميل البابلي(حوالي10km)، وهي وحدة قياس مسافة تعادل تقريبا سبعة أميال اليوم.

وفي مجال الفلك فإن للبابليين مشاهدات دقيقة عن كوكب الزهراء، كما وضعوا جداول نجميه، وسرعان ما تنبؤا بحدوث كسوفات. كما استعمل البابليون حساب المثلثات وحساب الزوايا في التنبؤ بمواعيد كسوف الشمس وخسوف القمر، وهذه المواعيد كانت مرتبطة بعباداتهم.

تمرين(بابلي): ما هو نصف قطر الدائرة التي تلامس رؤوس مثلث متساوي الساقين، حيث أن أطوال أضلاع المثلث هي 50، 50، 60.

مـلاحظة:

في الأخير نشير أن البابلي لم تكن له الحلول والخوارزميات النموذجية العامة ل لحل معادلات من الدرجة الثانية، الذي سنراه عند الخوارزمي لاحقا عند تعريفه للجبر.

كما أننا لم نجد في الرياضيات البابلية إشارة إلى مصدر أو اسم لرياضي أو عنوان لكتاب، ولم نجد طريقة واضحة في العمليات الحسابية غي أن النتيجة صحيحة ودقيقة في غالب الأحيان.

لا تعتقد أن الرياضيات في تطور مستمر دائما، نظرتنا لحد الآن نسبية. فهناك تراجع وتقهقر والدليل على ذلك هو أن البابليين متقدمين على غيرهم في نظام العد الستيني وعدم التجانس، الشيء الذي لا نجده في الرياضيات اليونانية (الرياضي اليوناني لا يستطيع جمع مساحة مع طول).

تمرين.

حلل المسألة. 0. جمعت مساحة مربعي:;25 ,25 أحدهما ثلثي الأخر و;5

1. تسجل ;1 و40 ;0 و ;5
2. تضرب ; 5 و;5 : ; 25
3. تطرح ;25 من ;25 ,25 : سجل : ;0 ,25
4. تضرب ;1 و ;1: ;1
5. تضرب 40 ;0 و 40; 0 : 40 ,26 ;0
6. تضيف 40 ,26 ;0 إلى;1 : 40 ,26 ;1
7. تحمل 40 ,26 ;1 إلى ; 25,0: سجل : 40 ;6 ,36
8. تحمل 40 ;0 إلى ;5 : 20 ;3
9. تضرب 20 ;3 و 20 ;3 : 40 ,6 ;11
10. تضيف 40 ,6 ;11 إلى 40 ; 6 ,36 : 40 ,46 ;36,17
11. هو مربع 40 ;46
12. 20; 3 الذي ضربته من 40 ;46 تطرحه: سجل 20 ;43
13. مقلوب 40 ,26 ; 1 لا يمكن فصله
14. ماذا يجب افتراضه لـ 40 ,26 ;1 ليعطي20 ;43 ؟
15. تحمل ;30 الى ;1: ;30 هو المربع الاول
16. تحمل ;30 الى 40; 0: ;20 ، تضيف ;20 و ; 5: ;25 هو المربـع.

الحل.

التحليل الرياضي	المسألة
بفرض ضلعي المربعين هما: a, b فالمسألة تؤول الى جملة معادلتين: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 25{,}25 \\ b = 0;\ 40.a + 5; \end{cases}$ بوضع $\begin{cases} a = mx \\ b = nx + p \end{cases}$ $m = 1, \quad n = \frac{2}{3}, \quad p = 5$ $p^2 = 5 \times 5 = 25$ $q - p^2 = 25{,}0;$ $m^2 = 1$ $n^2 = 0; 26{,}40$	1.تسجل ;1 و40 ;0 و ;5 2.تضرب ; 5 و;5 : ; 25 3.تطرح ;25 من ;25 ,25 : سجل : ;0 ,25 4.تضرب ;1 و ;1: ;1 5.تضرب 40 ;0 و 40; 0 : 40 ,26 ;0 6.تضيف 40 ,26 ;0 إلى;1 : 40 ,26 ;1 7.تحمل 40 ,26 ;1 إلى ; 25,0: سجل : 40 ;6 ,36 8.تحمل 40 ;0 إلى ;5 : 20 ;3

9. تضرب 3; 20 و 3; 20 : 11; 6, 40
10. تضيف 11; 6, 40 إلى 36, 6 ; 40 : 36,17; 46, 40
11. هو مربع 46; 40
12. 20; 3 الذي ضربته من 46; 40 تطرحه: سجل 43; 20
13. مقلوب 1 ; 26, 20 لا يمكن فصله
14. ماذا يجب افتراضه لـ1; 26, 40 ليعطي43; 20 ؟ 30; هو الحاصل
15. تحمل 30; الى 1: 30; هو المربع الاول.
16. تحمل 30; الى40; 0: 20; ، تضيف 20; و 5: 25; هو المربع.

$$m^2+n^2=1;26{,}40$$
$$(m^2+n^2)(q-p^2)=1;26{,}40\times 25{,}0;$$
$$=36,6;40$$
$$np=0.4\times 5;=3;20$$
$$(np)^2=3;20\times 3;20=11;6{,}40$$
$$np+(m^2+n^2)(q-p^2)=36{,}17;46{,}40$$
$$\sqrt{np+(m^2+n^2)(q-p^2)}=46;40$$
$$\sqrt{np+(m^2+n^2)(q-p^2)}-np=43;20$$
$$\frac{1}{(m^2+n^2)}=؟$$
$$\frac{\sqrt{np+(m^2+n^2)(q-p^2)}-np}{(m^2+n^2)}=30;$$
$$a=mx=30;\times 1;=30;$$
$$b=nx+p=0.4\times 30;+5;=25;$$

حل العام للمسألة (جملة معادلتين بمجهولين)

$$\begin{cases} a^2+b^2=q \\ mb=nx+r \end{cases}$$

بحسب الإجراءات يكون الكاتب قد حل الجملة باستعمال هذه الحيلة:

$$\begin{cases} a=\boldsymbol{m}x \\ b=\boldsymbol{n}x+\boldsymbol{p} \end{cases}$$

بالتربيع ينتج:

$$a^2+b^2=m^2x^2+n^2x^2+\boldsymbol{p^2}+2npx$$

بالمقارنة نجد:

$$\boldsymbol{m^2}x^2+\boldsymbol{n^2}x^2+2npx=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p^2}$$

وعليه تصبح المعادلة من الشكل:

$$(\boldsymbol{m^2}+\boldsymbol{n^2})x^2+2npx=q-p^2\ \ldots(*)$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية من الشكل:

$$ax^2+bx=c,\quad a,b,c\in\mathbb{Q}_+$$

وباستعمال طريقة **اكمال المربع**، التي يعرفها البابلي ينتج(في المرحلة 1):

$$(m^2+n^2)^2x^2+2np(m^2+n^2)x=(\boldsymbol{m^2}+\boldsymbol{n^2})(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p^2})$$

وفي المرحلة 2:

$$(m^2+n^2)^2x^2+2\boldsymbol{np}(m^2+n^2)x+n^2p^2=\boldsymbol{n^2p^2}+(m^2+n^2)(q-p^2)$$

وعليه:

$$\left((m^2+n^2)x+np\right)^2=\boldsymbol{n^2p^2}+(\boldsymbol{m^2}+\boldsymbol{n^2})(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p^2})$$

إذا:

$$(m^2+n^2)x+np=\sqrt{n^2p^2+(m^2+n^2)(q-p^2)}$$

وعليه:

$$(m^2+n^2)x=\sqrt{\boldsymbol{n^2p^2}+(\boldsymbol{m^2}+\boldsymbol{n^2})(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p^2})}-\boldsymbol{np}$$

فتكون قيمة x هي:

$$x=\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{m^2}+\boldsymbol{n^2})}\left(\sqrt{\boldsymbol{n^2p^2}+(\boldsymbol{m^2}+\boldsymbol{n^2})(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p^2})}-\boldsymbol{np}\right)$$

ومنه: $a=mx$

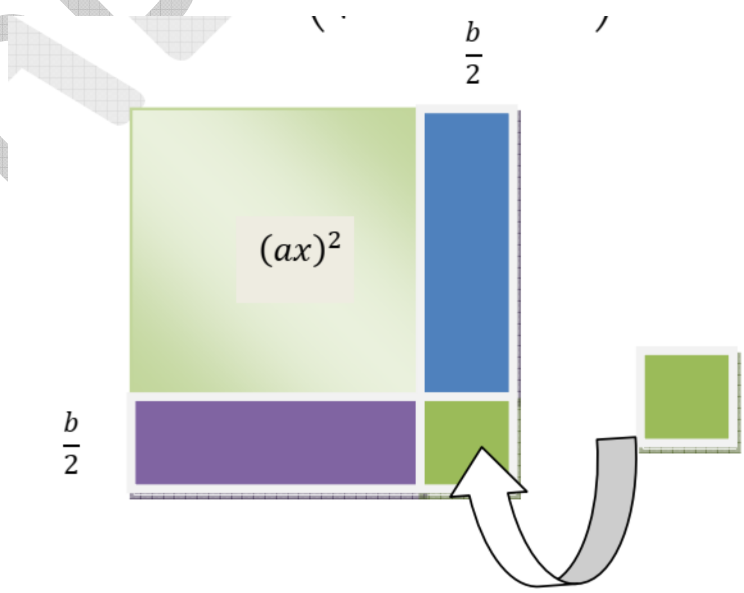
وأخيرا يستنتج قيمة b من المعادلة الثانية: $b=ny+p.$

طريقة اكمال المربع عند البابلي:

$$ax^2+bx=c\Leftrightarrow(ax)^2+bax=ac\Leftrightarrow(ax)^2+2\frac{b}{2}ax+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+ac$$

$$\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+ac\Leftrightarrow ax+\frac{b}{2}=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+ac}\Leftrightarrow ax=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+ac}-\frac{b}{2}$$

$$x=\frac{1}{a}\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+ac}-\frac{b}{2}\right)$$



الفصل الثاني

الرياضيات المصرية.4000ق.م– 700ق.م

كانت لمصر خصائصها الطبيعية والبشرية المتميزة مما أعطى لثقافة قدماء المصريين مكاناً فريداً في التاريخ، فنهر النيل عاملاً طبيعياً له الأثر البالغ في تشكيل حضارة مصر، فهناك مشكلات مسح الأراضي وتحديد معالم حدودها بعد فيضان النيل. ذلك دفع المصريين للبحث عن وسيلة لمسح الأراضي الزراعية وقد كانت الحاجة ماسة إلى حساب هذه المساحات وقياس ارتفاع الماء، فكان لنهر النيل الفضل في بزوغ فجر الرياضيات في مصر. فالأهرام والمعابد وما فيها من دقة حسابية وإبداع هندسي يدل على تقدم علمي في هذه الفترة.

تم العثور سنة 1858م على أول وثيقة للنشاط الرياضي المصري في أهرامات مصر، يعود تاريخها إلى 1650ق.م وتسمى بـ **بردية ريند** (Papyrus Rhind)مكتوبة بالخط الهيروغلافي-Hiéroglyphi- كتبها كاتب يسمى **أحمس**، (مكتوبة على ورق خاص مصنوع من القصب، ويكتب عليه من الجهتين، ويدعى **الورق البُردي**) و تحوي على أكثر من 85 مسألة رياضية، تضمنت[العد وكتابة الأرقام والعمليات الحسابية، والكسور، التربيع والجذر التربيعي، المتتاليات، طريقة **الخطأ الواحد** في حل معادلات من الدرجة الأولى، معادلات من الدرجة 2، مسائل هندسية]، وهي موجودة في المتحف البريطاني(رقم 10058 &10059) وفقرة أخرى منها موجودة في نيويورك، توجد كذلك بمتحف موسكو بردية أخرى تحتوي على الكثير من المسائل العددية (حوالي 25 مسألة).

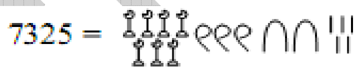
الخط الهيروغلافي: هي أولى الخطوط التي كتب بها المصري القديم لغته، وقد أشتقت كلمة هيروغليفي من الكلمتين اليونانيتين، هيروس (Hieros) وجلوفوس (Glophos)، وتعنيان الكتابة المقدسة. حيث أنها كانت تستخدم للكتابة على جدران الأماكن المقدسة، مثل المعابد والمقابر. وتتكون الكتابة الهيروغليفية من مجموعة من النقوش المستمدة من الحياة اليومية، فهي كتابة تصويرية، بالإضافة لوجود حروف أبجدية، وإنْ كانت أكثر تعقيدًا من الأبجدية المعروفة الآن في اللغات المنتشرة.

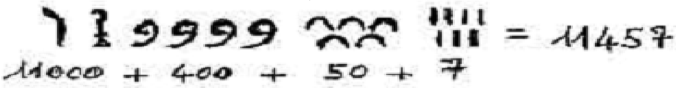
1/الحساب:

نظام العد عند المصريين **عشري غير وضعي** يعتمد على الرموز:

Le Papyrus Rhind : au British Muséum, N° 10057 et 10058

أمثلة:





العمليات الحسابية:

الجمع = وضع شيء إلى جانب آخر Addition = Juxtaposition

الطرح = التبسيط Soustraction = Simplification

الضرب: الضرب ما هو إلاّ تتابع تضعيف للعدد المضروب، فما هو إلاّ حساب بواسطة الجمع والطرح.

القسمة: عكس التضعيف، بمعنى هي التنصيف(Demidiation)، مع بعض الاستثناءات.

ملاحظة: الضرب والقسمة عند المصريين، هما عمليتان مختلفتان تمامًا عن عمليتي الضرب والقسمة عند الشعوب الأخرى.

مثال1: اضرب 15 في 7.

15	1
30	2
60	4
120	8

غير أننا لا نحتاج إلى الخطوة الأخيرة، لأننا تجاوزنا 7 . وللحصول على نتيجة الضرب يكفي جمع ما يقابل العدد 7 (لأن 7 = 1 + 2 + 4). أي 15 في 7 تساوي 15 + 30 + 60 = 105.

مثال2: اقسم 112 على 8.

1	8
2	16
4	32
8	64

بمأن (112=16+32+64) فإن (14=8+4+2) هو حاصل القسمة

نجد أن عملتي الضرب والقسمة بهذه الطريقة موجودة فقط عند المصريين، وهي كما نلاحظ لا تعتمد على الذاكرة أو جداول الضرب، غير أنها طويلة.

<u>الكسور:</u>

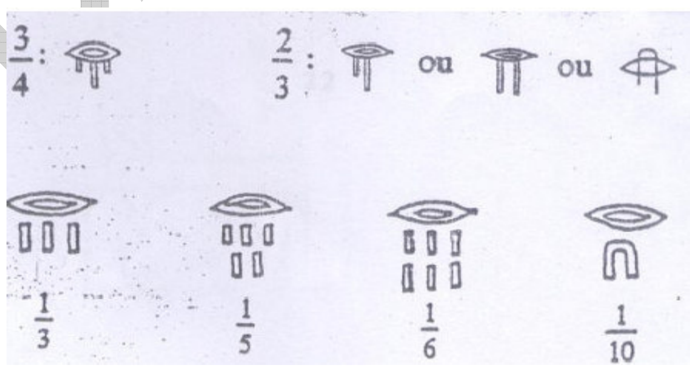
فكرة المصريين في الكسور العددية تعتمد على الأجزاء فقط($\frac{1}{n}$ حيث n عدد طبيعي)، كما استعملوا كسرين تكميليين هما $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ للتعبير عن الباقي من العدد بعد أخذ جزء من ثلاثة أو من أربعة، وكان استعمالهم للكسر الأول شائع جدا وعبروا عنه برمز خاص غلب وروده في النصوص الرياضية المصرية عكس الثاني.

ولهم القدرة للتعبير عن $\frac{2}{3}$ لكل جزء حسب القاعدة التالية في حالة n فردي: $\frac{2}{3}\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}$

وتجدر الملاحظة أن برديةRhind تبدأ بجداول لتجزئة $\frac{2}{n}$ إلى مجموع أجزء من $n = 3$ إلى $n = 101$

مثل: $\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$ ، $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

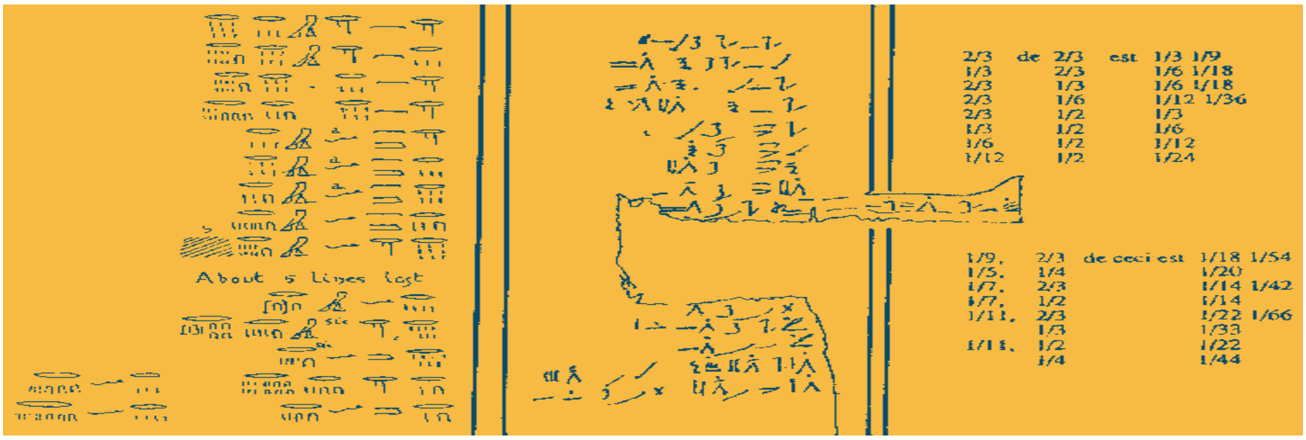
ويدل وضع هذه الجداول في البداية على طبيعتها فهي تجمع بين ما هو نظري وعملي.



 $= \frac{1}{2}$.  $= \frac{2}{3}$  $= \frac{3}{4}$

نجد كذلك لدى المصريين هذه القواعد: $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$; $\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

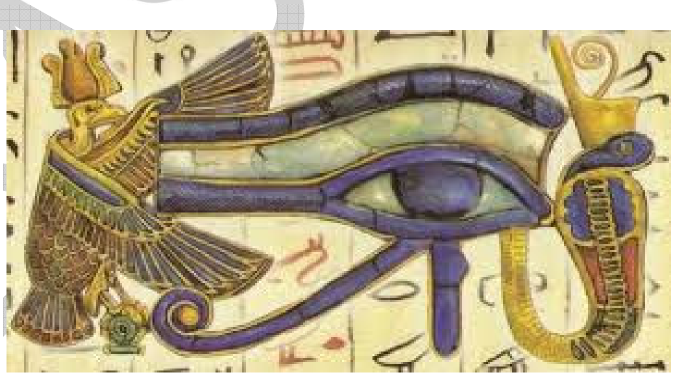
$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{6}$; $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$; $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$.

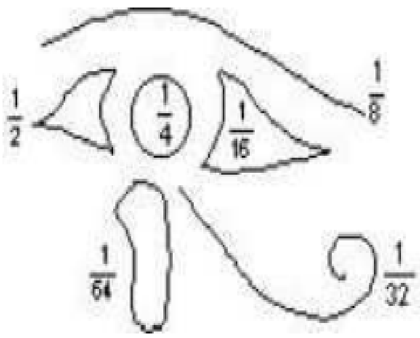


هذا الجدول وجد في بداية رق Rhind في الوجه الخلفي، والنص متلف جدًا. أعطى هذا الجدول نتائج لبعض الجداءات الكسرية.

عين أودجات

جزء العين اليساري 1/2 (أي 32/64)، حدقة العين 1/4 (أي 16/64)، الحاجب1/8 (أي 8/64)، جزء الأيمن من العين1/16 (أي 4/64)، رمش 1/32 (أي 2/64)، دمعة 1/64





استخدمت عين حورس(أودجات) لتمثيل الكسور على الشكل

$$1 \neq 63/64 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64$$

2/ الجبر

- من بين المسائل الموجودة في بردية ريند وموسكو توجد 40 مسألة حسابية تعتمد حلولها على بعض المعادلات الخطية كلها مستمدة من الحياة اليومية مثل تقسيم الأرغفة والكيل والحيوانات. معادلات من الدرجة الأولى محلولة بطريقة **الخطأ الواحد** (*Fausse position*). ويطلق على الكمية المجهولة ***"كومة"*** وتمثل وتنطق ب<<*aha*>> وهي من النوع: $x + ax = b\,;\ \ x + ax + cx = b$.

حل معادلة من الشكل $ax = b$ بطريقة الخطأ الواحد:

نفرض للمجهول قيمة x_0 عندئذ: $ax_0 = b_0$ ومنه الحل هو: $x = \frac{bx_0}{b_0}$.

مثال.

في مدونة فرعونية لدينا المسألة التالية: "كمية مع خمسها يساوي 21". ما هي هذه الكمية؟

وخطوات الحل في الحالة العامة هي:

1. نضع $x_0 = n$ قيمة الخطأ
2. نحسب على $(n+1)$ للحصول على m (يعني البحث عن حاصل قسمة m على $n+1$)
3. نضرب الناتج من قسمة m على $\mathrm{n}+1$ في n

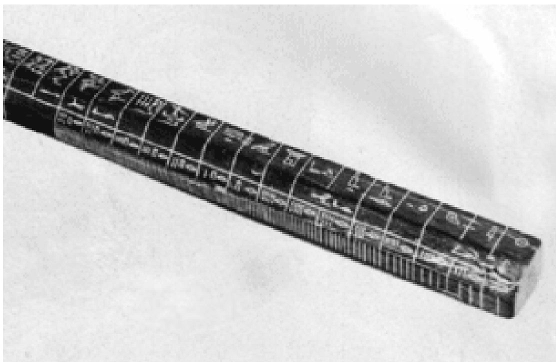
– اخير يكون: $x = \left(\frac{m}{n+1}\right) \times x_0$ وهي مرحلة التحقق من الحل.

ومسائل مختلفة كجملة المعادلتين الآتية:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x = \frac{3}{4}y \end{cases}$$

(المسألة موجودة في بردية برلين رقم – 6619 –)

وعموما وجود معادلات من الشكل: $ax^2 = b$ وجمل معادلات: $x^2 + y^2 = a, x = by$



مسطرة مصرية 52سم (متحف اللوفر-فرنسا)

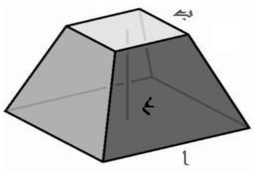
تعود إلى وزير المالية لتوتنخمون.

3/الهندسة:

إن الحضارة المصرية (4000 ق.م – 760 ق.م) تعتبر بحق مهد الهندسة، فقد كان شيخ مؤرخي الإغريق هيرودوت (Herodotus) (484 ق.م–420 ق.م) يرى بأن مصر سبقت غيرها في معرفة الهندسة وعنها أخذ الإغريق. ففيضان النيل سنويا يلزمهم بإعادة رسم هذه الحدود، مما جعلهم يلمون بكثير من الخصائص الهندسية للأشكال، فعرفوا: مساحة المثلث والمستطيل وشبه المنحرف والدائرة،

وحجم المكعب ومتوازي المستطيلات والموشور والأسطوانة وهذا دون وجود البرهان. وكانت لديهم أيضا قواعد خاطئة، كقاعدة حساب مساحة الشكل الرباعي. مثلا:

حساب حجم هرم المقطوع وفق القاعدة: $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$



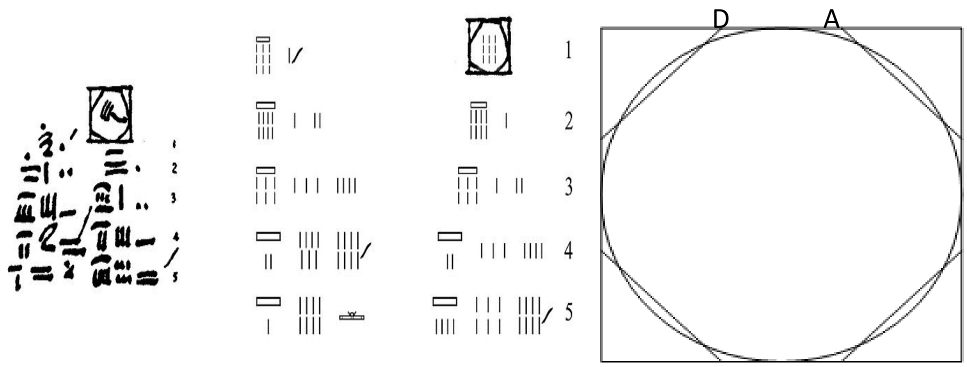
العدد π ومسألة تربيع الدائرة

نرسم في مربع طول ضلعه 9 كما في الشكل، مثمن الأضلاع بحيث $AD = 3$

مساحة المثمن = مساحة المربع – مساحة المثلثات

$$s = 81 - 4.\frac{3.3}{2} = 63$$

مساحة المثمن تقريبا هي نفس مساحة مربع طول ضلعه 8. لتكن الدائرة التي قطرها l ، المربع الذي طول ضلعه $\frac{8l}{9}$ يكافئ تقريبا مساحة هذه الدائرة وبالتالي نستنتج : $\pi = \frac{256}{81}$



– نظرية المثلث القائم الزاوية (فيثاغورث)عن طريق بسط حبل مقسم إلى ثلاثة أقسام. مثلا 3،4،5 لبناء زوايا قائمة.

الفصل الثالث

الرياضيات اليونانية 13ق.م–6م

1 – نظام العد والعمليات الحسابية:

لا نعرف سوى الشيء القليل عنه، غير أنه يعتمد على الحروف الأبجدية ذات الأصل الفينيقي وهي 24 حرفا. ونظام العد **عشري غير وضعي**.

Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	ϡ
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ϙ
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϛ	Ζ	Η	Θ
α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9

alpha	Α	α	ksi	Ξ	ξ
beta	Β	β	omicron	Ο	ο
gamma	Γ	γ	pi	Π	π
delta	Δ	δ	koppa	–	–
epsilon	Ε	ε	rho	Ρ	ρ
digamma	–	–	sigma	Σ	σ
zeta	Ζ	ζ	tau	Τ	τ
eta	Η	η	upsilon	Υ	υ
theta	Θ	θ	phi	Φ	φ
iota	Ι	ι	chi	Χ	χ
kappa	Κ	κ	psi	Ψ	ψ
lambda	Λ	λ	omega	Ω	ω
mu	Μ	μ	san	–	–
nu	Ν	ν			

$L'' = \frac{1}{2}$, $\alpha L'' = 1\frac{1}{2}$, $\gamma L'' = 3\frac{1}{2}$.

Milliers		Dizaines de mille	
1 000	͵Α	10 000	$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$ (ou ΜΥ)
2 000	͵Β	20 000	$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$
3 000	͵Γ	30 000	$\overset{\Gamma}{\mathrm{M}}$
4 000	͵Δ	40 000	$\overset{\Delta}{\mathrm{M}}$
5 000	͵Ε	50 000	$\overset{E}{\mathrm{M}}$
6 000	͵F	60 000	$\overset{F}{\mathrm{M}}$
7 000	͵Ζ	70 000	$\overset{Z}{\mathrm{M}}$
8 000	͵Η	80 000	$\overset{H}{\mathrm{M}}$
9 000	͵Θ	90 000	$\overset{\Theta}{\mathrm{M}}$

أمثلة:

σλα = 231 ; ωπδ = 884 ،12=βι ،21=αk

$'a = 1000$ ، $\overset{b}{M} = 20000$ ، $M = 10000$

$$M^{\sigma\lambda\alpha} = 2310000$$

2- علم العدد. من أمهات الكتب التي وصلت إلينا في هذا الميدان من خلال الترجمات العربية ابتداء من القرن 8 الميلادي نجد:

- *المُدخل إلى علم العدد(الأريتماطيقي)*[*Introduction à l'arithmétique*] لـ: **Nicomaque de Gérase** **نيقوماخس** عاش في القرن الأول/ الثاني الميلادي.

يعتبر هذا الكتاب خلاصة النشاط الرياضي اليوناني في ميدان علم العدد في المرحلة السابقة. ترجمه **ثابت بن قرة الحراني** (836م -901م).

- الأريتماطيقي[*les Arithmétiques*] لـ:**Diophante** (ديوفنطس) عاش في القرن 3 الميلادي.

ترجمه قسطا بن لوقا البعلبكي (ت.910م) بعنوان" *صناعة الجبر لديوفنطس*"ولم يترجم باسم العدديات أو الحساب لان المترجم قرأ الكتاب قراءة جبرية.

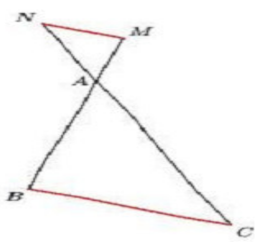
3-الهندسة.

هي بحر العلوم اليونانية، وهي الميدان الذي اهتم به الإغريق، ليس فقط من جانب المضمون، بل جُعلت أساس للرياضيات. ونتعرض فيما يلي لبعض أعلام هذا الميدان:

1-طالس (625 -547 ق.م)Thalès de Milet

يعتبر مؤسس الهندسة اليونانية، وهو أول من استخدم الاستنتاج ولد بمدينة ميلات -Milet-. بعض ما توصل إليه:

- **الزاوية المرسومة في نصف الدائرة زاوية قائمة.**
- **أضلاع المثلثات المتشابهة متناسبة.**
- **قياس طول الهرم الأكبر.**



$$\frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM} = \frac{NM}{BC}$$

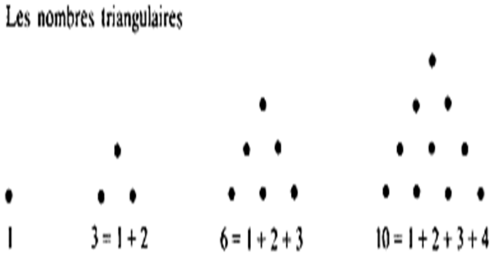
2-فيثاغورث (نحو572 -495 ق.م)Pythagore de Samos

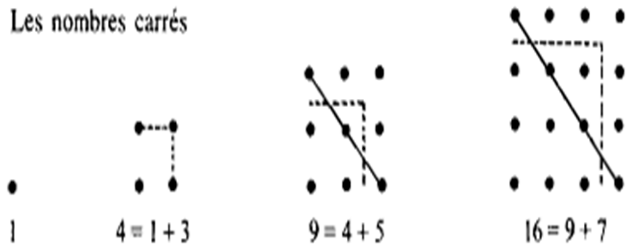
ولد في ساموس بالقرب من شواطئ آسيا الصغرى، درس على يد طالس، وعندما بلغ من العمر خمسين عاما ذهب ليعيش في بلدة اسمها كروتونا في جنوب إيطاليا، وهناك كون مدرسة في فلسفة الرياضيات. وهي أول مدرسه نموذجية عرفت في التاريخ، حيث لا ينسب نتاج المدرسة للفرد بل

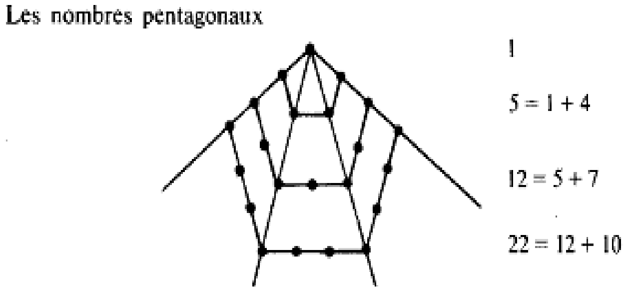
للمجموعة المعروفين بالإخوة الفيثاغورسيين، وبقيت على نشاطها مدة قاربت 150عام. ومن أهم مبدئها الاعتقاد بأن "**الأعداد**"هي سر الكون وعنها تنشأ جميع الأشياء، وأن أي شيء يمكن التعبير عنه بالأعداد.

أهم نتائجها:

- **تصنيف الأعداد: الفردية والزوجية، المثلثية والمربعة، المضلعة.**





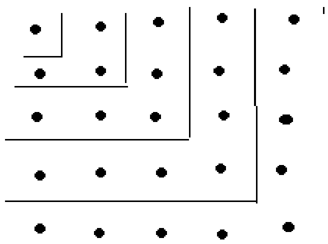


- **حساب مجاميع بعض المتتاليات من مثل:**

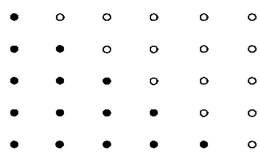
$$n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2,$$

$$m^2+(2m+1)=(m+1)^2,$$

علاقات فيتاغورسية



$$\sum_{r=0}^{n-1}(2r+1)=n^2$$

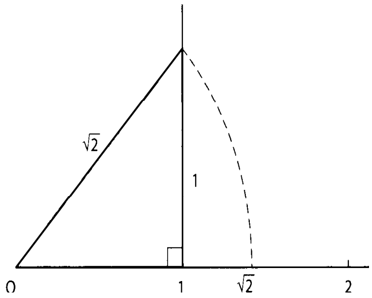


$$1+2+3+4+5=(5\times 6)/2=15$$

$$1+\ 2+\ ...+\ n=\frac{n}{2}(n+1)$$

- **تصنيف ا لأعداد**

- الأعداد المتحابة: إذا كان كل منهما يساوي مجموع قواسم الآخر. مثل: 220، 284.
- الأعداد التامة: يكون العدد تاما إذا كان مساو لمجموع عوامله الاعتيادية. مثل: 6
- العدد الناقص: يكون العدد ناقصا إذا زاد عن مجموع عوامله. مثل: 8
- العدد الزائد: يكون العدد زائد إذا قل عن مجموع عوامله.
- **الأعداد الأولية.**



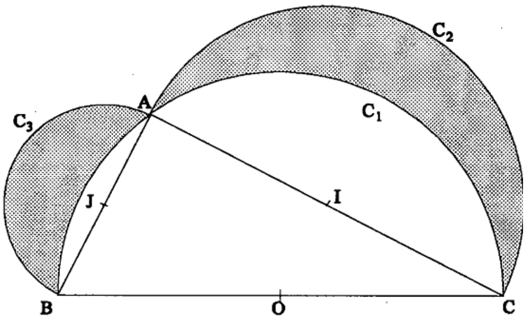
ومن أهم المشاكل التي وجهتهم هي مشكلة الأعداد الصماء، فمثلا:
عند البحث عن العدد x في الثلاثية $(1,1,x)$ لتكون ثلاثية فيتاغورسية
نجد: $x = \sqrt{2}$ فهو عدد قابل للإنشاء لكنه غير مقيس.

– في هذه المدرسة بدأ تعريف الخط المستقيم، الدائرة، المماس التي تعتبر مفاهيم الهندسية مجردة بعيدة عن التجربة الحسية.

3-ابقراط الخيوسي Hippocrate de chios(ت.حوالي 430– ق.م)

بذل جهدا عظيما في محاولة حل المسائل الثلاث الشهيرة (تربيع الدائرة، تضعيف مكعب، تثليث زاوية)[1]، حيث أنه نجح في مسألة تربيع الهلال(إنشاء هلال مساحته تساوي مساحة مربع). وإليه كذلك تنسب النظرية الهندسية:

– النسبة بين مساحتي دائرتين كالنسبة بين مربعي قطريهما.



تمرين:

ليكن المثلث ABC القائم في A; C_1,C_2,C_3 أنصاف الدوائر ذات المراكز O,I,J منتصفات القطع $[AB]$,$[AC]$,$[BC]$ على الترتيب. اثبت أن المساحة المضللة (مساحة الهلالين) تساوي مساحة المثلث ABC.

وممن ساهموا في تطوير الهندسة والفكر الرياضي لدى اليونان نجد:

4– أفلاطون Platon (429–347 ق.م) Plátōn (Πλάτων) هو أرسطوقليس، الملقَّب بأفلاطون بسبب ضخامة جسمه، وأشهر فلاسفة اليونان. في أثينا عام (387 ق.م) أسس مدرسة للفلسفة والعلوم عُرِفَت باسم الأكاديمية، وكان الفيلسوف أرسطو من أبرز تلاميذه.

[1] – من المسائل العويصة التي حيرت رياضي اليونان... والعرب والتي لم تجد حلا لها إلا بعد القرن 18 الميلادي على إثر التطور الذي شهده الجبر بعد أعمال Wantzel, Gauss, Galois، حيث بُرهن على استحالت حل المسألتين الأولى والثانية والمسألة الثالثة تقبل حلولا في حالات خاصة. **تربيع الدائرة:** إنشاء مربع مساحته تساوي مساحة دائرة معلومة. **تضعيف مكعب:** إنشاء مكعب حجمه ضعف حجم مكعب معلوم. **تثليث زاوية:** بواسطة المدور ومسطرة غير مدرجة تقسيم زاوية معلومة إلى ثلاث أقسام متقايسة.

عمل على نظرية الأعداد، ووضع بعض المسلمات، ودرس متعددات السطوح المنتظمة المحدبة **(Polyèdres réguliers convexes)المعروفة بـ "Solides de Platon"**.

6-زينون الإيلي Zénon (القرن 5-ق.م)

7-يودكسوس الكنيدي Eudoxe deCnide (408-**355**ق.م).

فلكي ورياضياتي وطبيب يوناني، من تلاميذ أفلاطون، أكثر ما عُرف عنه هو أنه من الأوائل اللذين حاولوا وضع نظرية حول حركة الكواكب. وضع نظرية النسب/ المقالة الخامسة من كتاب **أقليدس**.

8-أرسطو Aristote (384-322 ق.م)

تلميذ أفلاطون، وضع أسس المنطق، مفهوم الاستمرارية واللا نهاية.

اشترط في سبيل بناء المنهج العلمي، أن تبنى المعرفة عن طريق البرهان الذي يقوم على البديهيات والمسلمات والتعريف.

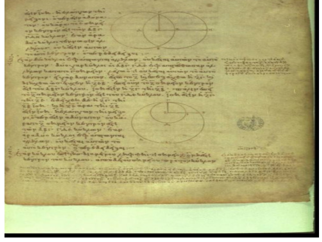
9-أقليدس Euclide (315-255 ق.م).

قد جئنا إلى أشهر رياضي العالم وأعمقهم أثرًا، يقول عنه **ابن النديم** (ت. 990م) في كتابه *الفهرست*: "**هو أُقليدس بن نوقطرس بن برنيقس، المظهر للهندسة المبرز فيها أقدم من أرخميدس وغيرهم وهو من الفلاسفة الرياضيين**". ليس لدينا معلومات عن حياته، ومن أعظم مؤلفاته كتاب "**الأصول**" أو **الأركان** أو**الأسطقساة** ***Les Eléments* d'Euclide** الذي يتألف من 10 مقالات في الهندسة المستوية [من1-10] و3 في الهندسة المجسمة[من11-13].

عالجت الكتب من 1-6 الهندسة مستوية: التعريفات، البديهيات(Les Axioms) ، المسلمات (Les postulats ou Les demandes)، المثلثات، المتتاليات، هندسة الدائرة، المضلعات المنتظمة.

بينما الكتب من 7-10 عالجت الحساب ونظرية الأعداد [تعالج الأعداد الأولية، المضاعف المشترك، والمستقيمات غير الجذرية (المستقيمات التي يمكن أن تمثل بالعبارة: $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$)].





كتاب الاصول

وفي عمله هذا سار **أقليدس** على منهج **أرسطو** العلمي، وذلك على النحو التالي: أن يبدأ كل مقالة بتعريفات تحدد كل ما تشتمل عليه المقالة من مفاهيم جديدة.

حيث أن المقالة الأولى، شملت على ثلاثة وعشرون تعريفا وتسع بديهيات وخمس مسلمات.

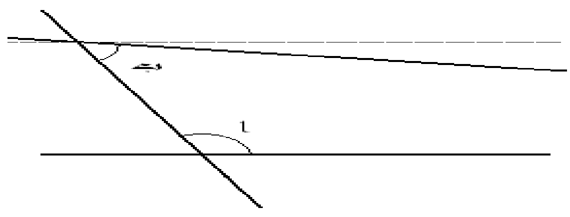
التعاريف: نذكر منها:

- النقطة: هي شيء لا جزء له.
- الخط: ذو طول فقط.
- البسيط (السطح): ذو طول وعرض فقط.
- الزاوية البسيطة المستقيمة الخطين: هي انحراف أحدهما عن الأخر، موضوعين على غير استقامة .
- التوازي: إن لم يقم أحد الخطين على الأخر البتة، وإن أخرجا في كلتا الجهتين بلا نهاية وهما في سطح واحد فيقال لهما المتوازيان.

المسلمات:

1. مد مستقيم بين أي نقطتين مفروضتين.
2. مد أي مستقيم بقدر ما نشاء.
3. رسم دائرة حول أي مركز وبأي نصف قطر.
4. كل الزوايا القائمة متساوية.
5. إذا وقع خط على خطين فكان مجموع الزاويتين الداخليتين في أي من جهتيهِ أقل من قائمتين، فإن الخطين إذا مُدا في تلك الجهة يلتقيان.

المسلمة 5:



صار جدل كبير حول هذه المسلمة باعتبارها كمبرهنة يجب إثباتها

وهذا بافتراض مسلمات أخرى مكافئة لها ومن هؤلاء **بروكلس**

وبَطليموس (Ptolémée)وعمر **الخيام** (ت. 1131م) و**نصير الدين الطوسي** (1201م–1274م) الذي جعل لها *الرسالة الشافية*، والإيطالي **ساكيري** (Saccheri)(1667م–1733م). كل هذا كان سببا لبداية

ظهور هندسه أخرى تسمى الهندسة اللاأقليدية [هندسة **بولياي** Bolyai و**ريمان** Riemann، **لوبتشوفسكي** Lobatchevski]

منهجية أقليدس في عرض المبرهنات فتتمثل في:

1. إعطاء نص المبرهنة.
2. إعطاء قانون خاص، يتمثل بشكل محدد بحروف أبجدية، ونص يبين أن الشكل يطابق ما في نص المبرهنة، مبينا المعطيات والمطلوب.
3. إعطاء البرهان عن طريق الإنشاء الهندسي بواسطة المدور والمسطرة.
4. ثمّ يأتي نص يبين أن المبرهنة قد تحققت، ويعقب ذلك عبارة "وهذا هو المطلوب".

وبهذا نجد أن أقليدس يعرض البرهان دون أن يذكر كيف حصل عليه، معتمدا على الطريقة التركيبية، إلا أنه في بعض البراهين يعتمد على الطريقة التحليلية **بالبرهان بالخلف** وهذا ما نجده في المبرهنة الأولى من المقالة السابعة.

<u>نظرية فيثاغورث في كتاب الأصول:</u>

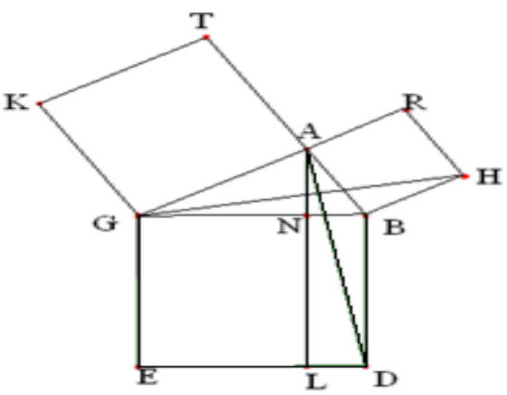
Livre I proposition 47 :
« *Dans les triangles rectangles, le carré du côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés des côtés de l'angle droit* ».

المبرهنة 47 من المقالة الأولى من كتاب الأصول E(I, 47) : كل مثلث قائم الزاوية فإن المربع الكائن من الضلع الذي يوتر القائمة مساو لمجموع المربعين الكائنين من الضلعين الباقيين.

البرهان:(يعتمد على المبرهنة 37 من المقالة الأولى)

$\Delta(HGB) = \Delta(BAD)$ **لأن** : $HB = BA$ ، $BG = BD$ ، $\angle HBG = \angle ABD$

لدينا: $S(HGB) = \frac{1}{2} S_{(RB)}$ **لأن**: **[HB] قاعدة مشتركة بين السطحين (**$\Delta(HBG$



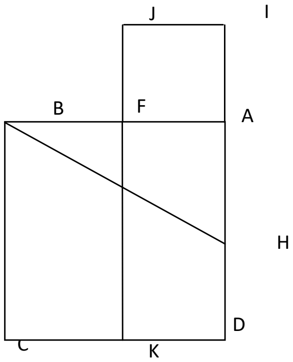
الموجودين بين متوازيين (RG) ; (HB)**)**[2].

ولدينا أيضا $S(BAD)=\frac{1}{2}S(BL)$ **لأن:** [BD] **قاعدة مشتركة بين السطحين**$\Delta(ADB)$

$\Delta(LBD)$ **, الموجودين بين متوازيين**(BD) ;(AL)**)** .

– **ومنه** $S_{(BL)} = S_{(RB)}$.

– **بنفس الطريقة نجد أن:** $S_{(TG)} = S_{(GL)}$**. ومنه** $BG^2 = AB^2 + AG^2$.



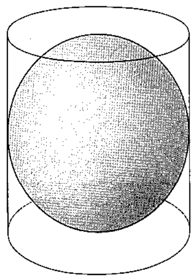
تمرين: حلل النص التالي **[المبرهنة 11 من المقالة2. كتاب الأصول]**

نريد أن نبين، كيف نقسم خطا معلوما مستقيما مفروضا، قسمة يكون السطح الذي يحيط به الخط كله وأحد القسمين، مساويا للمربع الكائن من القسم الأخر.

البرهان: نريد أن نعين موقع نقطة F على $[AB]$ حتى تكون مساحتا $AFJI$, $BCKF$ متساويتين، فنقيم سطح المربع $ABCD$ و H منتصف $[AD]$ ونمد $[AH]$ إلى نقطة I بحيث $[IH]$ تقايس $[BH]$ وننشئ المربع $AFJI$ ، كما في الشكل.

10–ARISTARQUE (310ق.م – 230ق.م).

أكد بـ 17 عشر سنة قبل كوبرنيك (**Copernic**) أن الكواكب السيارة تدور حول الشمس، وكان من السباقين في علم المثلثات، وأعطى تقريب لقياس القمر، وحاول أيضا باعتماد حساب المثلثات إعطاء قيمة تقريبية للمسافة بين الأرض والقمر، والمسافة بين الأرض والشمس.



11–أرخميدس Archimède (287-212ق. م) Ἀρχιμήδης.

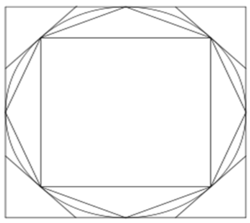
من أعظم العقليات الرياضية التي عرفها التاريخمن أهم كتبه في الرياضيات:

– **الكرة والاسطوانة، قياس الدائرة.** ومن أشهر إنجازاته:

– طرق حساب المساحات والأحجام والمساحات الجانبية للأجسام.

– حساب تقريبي دقيق لبعض الجذور التربيعية.

– اخترع طريقة لكتابة الأرقام الكبيرة.



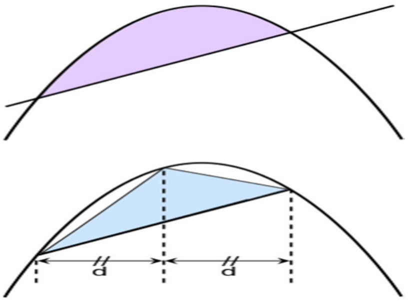
– تقدير قيمة العدد π بدقة عالية[3]:

$$3+\frac{10}{71}\leq \pi \leq 3+\frac{1}{7}$$

[2] –: E **(I ; 37)** <<جميع المثلثات الكائنة على قاعدة واحدة في جهة واحدة بين خطين متوازيين بعينهما متساوية>>.

[3] – عن طريق حصر دائرة بمضلعين منتظمين، ابتدءا من مربع وصولا إلى مضلع ذو 96 ضلع.

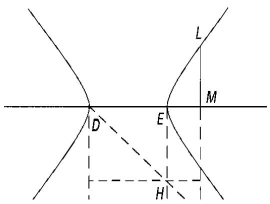
– إثبات أن المساحة المحصورة بين قطع مكافئ ووتر عمودي على محوره هي $\frac{4}{3}$ مساحة المثلث المشترك معه في القاعدة والارتفاع. **(تربيع القطع المكافئ)**



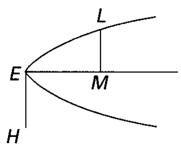
12–ابولونيوس Apollonius de Perge (250-175 ق. م).

يقع أهم عمله حول القطوع المخروطية في كتابه" **المخروطات**" المكون من 8 أجزاء، **بعضها مفقود.**

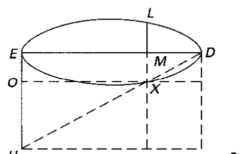
تناول الجزء الأخير مجموعة من النظريات حول المواقع الهندسية.



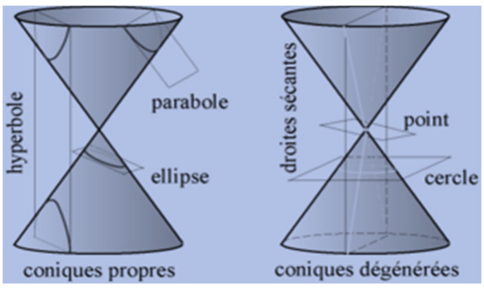
$$y^2 = 2px + \frac{2px^2}{d}$$



$$y^2 = 2px$$



$$y^2 = 2px - \frac{2px^2}{d}$$



13–هيرون Héron d'Alexandrie (القرن الاول الميلادي)

من بين انجازاته:

1–حساب مساحة مثلث عرفت أضلاعه وفق العلاقة: $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$

– خوارزمية تسمح بإيجاد قيم مقربة للجذر التربيعي لعدد طبيعي وفق المبدأ التالي:

نعتبر المتتالية التراجعية بحيث: $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{n}{x_n})$ $\quad x_0 = a$

(لاحظ أن هذه المتتالية متناقصة ومتقاربة نحو $\sqrt{n}$)

3–المبرهنة:<< المنصفات الداخلية في مثلث تتلاقى في نقطة هي مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث>>

4–**المبرهنة**: << في مثلث قائم النقطة الواقعة في منتصف الوتر تبعد نفس البعد عن رؤوس هذا المثلث .<<

تمرين:

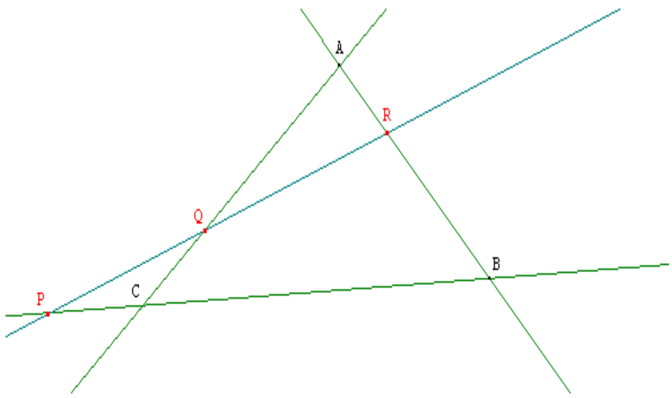
وفق خوارزمية هيرون أوجد قيمة مقربة لـ 10^{-3} للعدد $\sqrt{2}$.

14–مينالاوس(*MÉNÉLAÜS*) (ت. حوالي 140م)

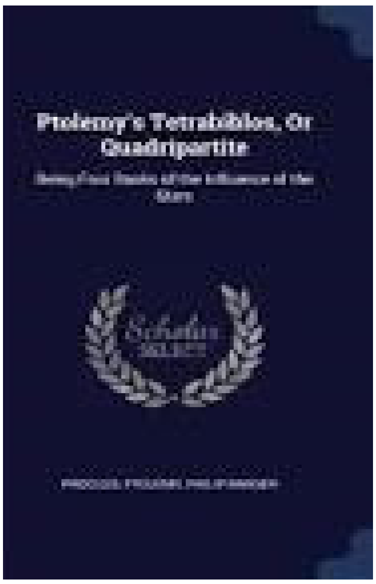
درس الأوتار في الدائرة، وأعطى النتائج الأولى حول المثلثات الكروية. كما أعطى طلائع هندسة غير الأقليدية بالتلميح إلى أن مجموع زوايا مثلث كروي أكبر من 180°.

P, Q و R على استقامة واحدة إذا وفقط إذا:

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\cdot\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\cdot\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$$



15–بطلميوس(*PTOLÉMÉE*) (ت. حوالي160 م)Κλαύδιος Πτολεμαῖος



وصفه ابن القفطي بقوله: "بطلميوس القلوذي صاحب كتاب المجسطي وغيره إمام في الرياضة كامل فاضل من علماء يونان وإلى بطليموس هذا انتهى علم حركات النجوم ومعرفة أسرار الفلك وعنده اجتمع ما كان متفرقا من هـــذه الصناعة بأيدي اليونانيين والروم وغيرهم...

– ثبَّت بطلميوس الأرض في مركز العالم، بالرغم من أن كتابه **(المجسطي)** في على الفلك والمثلثات سيؤدي فيما بعد دورًا هامًا . وأعطى جداول الجيوب، ودرس الإسقاطات.

حدد أن:

$$\pi = 3 + \frac{17}{120} = 3.14166...$$

مهما بلغ ما تعلمه الإغريق من الأمم التي سبقتهم، فإن أمرا واحـدا يبقـى إغريقيا، ويبرر لنا التحدث عما يسمى بالمعجزة الإغريقية، ذلك هو وضع المنطـق العلمي، وأول أركان المنهج العلمي، ممثلا بالبرهان الهندسي، لقـد ورث الإغريـق ركاما هائلا من المعلومات الرياضية، فيه الصحيح وفيه الخطأ. وبالبرهان استطاعوا أن يغربلوا هذا الركام، فما ثبتت لهم صحته منطقيا قبلوه، وما لم تثبت لهـم صـحته استبعدوه.

الفصل الرابع

الرياضيات العربية. ق.8 م–16 م

مقدمـــــة

عرفت الرياضيات العربية أي مجموع الإنتاج الرياضي المدون بالعربية في نطاق الحضارة العربية الإسلامية، أربع مراحل هامة:

1 . مرحلة الاكتساب المباشر أو غير المباشر للرياضيات المنتجة من قبل شعوب أخرى، خلال الفترة الممتدة من القرن الثامن إلى القرن العاشر الميلادي.

2 . مرحلة إبداع وابتكار وإعداد لغة رياضية عربية ما بين القرنين التاسع والثالث عشر ميلادي.

3 . مرحلة نقل مجموعة من الأدوات الجديدة والكتب الكلاسيكية إلى أوروبا خلال الفترة الممتدة من القرن الثاني عشر إلى القرن السادس عشر.

4 . أخيرا مرحلة الجمود وتقلص أنشطة البحث ابتداء من القرن الثالث عشر ميلادي.

مرحلة الترجمة

بدأت هذه المرحلة منذ القرن الثامن الميلادي واستمرت إلى القرن العاشر وشهدت بغداد فترة ازدهار متميز خلال النصف الأول من القرن التاسع. في هذه الفترة ترجمت خاصة مجموعة من الكتب الهندية والإغريقية سواء من اللغة السنسكريتية والإغريقية إلى العربية أو انطلاقا من ترجمات فارسية وسريانية، وهذا كان خاصة في عهد جعفر المنصور (754 –775م)، واستمرت في عهد هارون الرشيد (786– 809م) الذي أنشأ بعض المصانع ومن بينها مصنع للورق وبيت الحكمة. ثم تطورت في عهد المأمون (813 –833م) الذي جلب إلى بيت الحكمة كبار العلماء في جميع الميادين. شجع الخلفاء الباحثين على البحث وأجريت التجارب وجمعت النتائج فكانت التدقيقات هامة والاكتشافات عظيمة.

ابرز المترجمين:

– **الحجاج بن يوسف بن مطر** (ت. 833م): نقل كتاب الأصول لأقليدس والمجسطي لبطليموس.

– **ثابت بن قرة الحراني** (ت. 901م): أتقن السريانية واليونانية والعبرية والفارسية فضلا عن العربية، ترجم وأصلح عدة كتب من بينها كتاب *الأصول* لأقليدس، كتاب *المدخل إلى علم العدد* لـ: **Nicomaque de Gérase** وكتاب *الكرة والاسطوانة* لأرخميدس.

– **إسحاق بن حنين** (ت. 911م): برع في الترجمة وتسلم رئاسة بيت الحكمة. وقد نقل من _اليونانية إلى العربية، مما نقله إلى العربية كتاب الأصول لأقليدس، وكتاب الكرة والاسطوانة لأرخميدس.

– **قسطا بن لوقا البعلبكي** (ت. 910م): ترجم كتاب العدديات لديوفنطس(**Diophante**).

أشهر الكتب الرياضية المترجمة

– كتاب السند هند "سدها نتا" (**Sind Hind**)لمؤلفه *براهما قوبطا* (**Brahma Gupta**)وهو كتاب هندي يعالج مسائل في الفلك والرياضيات.

– كتاب *الأصول* **لأقليدس** ويعرف أيضا باسم كتاب الأركان.

– كتاب *المجسطي* **لبَطليموس** يحتوي خلاصة ما توصل إليه قدماء اليونان في علم الفلك، والذي يعتبر المرجع الأساسي في علم الفلك العربي الإسلامي.

– كتاب المخروطات **لابلونيوس**.

– كتاب الكرة والاسطوانة **لارخميدس** ويدرس خواص كل من الكرة والاسطوانة وعلاقتهما ببعضهما البعض.

المواد الجديدة: الجبر وحساب المثلثات والتحليل التوفيقي دون أن ننسى المساهمة الفعالة في المواد الكلاسيكية الأخرى كعلم الفلك وعلم الهندسة ونظرية الأعداد.

الجبــر

يعتبر الجبر من بين المواد التي حظاها مؤرخو العلوم بأوفر عدد من الدراسات. رغم ذلك، تظل بعض جوانب تاريخها غير معروفة كما ينبغي ومازالت تثير لدى الإحصائيين التسأول والجدل.

- بديات الجبر العربي وأصوله
- علاقته بباقي العلوم.
- المحتوى الحقيقي الذي تم نقله إلى أوربا القروسطية

يتفق الأخصائيون على ان ميلاد الجبر كمادة مستقلة (بأسمائها ومواضيعها وأدواتها وميادين تطبيقاتها) يعود إلى نشر كتاب"*المختصر في الجبر والمقابلة*" لصاحبه **محمد بن موسى الخوارزمي** (ت.حوالي 850م) في فترة الخليفة العباسي المأمون (813 –833م). وحسب رواية **بن النديم** (ت. حوالي 990م) في كتابه الفِهرِست فإنه في نفس فترة الخوارزمي يوجد على الأقل عالمين كتب في ميدان الجبر والمقابلة هما: **سند بن علي، عبد الحميد بن ترك.**

كتاب المختصر في الجبر والمقابلة

ينقسم كتاب الخوارزمي إلى جزأين تسبقهما مقدمة.

الجزء الأول: يعرض الكاتب في هذا الجزء باختصار وبعجالة لإقامة حساب الجبر والمقابلة وهو نظري أي إنشاء مفرداته الأولية ومفاهيمه وهو في الحقيقة الجزء الأهم بالنظر إلى تاريخ الجبر، وينقسم هذا إلى عدة فصول:

الفصل 1: يذكر الخوارزمي بتعريف النظام العشري الموروث عن الهنود، ثم يعرف موضوعات الجبر (الأعداد الصحيحة والناطقة الموجبة) الجذر والمال الذي هو مربع الجذر، ثم يعطي المعادلات النموذجية الست حيث يعرفها ويرتبها، وان كل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية.

الفصل 2: يقدم لكل من المعادلات الست طريقة حل تسمح بالحصول على قيمة الجذر أي على المجهول، يتم التعبير عن كل مرحلة أولا بشكل عام، ثم يتم إبرازها وشرحها بعد ذلك باعتماد مثال، ثم يعرض فيما بعد التعليلات الهندسية لإثبات وجود حلول (موجبة) لكل معادلة.

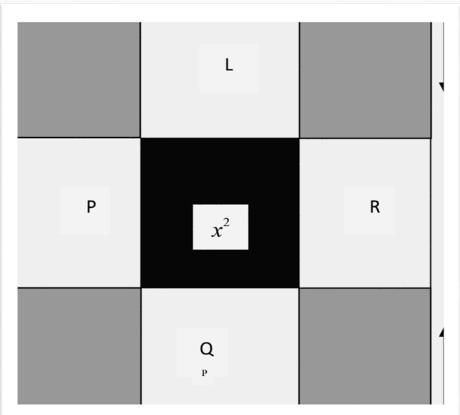
مثال:

تعليل حل معادلة من الدرجة الثانية هندسيا: $x^2 + 10x = 39$

ليكن x طول ضلع المربع الداخلي والذي مساحته x^2 نأخذ $\frac{10}{4}$ عرض المستطيلات L, P, Q, R.

مساحة المستطيلات الأربع هي: $4.\left(\frac{10}{4}\right)x=10x$.

ومنه مساحة المستطيلات الأربع والمربع الداخلي (*مساحة الصليب في الشكل*) معطاة وتساوي 39 أي أن $x^2+10x=39$



ومن جهة أخرى مساحة المربعات الأربع المتواجدة على زوايا المربع الكبير هي: $4.\left(\frac{10}{4}\right)^2=25$. إذن مساحة المربع الكبير هي: $39+25=64$ وضلعه $\sqrt{64}=8$. ومنه طول ضلع المربع الداخلي $x = 8 - 2 .\frac{10}{4} = 8 - 5 = 3$. حل المعادلة[4] إذن هو 3.

الفصل 3: يشرح طريقة تجبير مشكل معلوم وذلك بإرجاعه إلى إحدى المعادلات النموذجية الست

4- في الحقيقة الخوارزمي يعطي حل المعادلة $x^2+10x-39=0$ بـ $x=\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2+39}-\frac{10}{2}$ ، وهذا يوافق العلاقة المعروفة حاليا والمميز الحالي يمثل المربع الكبير.

السابقة.

الفصل 4: يبين كيف يمكن مد العمليات الحسابية الكلاسيكية (الجمع، الطرح، الضرب، القسمة والتجذير) إلى موضوعات الجبر في تلك الفترة والتي هي الإعداد الصحيحة والكسرية الموجبة وكذلك بعض وحيدات الحد، ويصوغ كذلك ما سيتفق على تسميته لاحقا بقاعدة الإشارات.

الفصل 5: هو الأخير يشتمل على 40 مسألة تطبيقية جمعها صاحب الكتاب في ثلاثة مواضيع (مسائل العشرات، مسائل الأموال، مسائل الرجال) وتوصل إلى حلها بالاعتماد على أدوات الفصول السابقة.

الجزء الثاني: وهو الجزء الأكبر (3/2) والأهم كميا، فلقد خصصه حصرا لحل مسائل المعاملات التجارية ومسح الأراضي وقسمة التركات (حسب قوانين الفقه الإسلامي) والوصايا والقياسات الهندسية.

مفهوم الجبر

1-لغة: هو مشتق من فعل جبر. جبر، يجبر، جبرا. جبر عظم الكسير أي أصلحه، جبر الفقير أي أعانه، جبر اليتيم أي كفله.

2-عند الخوارزمي فهو: أن تجبر طرف المعادلة بما نقص من أموال أو جذور أو أعداد تزيد ذلك على الطرف الآخر أي حذف الحدود السالبة، والمقابلة هي أن تقابل بين الحدود المتشابهة من طرفي المعادلة. فالجذر إذن ما نشير إليه حاليا ب x والمال ب x^2.

<u>وسائل الجبر:</u> الجذر، المال، العدد.

مثال: المعادلة $x^2-3x+16 = x+12$، في حلها يقول الخوارزمي : "فأجبر ذلك وزد الثلاثة أشياء على الشيء والاثني عشر درهما" : $x^2-3x+3x+16 = x+3x+12 \Leftrightarrow x^2+16 = x+12$

ثم يكمل فيقول: وقابل به وألقي اثني عشر يبقى أربع دراهم"

أي: $x^2+4 = 4x \Leftrightarrow x^2+16-12 = 4x$.

إن أول من استعمل كلمة جبر للعلم الذي يحمل هذا الاسم، هو: **محمد بن موسى الخوارزمي.**

محمد بن موسى الخوارزمي

هو أبو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي، أصله من خوارزم، وخوارزم عاصمة من عواصم خراسان -هي مدينة خيوة حاليا جنوب بحيرة آرال-ومقامه بقطربل -على مقربة من بغداد -.

أما عن تاريخ ميلاده ووفاته فهو غير مضبوط، كل ما نعرفه أنه عاش في فترة الخليفة المأمون (813 م -833 م)، وقد امتد بعد المأمون.

وقد كان الخوارزمي منقطعا إلى خزانة المأمون، فاشتغل في العلم والأدب، وهو من أصحاب علوم الهيئة.

بعض مؤلفات الخوارزمي:

* المختصر في حساب الجبر والمقابلة.

* كتاب الزيج.

* كتاب عمل الأسطرلاب.

* زيج السند هند : والزيج تعني الجدول أو الجداول، أطلقها العرب على كتب الفلك والتنجيم، والسند هند تحريف لكلمة **سدهانتا** الهندية.

* كتاب الحساب الهندي : هو أول كتاب أدخل الأرقام الهندية إلى العالم الإسلامي.

* كتاب الجمع والتفريق : لم يصل إلينا هذا الكتاب، ولكن وصلت ترجمات لاتينية.

المعادلات الست بترتيب للخوارزمي:

1. أموال تعدل جذور: $ax^2 = bx$
2. أموال تعدل أعداد: $ax^2 = b$
3. جذور تعدل أعداد: $bx = c$
4. أموال وجذور تعدل أعداد: $ax^2+bx=c$
5. أموال وأعداد تعدل جذور: $ax^2+c=bx$
6. جذور وأعداد تعدل أموال: $bx+c=ax^2$

مثال1: معادلة من الصنف 4

$ax^2+bx=c \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x=\frac{c}{a} \qquad a\neq 0$	$x^2+10x=39$
$\frac{b}{2a}$	ننصف الأجذار $\frac{10}{2}=5$
$\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}$	نضربها في نفسها $5^2=25$
$\Delta=\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}$	نزيد عليها التسعة والثلاثين $25+39=64$
$x=\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}-\frac{b}{2a}$	نأخذ $\sqrt{64}=8$ ننقص منها 5: $8-5=3$ وهو الحل $x=3$

مثال2: معادلة من صنف 5

<< وأما الأموال والعدد التي تعدل الجذور فمثل قولك "مال وأحد وعشرون من العدد يعدل عشرة أجذار"، فبابه أن تنصف الأجذار فتكون خمسة، فتضربها في مثلها تكون خمسة وعشرين، فتنقص منها الواحد والعشرين التي ذكرناها مع المال فيبقى أربعة، فخذ جذرها، وهو اثنان، فأنقصها من نصف الأجذار، وهو خمسة، فيبقى ثلاثة، وهو جذر المال الذي تريده، والمال تسعة، وإن شئت فزد الجذر على نصف الأجذار فيكون سبعة وهو جذر المال الذي تريده والمال تسعة وأربعين>>.

$x^2 + 21 = 10x$	$a\neq0$ $ax^2 + c = bx \Leftrightarrow x^2 + \frac{c}{a} = \frac{b}{a}x$
ننصف الأجذار $\frac{10}{2}=5$	$\frac{b}{2a}$
نضربها في مثلها $5^2=25$	$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$
ننقص منها الواحد والعشرين $25-21=4$	$\Delta = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$
خذ جذرها وهو اثنان $\sqrt{4}=2$	$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$
$x_1 = 5 - 2 = 3$، $x_2 = 5 + 2 = 7$	$x = \frac{b}{2a} \pm \Delta$

يشير الخوارزمي إلى الحالتين: $\Delta=0$ فيكون الحل $x=\frac{b}{2a}$، و $\Delta \leq 0$ $(\Delta\neq0)$ أين لا يوجد حل.

يبرر الخوارزمي هندسيا كيفية الحل التي قدمها على النحو التالي :

" وأما علة مال واحد وعشرون درهما تعدل عشرة أجذاره فإننا نجعل المال سطحا مربعا مجهول الأضلاع وهو سطح $\overline{AD}$ ثم نضم إليه سطحا متوازي الأضلاع عرضه مثل أحد أضلاع سطح $\overline{AD}$ وهو ضلع $\overline{CN}$ والسطح $\overline{CB}$ فصار طول السطحين جميعا ضلع $\overline{GC}$ ود علمنا أن طوله عشرة من العدد لأن كل سطح مربع متساوي الأضلاع والزوايا فإن أحد أضلاعه مضروبا في واحد جذر ذلك السطح وفي إثنين جذراه فلما قال مال واحد وعشرون تعدل عشرة أجذاره علمنا أن طول $\overline{GC}$ عشرة أعداد لأن ضلع $\overline{GD}$ جذر المال فقسمنا ضلع $\overline{GC}$ نصفين على نقطة H فيتبين لنا أن خط $\overline{HC}$ مثل خط $\overline{GH}$ وقد تبين لنا أن خط $\overline{TH}$ مثل خط $\overline{GD}$ فزدنا على خط $\overline{TH}$ على استقامة مثل فضل $\overline{GH}$ على $\overline{TH}$ ليتربع السطح فصار خط $\overline{TK}$ مثل خط $\overline{KM}$ وحدث سطح مربع متساوي الأضلاع والزوايا وهو سطح $\overline{MT}$

وقد تبين لنا أن خط $\overline{TK}$ خمسة وأضلاعه مثله فسطحه إذا خمسة وعشرون وهو ما اجتمع من ضرب نصف الأجذار في مثلها وهو خمسة في خمسة يكون خمسة وعشرين. وقد كان تبين لنا أن سطح $\overline{BC}$ هو الواحد والعشرون التي زيدت على المال فقطعنا من سطح $\overline{CB}$ بخط $\overline{TK}$ الذي هو أحد أضلاع سطح $\overline{MT}$ بقي سطح $\overline{TA}$ وأخذنا من خط $\overline{KM}$ خط $\overline{KL}$ وهو مثل خط $\overline{HK}$ فتبين لنا أن خط $\overline{TH}$ مثل خط $\overline{ML}$ وفضل من خط $\overline{MK}$ خط $\overline{LK}$ وهو مثل خط $\overline{KH}$ فصار سطح $\overline{MZ}$ مثل سطح $\overline{TA}$ فيتبين لنا أن سطح $\overline{CT}$ مزيدا عليه سطح $\overline{MZ}$ مثل سطح $\overline{CB}$ وهو واحد وعشرون وقد كان سطح $\overline{MT}$ خمسة وعشرون فلما نقصنا من سطح $\overline{MT}$ سطح $\overline{CT}$ وسطح $\overline{MZ}$ اللذين هما واحد وعشرون بقي لنا سطح صغير وهو سطح $\overline{KZ}$ وهو فضل ما بين خمسة وعشرين وواحد وعشرين وهو أربعة وجذرها خط $\overline{ZH}$ وهو مثل خط $\overline{HA}$ وهو اثنان. فإن نقصتهما من خط $\overline{HG}$ الذي هو نصغ الأجذار بقي خط $\overline{AG}$ وهو ثلاثة وهو جذر المال الأول. فإن زدته على خط $\overline{GH}$ الذي هو نصف الأجذار بلغ ذلك سبة وهو خط $\overline{ZG}$ ويكون جذر مال أكثر من هذا المال إذا زدت عليه واحدا وعشرين صار ذلك مثل عشرة أجذاره وهذه صورته، وذلك ما أردنا أن نبين".

نلخص التبرير الذي قدمه الخوارزمي عند حله للمعادلة: $x^2 + 21 = 10x$

نرسم ضلع $\overline{AG}$ طوله x، ثم انطلاقا من هذا الضلع نكمل المربع $ABDG$، مساحته هي x^2. نمد هذا الضلع إلى غاية النقطة C ونرسم مستطيل عرضه x فيكون طول الضلع

$\overline{GC}=10$ (وهذا للحصول على الطرف الثاني للمعادلة).

فتكون بهذا مساحة المستطيل $GDNC$ هي $10x$، ومنه تكون مساحة $ACNB$ هي 21

لأنه لدينا $x^2+21=10x$.

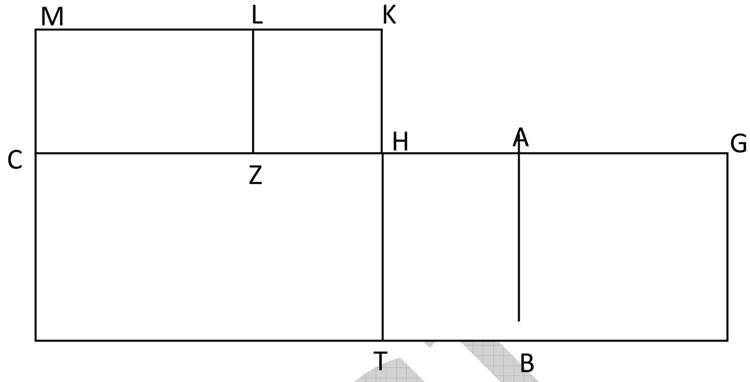
نضع H منتصف $\overline{GC}$ ($HC=GH=5$)، ثم نرسم قطعة مستقيمة $[HT]$ مثل $[GD]$، إذن $HT=x$، بعد ذلك نمد المستقيم (TH) حتى يكون $TK=GH$ (إذن $TK=\frac{10}{2}=5$)، نكمل المربع $TKMN$، مساحته هي $5\times5=25$. نأخذ من الخط KM خط KL مثل خط HK ($KL=5-x$) فينتج $ML=HT$، وكذلك $LK=KH=5-x$، فيكون السطح $MLZC$ يساوي السطح $ABTH$، ومنه مساحة السطح $KLHZ=25-21=4$.

إذن $KL=AH$ وطول AH هو $\sqrt{4}$ وهو 2.

ونعلم أن $GH=5=x+2$ إذن $x=3$.

ثم بعد ذلك يقول فإن زدنا على GH وهو نصف الأجذار بلغ ذلك سبعة $(7=2+5)$.

والشكل المحصل عليه هو كالآتي :



مثال 3: صنف 6. جذور وأعداد تعدل أموال

"فمثل قولك ثلاثة أجذار وأربعة من العدد تعدل مالا".

آخر صنف هو من الشكل $bx+c=ax^2$، والمثال المقدم هو $3x+4=x^2$.

$a\neq0\quad bx+c=ax^2\Leftrightarrow\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2$	$3x+4=x^2$
$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$	ننصف الأجذار $\frac{3}{2}=1,5$
$\Delta=\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}$	اضربها في مثلها $\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=2.25$
$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}$	زدها على الأربعة $2.25+4=6.25$
$x=\frac{b}{2a}+\sqrt{\Delta}$	خذ جذرها $\sqrt{6.25}=2.5$
	فزده على نصف الأجذار $2.5+1.5=4$

لقد ظهرت شروحات كثيرة لكتاب الخوارزمي في النصف الثاني من القرن التاسع وبداية القرن العاشر، نذكر شروحات ، سنان بن الفتح والصيدناني، وأبي الوفاء. وكانت مؤلفات أخري تحمل عنوان الجبر والمقابلة كمؤلفات الدينواري والمصيصي، لكن لسوء الحظ وباستثناء شرح سنان بن الفتح، لم يعثر لحد الآن على مؤلف واحد من هذه المؤلفات التي أشرنا إليها.

إلى جانب هذه المؤلفات نلاحظ إنتاج كتابات أخرى خاصيتها المشتركة تحقيق تداخل أو تفاعل الجبر العربي والهندسة اليونانية. ومثال على ذلك ما ألفه ثابت بن قرة (ت.901م) تحت عنوان "**تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية**".

تطور الجبر العربي

1- مدرسة أبي كامل (تقليد أبي كامل)

أبو كامل شجاع بن أسلم(الحاسب المصري). كان من أهم علماء الجبر في التراث العلمي العربي الإسلامي، وتقع أهم أعماله في كتابه – *الكامل في الجبر*– ثلاثة أجزاء. توفي حوالي عام 318هـ / 930 م .

أعطى الحاسب للجبر دفعة جديدة بعد الخوارزمي في كلا جانبيه النظري والعملي، وبلغ جبر الحاسب مستوى نظريا عاليا حيث أن الأعداد الصماء لا تكون فقط جذورا للمعادلات من الدرجة الثانية، بل أيضا في الأعداد المعاملة للمجهولات. فإن تحاشي الإغريق من الأعداد الصماء يغيب عن البصر فيما بعد. ومن بين أعماله:

– تطبيق الجبر في التحديد العددي لضلع المخمس المنتظم، والمعشر المنتظم، والشكل ذي الزوايا الخمس عشرة المنتظم المرسومة في دائرة ذات قطر يتألف من عشرة وحدات.

– استعمال الأعداد الصماء التربيعية في المعادلات من الدرجة 1أو 2 مثل:

$$a+\sqrt{b}\;,\sqrt{a}+\sqrt{b}\;,\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} \qquad a-\sqrt{b}\;,\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

– حل معادلات مضاعفة التربيع.

كان لعمل أبي كامل نفوذ عميق في التطور الباكر للجبر في أوروبا من خلال Leonardo Fibonacci (ت. 1240م) الذي اقتبس من كتاب أبي كامل أقساما كبيرة في كتابيه:

. Practica géometriae & Liber Abaci

أمثالة:

$$\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{8+18+2\sqrt{144}}=\sqrt{50}$$

$$\sqrt{18}-\sqrt{8}=\sqrt{18+8-2\sqrt{144}}=\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{10}=\sqrt{12+2\sqrt{20}}$$

$$\sqrt{10}-\sqrt{2}=\sqrt{12-2\sqrt{20}}$$

2– << عشرة قسمتها قسمين فقسمت كل واحدٍ منهما على الآخر وجمعتهما، فكان جذر خمسة دراهم. >>

خطوات الحل(يطلب تبريرها):

$$\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}=\sqrt{5}\ .$$

$$1x^2+(10-1x)^2=\sqrt{5}\times 1x\,(10-1x)$$

$$(1x)^2+(10-1x)^2=100+2x^2-20x$$

$$\sqrt{5}\times(10x-1x^2)=\sqrt{500x^2}-\sqrt{5x^2x^2}$$

$$\sqrt{500x^2}=\sqrt{5x^2x^2}+100+2x^2-20x$$

$$20x+\sqrt{500x^2}=100+2x^2+\sqrt{5x^2x^2}$$

$$1x^2+\sqrt{50000}-200=10x$$

$$\left(\frac{10}{2}\right)^2-\left(\sqrt{50000}-200\right)=225-\sqrt{50000}$$

فيكون القسمين المطلوبين هما:

$$5-\sqrt{225-\sqrt{50000}} \qquad 5+\sqrt{225-\sqrt{50000}}$$

بعض مؤلفاته:

- الجمع والتفريق.
- الخطأين.
- المساحة والهندسة.
- الوصايا في الجبر والمقابلة
- الوصايا بالجذور.
- طرائف الحساب.

هذا بالإضافة إلى عدد من الرسائل أشهرها "**رسالة في المخمس والمعشر**".

مدرسة الكرجي(ت.1029م)

1- الكرجي:

هو أبوبكر محمد بن الحسن الكرجي عاش في بغداد في عهد فخر الملك. لا نعرف عن حياته سوى القليل، إلا أن أغلب الآراء تميل إلى أن الكرجي توفي سنة 1029م.

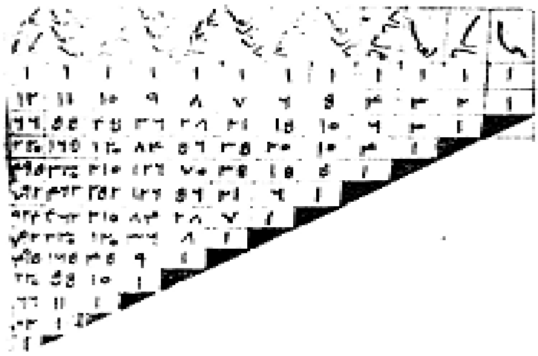
بعض أعمال الكرجي:

كتب الكرجي كتبا كثيرة أغلبها مفقودة، لكن جميع كتبه التي نعرفها كتبت أثناء إقامته ببغداد وأهما:

1. كتاب في حساب الهند .

2 . كتاب الدور والوصايا .
3. كتاب الفخري (أهداه إلى فخر لملك).
4. البديع .
5. الكافي في الحساب .
6. علل حساب الجبر والمقابلة .

المثلث العددي للكرجي



نجد في كتب الكرجي:

- عرضا للعناصر الأولى لنظرية كثيرات الحدود، مع قواعد ضرب وقسمة وحيدات الحد.
- توسيع مفهوم العمليات الحسابية لوحيدات الحد من طرح وجمع وضرب وقسمة.
- وجد جدولا خاص بمعاملات $(a+b)^n$ حتى $n = 12$ مستعملا العلاقة: $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

مثال: لقد اثبت ***الكرجي*** العلاقة:

$$\left(\sum_{r=0}^{n} r\right)^2 = \sum_{r=0}^{n} r^3$$

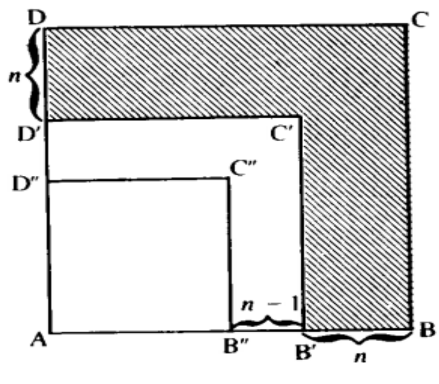
فكيف؟

ليكن:

$1 + 2 + 3 \ldots + n$ هو ضلع المربع $ABCD$

الكرجي ينشئ داخل هذا المربع الشكل المخطط $BB'C'D'DC$ (حرف L : Gnomon)، بحيث: $BB' = n$

مساحة الشكل الأخير تعطي:



$$2n(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - n^2 = 2n.\frac{n}{2}(n+1) - n^2 = n^3$$

2-السموأل المغربي

هو السموأل بن يحي بن عباس المغربي، رياضي وطبيب. ولد بالمغرب وسكن بغداد مدة، وانتقل إلى فارس وتوفي بمدينة مراغة بأذربيجان عام 1175م.

يقول عنه ابن **أبي أصيبعة** في كتابه "**عيون الأنباء في طبقات الأطباء**" << كان السموأل فاضلا في العلوم الرياضية عالما بصناعة الطب وأصله من بلاد المغرب وسكن مدة بغداد ثم انتقل إلى بلاد العجم ولم يزل بها إلى آخر عمره، وكان أبوهُ أيضا يشدو شيئا من الحكمة>> واصل السموأل دراسة الكرجي واستطاع القيام ببعض التبريرات مثل:

- **قسمة كثير حدود على آخر.**
- **استعمال كثيرات الحدود في التجذير.**
- **استعمال الاستقراء الرياضي**

– قواعد ضرب وحيدات الحد: $x^{n+m} = x^m \times x^n$، $(a+b)x^n = bx^n + ax^n$

– حل معادلات من الشكل: $x^5 = q$.

وللسموأل كتب عديدة نذكر أهمها :

1. الباهر في الجبر.
2. الزاهر في الجبر (مذكور في الباهر).
3. رسالة في التحليل والتركيب.
4. رسالة الموجز المضوي في الحساب.
5. التبصرة في علم الحساب.
6. الكافي في حساب الدرهم والدينار.

تتمثل أعمال هذه المدرسة في :

1– تعميم وتغيير تعريفات وحيدات الحد، حيث أصبحت الأسس تجمع عند التسمية.

2– دراسة كثيرات الحدود كأشياء مستقلة .

3– ظهور لأول مرة جداول تسمح بكتابة كثيرات الحدود باستعمال عواملها فقط.

مثال : 3 مال كعب إلا مال مال و2 جذر و7 من العدد.

مال كعب	مال مال	كعب	مال	جذر	عدد
3	إلا 1	0	0	2	7

وتعتبر هذه الخطوة الأولى لظهور الترميز في الرياضيات.

4. توسيع مفهوم العمليات الحسابية لكثيرات الحدود من طرح وجمع وضرب وقسمة.

5. هناك محاولة لتجذير كثيرات حدود وظهور المثلث العددي الذي يسمى حاليا مثلث باسكال .

مدرسة عمر الخيام (ت.1131م)

عمر الخيام: هو إبراهيم الخيامي أبو الفتح عمر، ولد بنيسابور عام1048م وتوفى بها عام 1131م.

في تواز مع البحوث التي قامت في مدرسة أبي كامل والكرجي، نلاحظ ولادة وتدعم وتوجه جديد يتمثل في حل معادلات من الدرجة ثلاثة. يمكن أن نعيد ولادة هذا التوجه إلى فشل **الماهاني(ت.888م)** في محاولته اعتماد الجذور لحل المعادلة:

$$x^3 + c = ax^2$$

وهي الترجمة الجبرية للشكل 4 من المقالة 2 من كتاب "*الكرة والاسطوانة*" **لأرخميدس**، ويتعلق الأمر فيها بقسمة كرة بواسطة سطح إلى قسمين بحيث تكون النسبة بين حجميهما معلومة .

أثبت **أبو جعفر الخازن** (ت.961م)، وابن **الهيثم(965– 1039م)** كل على حدى وجود حل موجب لمعادلة **الماهاني** وذلك بفضل تقاطع مخروطين.

هناك لجوء صريح لحل معادلات تكعيبية بواسطة القطوع المخروطية.

يعترف **الخيام** بفشل محاولاته الجبرية لحل معادلة تكعيبية. حيث جاء مشروع **الخيام** ببناء نظرية هندسية لحل المعادلات التكعيبية، بإتباع الخطوات الأولى التي قطعها **أبو الجود(ق. 11)**.

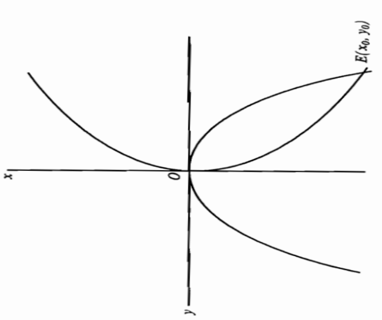
يقوم **الخيام** ولأول مرة في كتابه" مقالة **في الجبر والمقابلة**"**بدراسة** جميع أنواع هذه المعادلات وتصنيفها حسب توزع حدودها، ثم يجد لها بناءً، للحصول على الحل الموجب باستعمال تقاطع مخروطين.

مثال1.

حل معادلة من الشكل: $x^3 = bx + c$

يؤول لدراسة تقاطع: القطع المكافئ $x^2 = \sqrt{b}\, y$

مع القطع الزائد $y^2 = (\frac{c}{b} + x)x$



مثال2/ حل معادلة من الشكل: $x^3 + a = cx^2$.

[الحل هو تقاطع القطع المكافئ $y^2 = \sqrt[3]{a}(c - x)$ مع القطع الزائد: $xy = \sqrt[3]{a^2}$]

يثبت الخيام أنه في حالة $\sqrt[3]{a} \geq c$ فإن المعادلة السابقة ليس لها حلول. ثم يواصل العمل بمقارنة $\sqrt[3]{a}$ مع $\frac{c}{2}$، وفي هذه الحالة، يُقرب الخيام الحل في حالة وجوده.

تصنيف الخيام:

$13/ x^3 + bx = c$	دائرة- قطع مكافئ	$19/ x^3 + ax^2 + bx = c$	دائرة- قطع زائد
$14/ x^3 + c = bx$	قطع مكافئ- قطع زائد.	$20/ x^3 + ax^2 + c = bx$	قطع زائد-قطع زائد
$15/ x^3 = bx + c$	قطع مكافئ- قطع زائد.	$21/ x^3 + bx + c = ax^2$	دائرة- قطع زائد
$16/ x^3 + ax^2 = c$	قطع مكافئ- قطع زائد.	$22/ x^3 = ax^2 + bx + c$	قطع زائد-قطع زائد
$17/ x^3 + c = ax^2$	قطع مكافئ- قطع زائد.	$23/ x^3 + ax^2 = bx + c$	قطع زائد-قطع زائد
$18/ x^3 = ax^2 + c$	قطع مكافئ- قطع زائد.	$24/ x^3 + bx = ax^2 + c$	دائرة- قطع زائد
		$25/ x^3 + c = ax^2 + bx$	قطع زائد-قطع زائد

يُنسب إلى الخيام كثير من المصنفات، من رياضية وفلكية وطبيعية، هذا غير رباعيته المشهورة، التي ترجمت إلى العديد من اللغات. وهو كأهل عصره، قد كتب معظم مؤلفاته العلمية والفلسفية بالعربية. ومصنفاته هي :

- كتاب في صنعة ميزان الحكمة .
- رسالة في شرح ما أشكل من مصادرات اقليدس .
- رسالة في قسمة ربع الدائرة .
- مقالة في الجبر والمقابلة.

مضمون هذه المدرسة:

- تصنيف المعادلات من الدرجة أقل أو تساوي 3 .
- إعطاء حلول الهندسية للمعادلات من الدرجة الثالثة عن طريق القطوع المخروطية.

شرف الدين الطوسي(ت.1213م)

هو شرف الدين المظفر بن محمد بن المظفر الطوسي، لا نعلم الشيء الكثير عن حياته. توفي حولي عام 1213م.

واصل عمل سلفه الخيام في الحل الهندسي لمعادلات من الدرجة الثالثة، مع إضافة مناقشة أكثر آلية في وجود الحلول الموجبة لهذه المعادلات، باستخدام مفاهيم أكثر تطورا مثل: البحث عن القيم

العظمى(استعمال مشتق كثير حدود من الدرجة الثالثة بصفة ضمنية)، مما أدى لاكتشاف وسائل تحليلية لمعالجة المعادلات.

- أعطى حلا عدديا لجميع المسائل المطروحة.
- استخدم الطريقة المعروفة اليوم بطريقة **روفيني– هورنر** في حل معادلات من الدرجة 3.
- يناقش الطوسي أولا 12نوعًا من المعادلات الدرجة الثانية. ثم ينظر إلى ثمانية أنواع من المعادلات المكعبة التي لها حل موجب، ثم خمسة أنواع قد لا يوجد لها حل.
- استخدم الطوسي مشتق دالة، بالطبع دون أن يقول ذلك، الاستخدام كان ضمنيا، منشىء من أدلة جبرية تستند إلى إجراءات تحليلية.
- الطوسي يعطي ما يمكن أن نسميه في الأساس طريقة روفيني–هورنر لتقريب جذر المعادلة المكعبة. على الرغم من أن هذه الطريقة قد استخدمها علماء الرياضيات العرب في وقت سابق لإيجاد تقريب للجذر التكعيبي لعدد طبيعي، إلا أن الطوسي هو الأول الذي نعرف من قام بتطبيق هذه الطريقة لحل المعادلات العامة من هذا النوع.

مثال1:

المعادلة: $x^3 + c = bx$

توصل الطوسي لكي تقبل هذه المعادلة حلولا، ينبغي أن يكون المقدار: $\frac{c^2}{4} - \frac{b^3}{27}$ موجبا أو معدومًا.

مثال2.

المعادلة. $x^3 + 36x = 91750087.$

حيث يلاحظ ان: $x = a10^2 + b10 + c$ وبإتباع الطريقة المعروفة اليوم باسم **Ruffini-Horner** يجد الحل 451.

من مؤلفات شرف الدين الطوسي

1. رسالة في المعادلات.
2. الأسطرلاب الخطي. (عصا الطوسي)
3. رسالة في الخطان اللذين يقربان ولا يلتقيان.
4. رسالة في عمل مسالة هندسية.

بعض مظاهر الجبر في التقليد الرياضي العربي للغرب الإسلامي(مدرسة الغرب الإسلامي)

شكل غياب النصوص وضعف الأبحاث المتعلقة بالمخطوطات المعروفة، عائقا أمام معرفة تاريخ الجبر في الغرب الإسلامي، فبالرغم من أعمال **فوبك Woepecke** في القرن 19 وأبحاث **Peres- Sanchez** و**Suter** في بداية القرن20 التي كشفت عن بعض الملامح الهامة من التقليد الجبري في القرنين 12 و13م، فإن كثيرا من النقط بقت غامضة.

في فصل <*العلوم العددية*> من **مقدمة بن خلدون** يخصص بن خلدون لـ < *صناعة الجبر*> فقرة كاملة يتكلم فيها حول كتاب الجبر **لأبي كامل** وحول تأثيره، وعن كثرة شُراحه من أهل الأندلس، ومن أحسن شروحا ته يذكر **بن خلدون** كتاب **القرشي**[عالم أندلسي ذائع الصيت عاش في بجاية في القرن 13م] .

مضمون الكتب الجبرية للغرب الإسلامي:

1- **الحصار** (ت. في حدود 1150م): **الكامل في الحساب**

2- **الأرجوزة في الجبر لابن الياسمين (ت.1204/601)**

هو أبو محمد عبد الله بن محمد بن حجاج الأرديني، اشتهر باسم ابن الياسمين. ينتمي إلى قبيلة بربرية من أهل مدينة فاس المغربية. توفي بمراكش سنة 601 هـ. ظلت هذه الأرجوزة الرياضية التي كتبها بن الياسمين في أواخر القرن12م الشهادة العلمية الوحيدة وذلك لفترة طويلة من الزمن عن الإنتاج الجبري في الأندلس كإنتاج مستقل عن الحساب والمعاملات.

وهذه الأرجوزة ليست بحق هي المستوى الحقيقي للجبر في الغرب الإسلامي وحتى في الشرق بل هي مذكرة للطلبة والأساتذة.

و**لابن الياسمين** كذلك:*كتاب تلقيح الأفكار بالعمل برشوم الغبار*.

11. على ثلاثة يدور الجبـــر	المال والأعداد ثم الجذر
12. فالمال كل عدد مربـــع	وجذره واحد تــلك الأضلع
13. والعدد المطلق ما لم ينسب	للمال أو للجذر فافهم تصب
14. والشيء والجذر بمعنى واحد	كالقول في لفظ أب و والد

الأرجوزة في الجبر لابن الياسمين

3- كتاب اختصار الجبر والمقابلة لابن بدر.

ابن بدر:هو أبو عبد الله محمد بن عمر بن محمد بن بدر، لا نعرف شيئا آخر عنه سوى كونه صنف كتابه هذا قبل سنة 1343م. ومحتوى هذا الكتاب: تلخيص عمل كلا من الخوارزمي وأبي كامل مع بعض الإضافات التي تعكس التطورات اللاحقة التي عرفتها المادة.

4- الأصول والمقدمات في الجبر والمقابلة لابن البنّا المُراكشي (ت.1321/720)

ابن البنا:هو أبو العباس أحمد بن محمد ابن عثمان الأزدي، الشهير **بابن البنا** المراكشي. ولد بمراكش سنة 1256م. الكتاب هو آخر مؤلف كبير في الجبر يكتب في الغرب الإسلامي ويندرج تماما ضمن تقليد أبي كامل، وهو من جزأين: الجزء الاول يعالج الأسس المتصلة بالأعداد(ملخص لبعض مقالات كتاب الأصول مع بعض الإضافات). يعالج الجزء الثاني: حل مختلف المسائل باعتماد الوسائل الجبرية، بدءا بعرض وحل المشاكل التي لها حلول صحيحة أو ناطقة، ثم المسائل ذات الحلول الصماء. هذا الكتاب هو مع بعض الاستثناءات استعادة مقتضبة لكن بصيغة وتقديم مختلفين لمسائل أبي كامل. أما الإضافات فإنها تتعلق ببعض مسائل الجبر التي لم يكن لها مقابل في كتاب أبي كامل لكنه تندرج ضمن نفس التقليد، وكذلك بعض المسائل نظرية العدد مثل تفكيك عدد صحيح إلى مجموع مربعين. إضافة لهذا عالج ابن البنا المراكشي موضوع الجبر في مؤلفين آخرين هما:

تلخيص أعمال الحساب، رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب.

من مسائل ابن البنا(كتاب الجبر):

1- «رجل أتى السوق فوجد وزه بخمسة دراهم ودجاجة بأربعة دراهم وعشرة زرازير بدرهم، فأخذ من جميعها خمسة وعشرين طائر بخمسة وعشرين درهم. كم أخذ من كل صنف ؟.»

يقدم الحل عبر مراحل، ليصل إلى النتيجة التالية: يؤخذ من الإوز 3، يؤخذ من الدجاج 2، يؤخذ من الزرازير 20.

2- << عشرة قسمتها قسمين، فقسمت كل واحد منهما على الآخر، فخرج منهما جميعا أربعة وربـع >>

الحل هو: 8، 2. و من بين الأفكار التي استعملت في الحل: $(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})xy = x^2 + y^2$ لتؤول إلى معادلة من الدرجة 2.(الرقم 5 في ترتيب الخوارزمي).

الشروح الجبرية بعد القرن الثالث عشر

حسب معرفتنا الحالية، فإن الشرحين اللذين وصلا إلينا يخصان الأرجوزة هما:

رسالة **ابن قنفذ القسنطيني(ت.1407م):** *مبادئ السالكين في شرح أرجوزة ابن الياسمين.*

رسالة **القلصادي(ت.1486م)**: *تحفة الناشئين عن أرجوزة ابن الياسمين* .

الجبر في الكتب الحسابية للقرنين 14 و15م

باستثناء كتاب **القطراوني**"*رشفة الرضاب في ثغور أعمال الحساب*" فكل كتب الحساب المغربية التي وصلت إلينا هي عبارة عن شروح تلخيص أعمال الحساب لابن البناء .

نذكر :– *حط النقاب عن وجوه أعمال الحساب* **لابن قنفذ**

–*حط النقاب بعد رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب* **لابن زكرياء الغرناطي** (ت. 1408م).

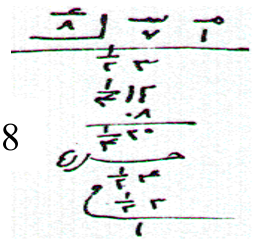
–*التمحيص في شرح التلخيص* **لابن هيدور التادلي** (ت. 1413م).

مضمون هذه المدرسة

– استقلال الجبر عن الهندسة نهائيا .

– ظهور الترميز في الرياضيات حيث تظهر للأول مرة الرمز، فيرمز إلى ∴ ؛ بـ شـ أو وللمال بـ: مـ وللكعب بـ: كـ وللمساواة بـ: لـ، وللجذر بـ: جـ .

مثال : 10 أموال و5 من العدد يعدل 3 جذورا: 10مـ 5 **لـ 3شـ**



$x^2 + 7x = 8$

– ظهور الصفر كطرف ثاني في معادلة من الدرجة الأولى(ابن قنفذ)

: 8شـ **لا 7 لـ 0 (8x-7=0).**

الفصل الخامس

مقتطفات من الرياضيات العربية

1– حساب المثلثات. Trigonométrie

كان في البداية ضمن النشاطات والبحوث التي تمت في إطار علم الهيئة، وعرف فيما بعد تطورا انطلاقا من:

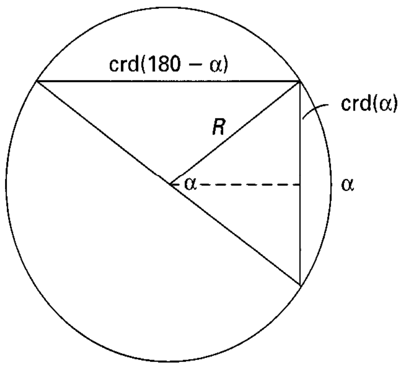
- التراث الهندي [كتاب **السندهاتا** ترجمة إبراهيم الفزاري 773م].
- التراث اليوناني من خلال ترجمة[كتاب **المجسطي**(لبطلميوس)، كتاب **الأشكال الكرية** (لمينلاوس)].

التراث اليوناني.

- وتر ضعف الزاوية: **corde de l'angle double**

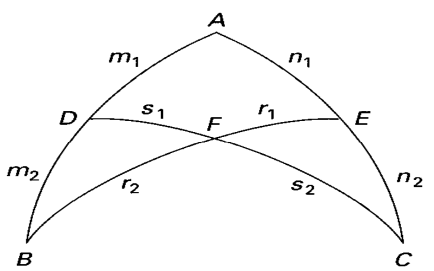
Hipparque $(-190/-120)$

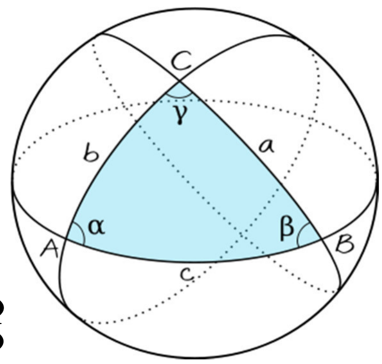
–عند بطلميوس العلاقات:



$$cord\,(a-b).cord\,(180°) = cord\,(a).cord\,(180°-b)$$
$$cord^2(a) + cord^2(180°-a) = cord^2(180°)$$

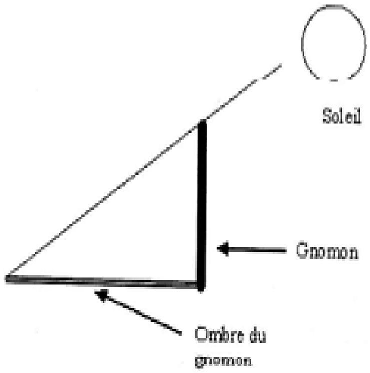
- نظرية مينلاوس **Menelaus** (مثلث كروي)





$$\frac{crd\,(2BF)}{crd\,(2FE)} \cdot \frac{crd\,(2CF)}{crd\,(2CD)} = \frac{crd\,(2CE)}{crd\,(2EA)}$$

التراث الهندي:

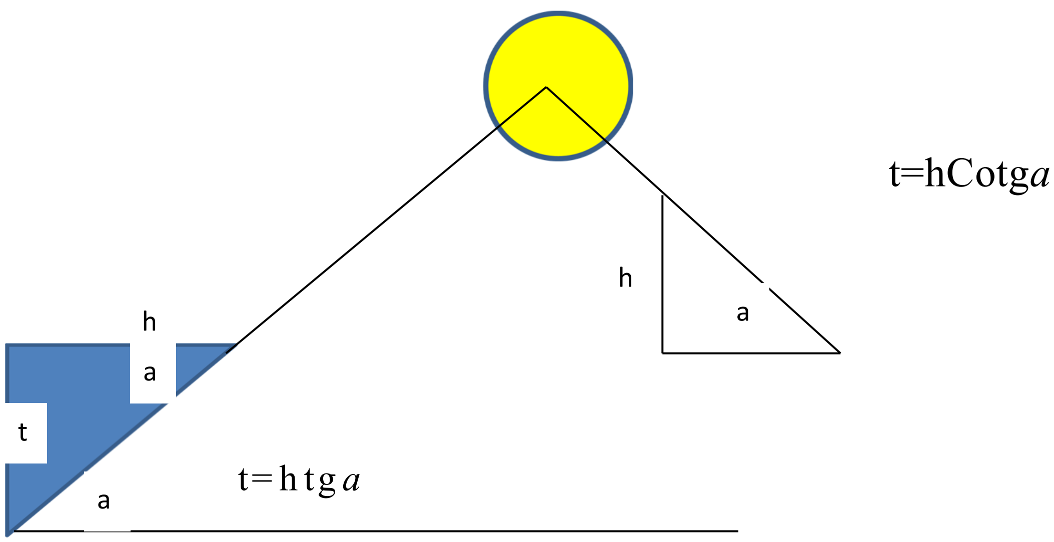


- خط منتصف النهار.
- استعمال الدائرة المثلثية ذات نصف القطر
60، 120، 150.
- الاتجاه Azimmt
- $(1-cosa)$ Sinus, Sinus-Verse. (Jiva)

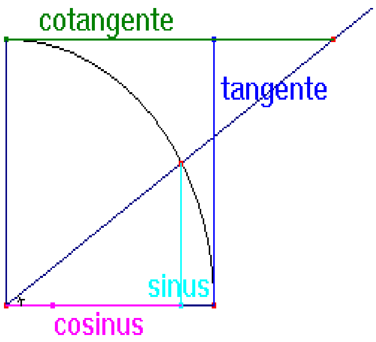
في التقليد العربي.

– قام محمد بن موسى الخوارزمي (ت.850 م) بتأليف احد أهم الكتب الفلكية الأولى باللغة العربية. ويتضمن هذا الكتاب بعض الجداول للجيوب والظلال.

ونتأكد بصورة أوضح أن مفهوم الظل والظل التمام كان معروفا عند أحد معاصري الخوارزمي وزميله في بيت الحكمة وهو: أحمد بن عبد الله المروزي(**حبش الحاسب**) (ت.حوالي874 م)حيث لم يظهر مفهوم الظل وظل التمام في البداية كخطوط مرتبطة بالدوائر، بل ارتبط هذا المفهوم بتحديد زاوية إرتفاع الشمس. يثبت عمود طوله h رأسيا. وضع الحاسب جدولا لطول ظل هذا العمود في أوقات مختلفة من النهار. حيث بدأ بدرجة واحدة ثم زادها حتى بلغت $45°$. ثم يثبت العمود أفقيا ليحصل على طول ظل العمود على الجدار كمايلي:



استمر العلماء العرب بعد الخوارزمي والحاسب من خلال المؤلفات الفلكية في الاهتمام بدراسة أضلاع المثلث القائم وعلاقتها بزوايا المثلث. وتطورت هذه الدراسة على يد **أبو عبد الله محمد بن جابر البتاني** (855– 929م) الذي وضع كتابا بعنوان "*إصلاح المجسطي*" أورد فيه العلاقات:



$$\frac{Cotg\ a}{r}=\frac{\cos a}{\sin a};\quad \frac{Tang\ a}{r}=\frac{\sin a}{\cos a}$$

$$r.Sec\ a=\sqrt{r^2+r^2tg^2a};\quad \cos a=\frac{r}{Sec\ a};$$

ثم عرضت مبادئ علم حساب المثلثات بشكل أوسع وأعمق في كتاب "الكامل" **لأبي الوفا البوزجاني**(940– 997م)، في هذا الكتاب عرفت جميع القيم المثلثية بطريقة موحدة عن طريقة دائرة نصف قطرها1 وربط ظل الزاوية بالمماس. ويضيف أبو الوفا $tga=\frac{1}{ctga}$ للعلاقات التي أعطاها الحاسب، ثم علاقات جيب مجموع وفرق مثل:

$$\sin(a-b)=\sqrt{\sin^2a-\sin^2a.\sin^2b}-\sqrt{\sin^2b-\sin^2a.\sin^2b}$$

$$sin2a=2sina.cosa$$

توصل كذلك أبوالوفا إلى تقريب التالي:

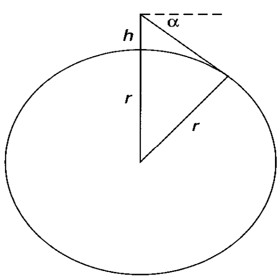
$$sin0.5^0{\sim}0.0087265373(\mathbf{55})$$

ولأبي الوفا أعمال أصيلة في حساب المثلثات الكروية **Trigonométrie Sphérique**.

قام **أبو الحسن علي بن سعيد عبد الرحمان بن احمد بن يونس** (ت.1009م) بالبرهان على حل نتائج التى توصل إليها أبوالوفا. مضيفًا بعض العلاقات مثل:

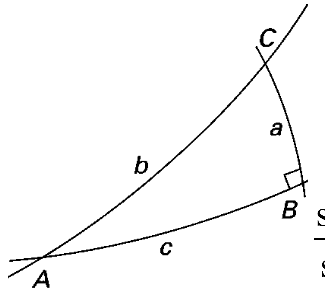
$$\cos a.\cos b=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$$

- ثم تأتي **أعمال أبو الريحان محمد بن احمد البيروني**(973–1048م) من خلال كتابه "*القانون المسعودي*" حيث عالج في جزئه الثالث حساب المثلثات.



$$r=\frac{h\cos a}{1-\cos a}$$

- وفي كتابه الفلكي" *مقاليد علم الهيئة*"يخصص بابا لهذا الغرض.
- ثم نجد أعمال **أبو نصر منصور بن علي بن عَرّاق(ت. 1036م)** حاضرة في حساب المثلثات العربية، فمن خلال التراجم التي تمت لكتاب"*الأشكال الكرية*" **لمينلاوس** يقوم **بن عراق** ببرهنة النظرية المعروفة بـ :**Théorème de sinus**



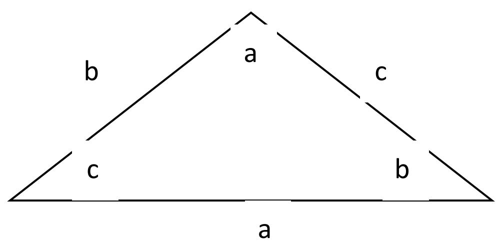
$$\frac{\sin\hat{A}}{\sin a}=\frac{\sin\hat{B}}{\sin b}=\frac{\sin\hat{C}}{\sin c}$$

وهكذا تدريجا بدأ هذا العلم ينسلخ من علم الفلك.

فنجد كذلك من الأندلس **ابن معاذ الجياني(ت.1079م)** في كتابه "*مجهولات قسي الكرة*" يخصص جانبا مهما لهذا العلم، وأصبحت نظرية **مينلاوس** تسمى بعد تعديلها وبرهانها بـ: الشكل المُغْنِي.

وخلاصة هذه الأعمال نجدها عند **نصير الدين الطوسي**(1201–1274م)، حيث يستقل حساب المثلثات عن علم الفلك، وتكتمل البراهين والعلاقات الخاصة بهذا الفن من الرياضيات، يخصص **الطوسي** لهذا الغرض كتاباً سماهُ "*الشكل القطاع*" أين يضيف علاقات خاصة بالمماس في حساب المثلثات الكروية، وكذلك نجد العلاقة الهامة في الحالة المستوية:

$$\frac{a}{\sin a}=\frac{b}{\sin b}=\frac{c}{\sin d}$$



- وأخيرا نجد عند **غياث الدين جمشيد بن مسعود بن محمود بن محمد الكاشي** (ت.1429م) جداول مثلثيه أكثر دقة، كما نجد العلاقة: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

التي يستعملها في إيجاد تقريب دقيق لـ: $sin1^0$ حيث يحصل على المعادلة: $4x^3+x=sin3$

ثم يدخل التابع: $f(x)=\frac{a+x^3}{b}$ والمتتالية: $f(x_n)=x_{n+1}$ حيث: $a=\frac{1}{4}sin3^0\ ;\ b=\frac{3}{4}$

ليجد: $sin1^0 \sim 0.017452406437283571$

– ثم نجد إنجاز آخر من اكتشاف الكاشي تمثل في تقدير قيمة العدد π ، منتقدا القيم السابقة لعدم دقتها [الخطأ في حساب مساحة دائرة قطرها ضعف قطر الأرض 6000 مرة لا يتجاوز سمك شعرة حصان] **الرسالة المحيطية للكاشي**. ولتحقيق هذا الحساب يأخذ دائرة نصف قطرها 1 في النظام العشري ويجد قيم الأوتار C_n التي تحصر الأقواس a_n حيث: $a_n = 180^0 + \frac{60^0}{2^{n-1}}$

ثم يكون المتتالية : $C_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - C_n^2}}$ $C_0 = 1$ الكاشي يكتفي بـ: $n = 28$ ليجد أخير:

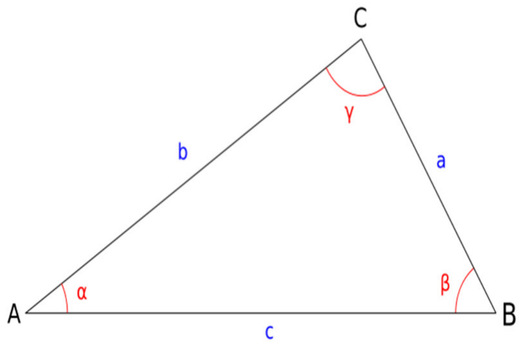
$$3.2^n . C_n \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

$$2\pi \sim 6.2831853071795865$$

قارن هذه القيمة بالقيمة الحالية؟

– نظرية الكاشي:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\ \gamma.$$



2– التحليل التوفيقي

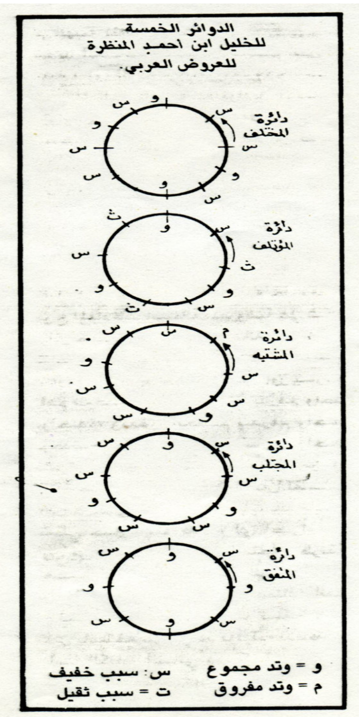
1– التقليد غير الرياضي:

ظهرت الممارسات التوفيقية في الموسيقى والكيمياء، وعلم التنجيم، العروض وعلوم اللغة. رسائل **إخوان الصفاء(ق. 10)** (4 مجلدات) تتكلم عن الإيقاعات والنغمات عن طريق تأليفات توفيقية، جاء فيها بخصوص تركيب النقرات ما يلي:

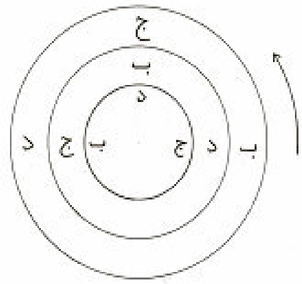
<< فإذا ركبت من هذه الثلاثة الأصول اثنين اثنين كانت منها تسع نغمات ثنائية ... وأما الثلاثية فهي عشر تركيبا ... فهذه جميع أنواع الإيقاع المركبة من النقرات، ثلاثة منها منفردة، وتسعة ثنائية، وعشرة ثلاثية>>.

بالنسبة للتنجيم، اهتم بهذا المشكل العديد من العلماء، وحاولوا اكتشاف طرق بناء وأنواع جديدة من المربعات السحرية نذكر من بينهم **ثابت بن قرة**(ت. 901)، **وابن الهيثم**(ت. 1040) بالشرق؛ **والبوني**(ت. 1252)، **وابن منعم**(ت. 1228)، **وابن البنا**(ت. 1321) بالمغرب العربي. لم تقف الاعتبارات التنجيمية وحدها وراء هذه الأبحاث، بل كانت للمربعات السحرية فائدة رياضية حقيقية تعلقت بنوعين من المشاكل الصعبة، منها إعداد خوارزميات إنشاء بسيطة لكل نوع من المربعات(مساوية، فردية، بشرط أو بدونه ...) وخصوصًا منها التعليل النظري لصحة هذه الخوارزميات.

– في العَروض نجد الخليل بن أحمد الفراهيدي (ت.786م)، إحصاء لعدد الكلمات ذات حرفين، الثلاثية، الرباعية والخماسية. [378، 3276، 20475، 98280].



– آلة بن دريد (ت.933م)(جمهرة اللغة). أعطى طريقة حسابية، لحساب ترتيبات حروف اللغة أبجد. ولخص بشكل مجمل طريقة ميكانيكية لحساب التبديلات المتكررة لـ n من الحروف.



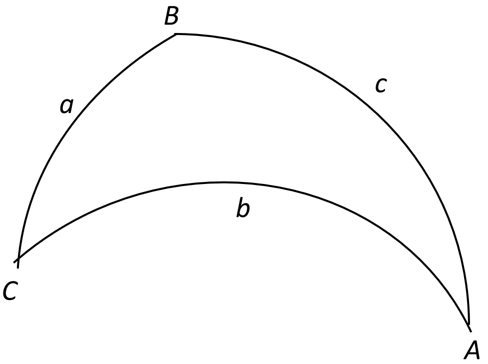
– نظرية الاشتقاق الكبير عند ابن جني (ت.1005م).

شكل نظرية لسانية تسمى الاشتقاق الكبير ذات اعتبارات توافيقية في جانب منها، وطور في كتابه المسمى *الخصائص* الفكرة القائلة بأن لكل توافق ثلاثي الصوامت للحروف العربية معنى أولي، تشتق منه معاني كل تبديلات التوافق المذكور. ويعطي كمثال على ذلك كلمة جبر التي تعطي بدورها ستة تبديلات: جبر، جرب، بجر، برج، رجب، ربج، وتوجد كلها في اللغة العربية، وتقترب جميع معانيها من فكرة القوة والإكراه.

التقليد الرياضي.

ثابت ابن قرّة. من خلال كتاب *الشكل القَطّاع*. عمّم فيه الافتراض الأول من الكتاب الثالث **لمينالاوس**(ق.2 م) المسمى *كتاب الأشكال الكرية* الذي يقيم علاقة بين العناصر الستة لمثلث كروي(زوايا وأضلاع المثلث).

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}\left(\frac{a_5}{a_6}\right)$$



أبو كامل المصري(ت 930). كتاب *طرائف الحساب*، يحتوي على ستة مسائل في الجمل التوفيقية. ويعالج فيه حل بعض جموع **المعادلات السيالة** المعروضة على شكل مسائل الطيور.

" دفع إليك 100 درهم فقيل لك: ابتع بها 100 طائر من حمام وبط ودجاج وعصافير. فإذا كانت كل بطة بـ 4 درهم، والدجاجة بدرهم، والحمامتين بدرهم، و10 عصافير بدرهم". أبو كامل يجد أن المسالة تقبل 98 حلا .

$$\begin{cases} x+y+z+t=100 \\ 4x+\dfrac{y}{10}+\dfrac{z}{2}+t=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=100-(x+y+z) \\ x=\dfrac{3y}{10}+\dfrac{z}{6} \end{cases}$$

من خلال الأعمال الجبرية للكرجي والسمؤال دراسة ثنائي الحد $(a+b)^n$ لتعيين معاملات كثير حدود[إرتباط المثلث العددي بالحسابات الجبرية]. في كتابه *الباهر في الجبر* استعمل السمؤال طريقة تأملية لعد المعادلات. فمثلا لإيجاد عشرة أعداد صحيحة بما يسمح لمجموع ستة منها أن يكون مساويًا لعدد معين، قام السمؤال بعد عدد المعادلات، ليجد 210 معادلة

- من خلال أعمال البيروني والخيام المفقودة في استخراج الجذر النوني لعدد صحيح موجب.

- **التحليل التوفيقي عند بن منعم (ت.1228م)** هو أحمد بن إبراهيم بن علي بن منعم العبدري، أبو جعفر، الرياضي، الذي اشتهر بعمله الأصيل في التحليل التوفيقي. من الأندلس نزيل مراكش توفي بها عام 626هـ الموافق لـ 1228م.

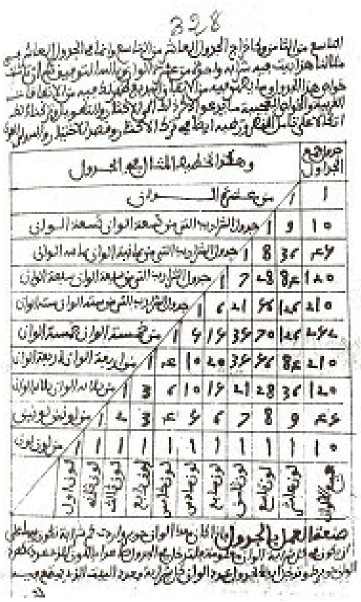
– من خلال مؤلفه الشهير "*فقه الحساب*" يخصص بن منعم بابا كاملا من 20 صفحة للتحليل التوفيقي " النوع 11 من الباب1: في حصر الكلمات التي لا يتكلم البشر إلا بإحداهن" وقد آتى بن منعم بحلول رياضية توافقية لعدة مسائل وببراهين استقرائية على صحة نتائج مكنته من حل مسألة الخليل حلا شاملا ونهائيا.

– عالج القسم الحادي عشر من الفصل الأول من كتاب" *فقه الحساب*"، التحليل التوفيقي لحصر الكلمات التي لا يتكلم البشر إلاّ بإحداهن.

$$(1)\quad C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}\qquad,\qquad(2)\quad P_n=n!\qquad,\qquad(3)\quad P_n^k=\frac{n!}{k!}$$

– **مسألة:** عشرة ألوان من الحرير، أردنا أن نعمل منها شراريب، بعضها من لون– لون، وبعضها من لونين– لونين، وبعضها من ثلاثة ألوان– ثلاثة ألوان، وكذلك إلى أن تكون آخر شرابة من عشرة ألوان. وأردنا أن نعلم كم عدد كل نوع على انفراده من أنواع الشراريب، لألوان كل شرابة منها معلومة، أو كم عدد جميع الشراريب إذا اجتمعت على اختلاف عدد ألوان الشراريب.

– انتهى ابن منعم إلى بناء لوحة مثلثية وفق طريقة استقرائية يطابق عناصرها مع التوافيق المطلوبة، ليستنتج العلاقة التالية: $C_n^p=C_{n-1}^{p-1}+C_{n-2}^{p-1}+\ldots+C_{p-1}^{p-1}$



فقه الحساب لابن منعم

– ويعطي ولأول مرة وفق طريقة توافقية المثلث العددي المشهور.

– برهان العلاقتين:

$$P_n^{k_1\ldots k_n}=\frac{n!}{k_1\times\ldots\times k_n!}\qquad\qquad P_n^k=\frac{n!}{k!}$$

– ثم نجد تلميذ بن منعم **القاضي الشريف**(ت.1283م) يواصل عمل أستاذه من خلال كتابه " *القانون في الحساب*".

ومع نهاية القرن 13م، شهد نشاط الحساب التوافقي اطلاقة جديدة على يد الرياضي **بن البنا المُرّاكُشي** الذي أتى بنتائج أصيلة في هذا الميدان، لخصها في رسالته "*تنبيه الألباب في أعمال الحساب*" وتوسع في شرحها في كتابه "*رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب*". بعض نتائج المتواصل إليها:

– برهان استقرائي للعلاقة: $C_n^p=\frac{n!}{p!.(n-p)!}$ والعلاقة: $C_n^2=\sum_{k=1}^{k=n-1}k$

واستمرت هذه الممارسات التوافقية بعد عهد ابن البنا تشهد على ذلك أعمال **ابن هيدور التادلي**(ت. 1413) في تعليقه المعنون بـ"*تحفة الطلاب*".

حاوي اللباب

وابن **زكرياء** الغرناطي(ت. حولي 1408) في كتابه "*حط النقاب*".

وابن **المجدي المصري**(ت. 1447) في مؤلفه "*حاوي اللباب*".

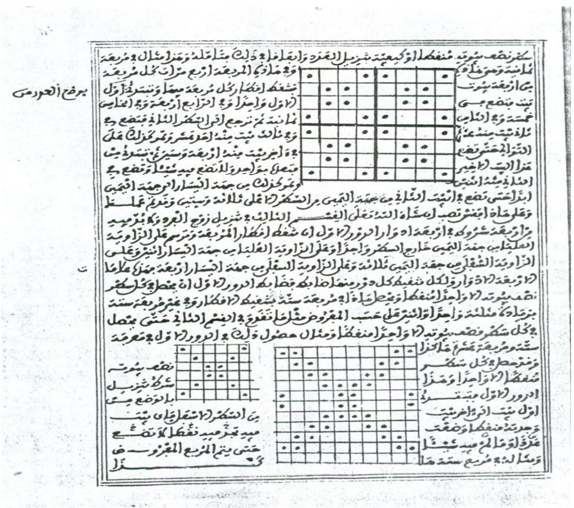
ومن المشرق كذلك نجد **نصير الدين الطوسي**(ت.1274م) في بحثه عن طريقة لاستخراج الجذر النوني لعدد صحيح يستعمل العلاقات:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

كما لا ننسى مساهمة **كمال الدين الفارسي**(ت. 1320) من خلال مؤلفه: "*تذكرة الأحباب في بيان التحاب*".

3– المربعات السحرية

الأعداد الموفقة : كيفية وضع الاعداد الموفقة في بيوتها (كيفية انشاء المربعات السحرية) لنأخذ ابن قنفذ القسنطيني(ت. 1407)[5] كنموذج.



مجموع كل سطر وكل عمود وكل قطر رئيسي:

$$S_n = \frac{n}{2}(n^2+1)$$

مثال من أجل $n = 4$

[5] – هو أبو العباس أحمد بن حسن بن علي بن الخطيب الشهير بابن قنفذ وبابن الخطيب القسنطيني. بدأ دراسته على والده وعلى جده لأمه بقسنطينة. رحل ابن قنفذ إلى فاس حيث قطن بها مدة تقدر بثمان عشرة سنة. وفي سنة (1374/776) عاد ابن قنفذ إلى قسنطينة، وبعد عام نجده بتونس حيث أخذ عن بعض العلماء بجامع الزيتونة، ثم عاد إلى بلده قسنطينة فولي الخطابة والإفتاء والقضاء. تمثل انتاجه الرياضي في مؤلفه **مبادئ السالكين في شرح رجز ابن الياسمين : وهو شرح لأرجوزة ابن الياسمين في الجبر والمقابلة.**

.			.
	.	.	
	.	.	
.			.

4			1
	7	6	
	11	10	
16			13

	14	15	
9			12
5			8
	2	3	

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

$$S_4 = \frac{4}{2}(4^2+1) = 34$$

4- الأرقام العربية.

مع نهاية القرن 8 الميلادي قدم إلى بلاط الخليفة العباسي أبو جعفر المنصور فلكي هندي، ومعه كتاب مشهور في الفلك والرياضيات هو "*سدهانتا*" لمؤلفه براهما قوبتا، المسمى عند العرب "*بالسند هند*" واستخدم فيه الأرقام الهندية وترجمت إلى العربية ونقلت إليها.

تعود أوائل الأعمال التي كتبت بالعربية في علم الحساب إلى الخوارزمي في القرن 9م من خلال رسالتين صغيرتين: *الحساب الهندي، الجمع والتفريق*. **كما نجد في** الفصل الأول من كتاب "*المختصر في حساب الجبر والمقابلة*" تذكير يخص التعريف بالنظام العشري الموروث عن الهنود.

ومن الأعمال التي العمل وصلت إلينا سليمة عمل أحمد بن إبراهيم الاقليدسي(ق. 10م) من خلال كتابه "*الفصول في الحساب الهندي*" حيث تناول بالإضافة إلى الحساب الهندي نظامين آخرين هما: الحساب الإصبعي(حساب اليد) والنظام الستيني.

حساب الجمل.

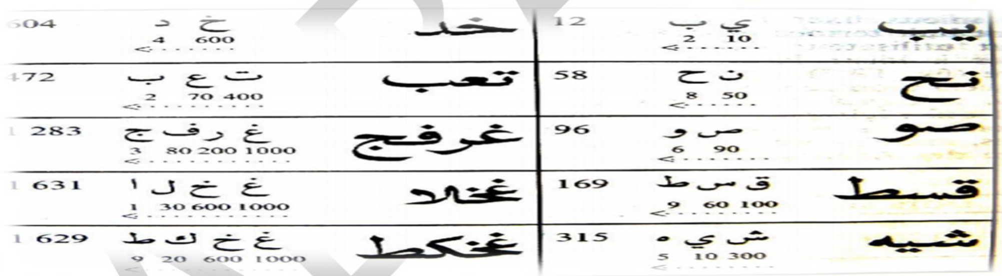
استعمل العرب الأرقام قبل ظهور الإسلام وبعده كغيرهم من الأمم، وسجلوها بالكلمات، كما أنهم استعملوا حروفَ أبجديتهم للدلالة على أرقامهم، وسَمَّوه (حساب الجمل).

وقد رتبوا حروف أبجد، على النحو التالي:

أَبْجَد هَوَّز حُطِّي كَلَمُن سَعْفَص قَرَشَت ثَخَذْ ضَظَغْ.

الآحاد:	أ	ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ط
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
العشرات:	ي	ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص
	10	20	30	40	50	60	70	80	90
المئات:	ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ
	100	200	300	400	500	600	700	800	900
الألف:	غ								
	1000								

أمثلة



يب	ي ب (2 10)	12	خد	خ د (4 600)	604
نح	ن ح (8 50)	58	تعب	ت ع ب (2 70 400)	472
صو	ص و (6 90)	96	غرفج	غ ر ف ج (3 80 200 1000)	1 283
قسط	ق س ط (9 60 100)	169	غخلا	غ خ ل ا (1 30 600 1000)	1 631
شيه	ش ي ه (5 10 300)	315	غخكط	غ خ ك ط (9 20 600 1000)	1 629

الحساب الإصبعي:

نظام يعتمد على الذاكرة أساسا، ليس فيه صعوبات فيما يخص الجمع أو الطرح، لكن العمليات الأخرى فهي معقدة أكثر.

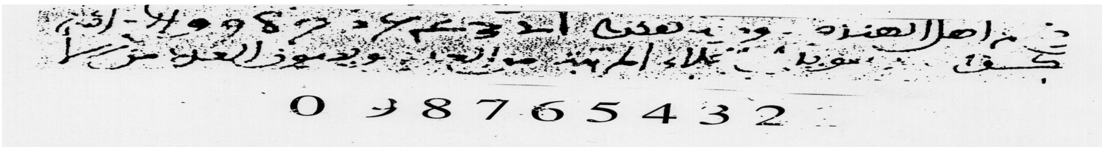
والحساب في هذا النظام كان يجرى ذهنيا.

والذي سمي كذلك بحساب اليد ثم فيما بعد بحساب الجمل.

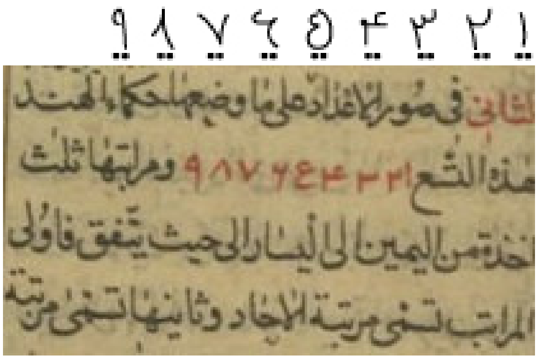
وتعود أقدم الأعمال في هذا المجال حسب المعلومات المتوفرة لدينا الآن إلى **أبو الوفا البوزجاني** من خلال كتابه "*ما يحتاج إليه الكُتاب والعمال من علم الحساب*".

الأرقام الغبارية

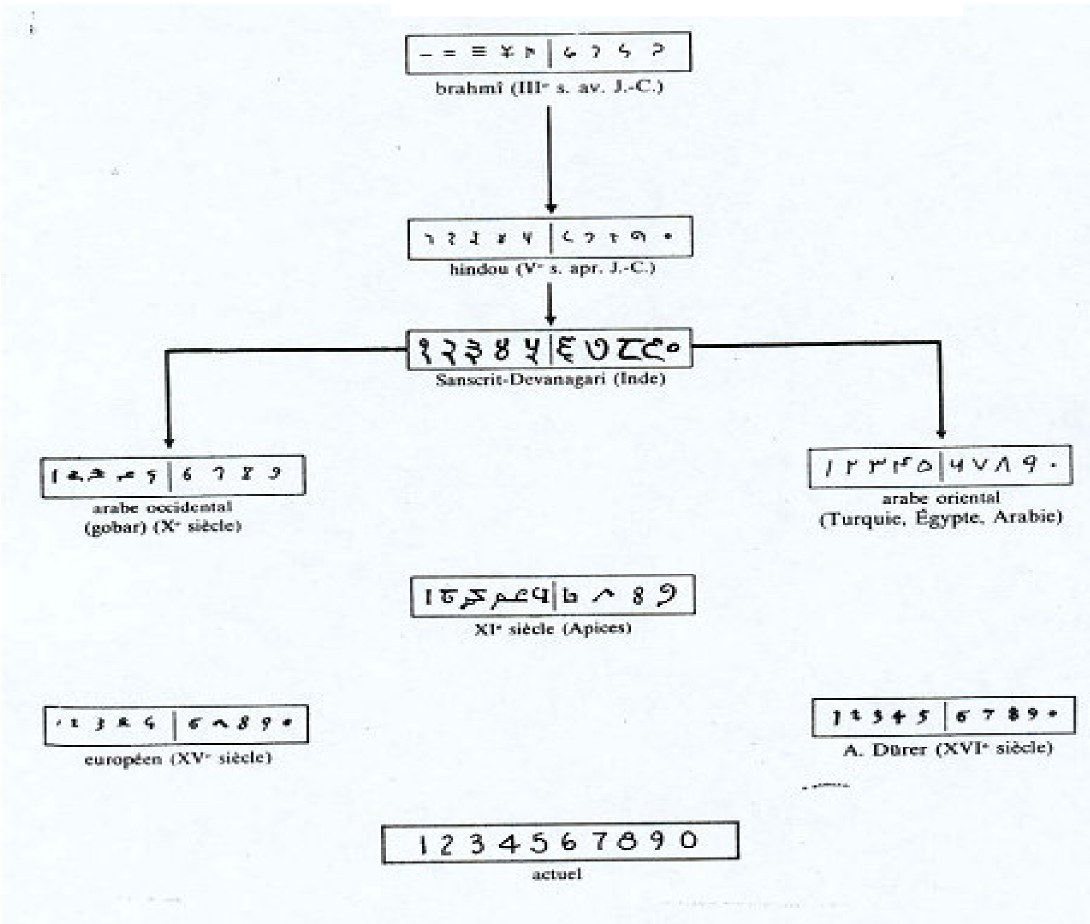
يقال ان هذا الاسم جاء بسبب كتابتها على منضدة أو لوحة من الرمل عند إجراء العمليات الحسابية، وهي المنتشرة في المغرب العربي بما في ذلك الأندلس (إسبانيا)، ومنها دخلت إلى أوربا، وسميت بالأرقام العربية.



أرقام انتشرت في المشرق:



"



سلاسل تمارين

السنة – 4 أستاذ متوسط & 5 ثانوي – سلسلة تمارين– 1– في تاريخ الرياضيات (رياضيات بابلية)

تمرين 1

اكتب في النظام البابلي الاعداد:

68671، 12464213، 216002، 12965310.

عن مـــــاذ يعبر العدد:  المكتوب بالأرقام البابلية.

تمرين 2

اليك مستخرج، من ترجمة نص للوحة بابلية(VAT 6505)، محفوظة بمتحف برلين. اشرح هذه الخوارزمية.

– العدد هو 10 ,4. ما هو مقلوبـه؟

1. تبحث عن مقلوب 10، تجد 6.
2. تضرب 6 في 4، تجد 24.
3. تضيف 1، تجد 25.
4. تبحث عن مقلوب 25، تجد 24 ,2.
5. تضرب 24 ,2 في 6، تجد 24 ,14.
6. المقلوب هو 24 ,14.

تمرين 3

حل المسألة. 0. طرحت ثلث المساحة ثم أضفت للمساحة ثلث(ضلع)المربع: 20; 0

1. ضع ;1 الوحدة.
2. تطرح ثلث ;1 : 40 ;0.
3. تحمل 40 ;0 إلى 20 ;0 تكتب : 20 ,13 ;0
4. قسم إلى جزئين 20 ;0 الثلث الذي أضفته: 10 ;0
5. تضرب 10 ;0 و 10 ;0 : 40 ,1 ;0
6. تضيف 40 ,1 ;0 إلى 20 ,13 ;0 : 15 ;0
7. هو مربع 30 ;0
8. 10 ;0 الذي ضربته اطرحه من 30 ;0 : 20 ;0
9. مقلوب 40 ;0 هو 30 ;1
10. تحمل 30 ;1 إلى 20 ;0 : 30 ;0
11. 30 ;0 هو ضلع المربع

تمرين 4

حل المسألة. 0. جمعت مساحة مربعي :;25 ,25 أحدهما ثلثي الأخر و;5

17. تسجل ;1 و40 ;0 و ;5
18. تضرب ; 5 و;5 : ; 25

19. تطرح ;25 من ;25 ,25 : سجل : ;0 ,25
20. تضرب ;1 و ;1: ;1
21. تضرب 40 ;0 و 40; 0 : 40 ,26 ;0
22. تضيف 40 ,26 ;0 إلى;1 : 40 ,26 ;1
23. تحمل 40 ,26 ;1 إلى ; 25,0: سجل : 40 ;6 ,36
24. تحمل 40 ;0 إلى ;5 : 20 ;3
25. تضرب 20 ;3 و 20 ;3 : 40 ,6 ;11
26. تضيف 40 ,6 ;11 إلى 40 ; 6 ,36 : 40 ,46 ;36,17
27. هو مربع 40 ;46
28. 20; 3 الذي ضربته من 40 ;46 تطرحه: سجل 20 ;43
29. مقلوب 40 ,26 ; 1 لا يمكن فصله
30. ماذا يجب افتراضه لـ 40 ,26 ;1 ليعطي20 ;43 ؟
31. تحمل ;30 الى ;1: ;30 هو المربع الاول
32. تحمل ;30 الى 40; 0: ;20 ، تضيف ;20 و ; 5: ;25 هو المربــع.

تمرين 5

حل المسألة. 0. جمعت مساحة مربعين ;40 ,21 و ضربت مربعيّ : ;10,50

1. قسم إلى جزئين ;40 ,21 : ;50 ,10
2. اضرب ;50 ,10 و ;50 ,10: ;40 ,21 ,57 ,1
3. اضرب ;0 ,10 و ;0 ,10: ;0 ,0 ,40 ,1
4. اطــرح ;0 ,0 ,40 ,1 من; 40 ,21 ,57 ,1: 40 ,21 ,17
5. هو مــربع: ;40,10
6. اضــف 4,10 إلى 4,10 أولا : ;15,0
7. هو مربع ;30 : ;30 هو المربع الاول.
8. اطــرح ;4,10 من ; 10,50 ثــانيــا : ;6,40
9. هو مــربع ;20 : ;20 هو المربع الثاني.

تمرين 6

حل المسألة. 0. جمعت مساحة مربعين ;40 ,21 أحدهــما يزيد عن الآخـر : ;10

1. قسم إلى جزئين ;40 ,21 : وسجل ;50 ,10
2. اضرب ;5 و ;5
3. اطــرح ;25 من ;50 ,10 : ;25 ,10

4. هو مـربع: ;25
5. سجل ;25 مرتين.
6. ;5 التي ضربتها أولا إلى ; 25 اضفها: ;30 هو المربع الأول.
7. ;5 من ;25 الثـانيـة اطرحها : ;20 هو المربع الثاني.

السنة – 4 أستاذ متوسط & 5 ثانوي – سلسلة تمارين –2– في تاريخ الرياضيات (رياضيات مصرية قديمة)

تمرين 1

اكتب في نظام العد المصري القـديم، الأعـداد:

180، 10101، 12111، 2019206

عن مـــاذا يعبر العدد:  المكتوب بالأرقام المصريـة.

تمرين 2

– أحسب بالطريقة المصرية القديمة:

$$9\times 12 \text{ ، } 13\times 7 \text{ ، } 5\times 12$$

– اقسم بالطريقة المصرية القديمة: 259 على 7، 19 على 5، 16 على 3.

تمرين 3

– أحسب على 6 لكي تحصل على 50.

– أحسب على 15 لكي تحصل على 4.

– اضرب بالطريقة المصرية القديمة:

$$\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+3\right)\times 47 \quad \text{،} \quad \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+3\right)\times 5$$

ما هي الملاحظات التي يمكنك استنتاجها لدى مقارنتك لهذه الطريقة مع الطريقة الحالية.

تمرين 4.

– فكك الكسور التالية كما يفعل المصري قديما:

$$\frac{6}{17}\text{ ، }\frac{5}{62}\text{ ، }\frac{2}{53}\text{ ، }\frac{11}{13}\text{ ، }\frac{7}{11}\text{ ، }\frac{5}{8}$$

– بين في رأيك كيف تواصل الكاتب المصري للنتيجة التالية:

$$\frac{2}{19}=\frac{1}{16}+\frac{1}{38}+\frac{1}{76}+\frac{1}{304} \quad \text{،} \quad \frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$

تمرين 5.

فسر النتائج التي يتحصل عليها المصري:

– قسمة 6 أرغفة على 10 فلاحين: $\overline{10}+\bar{2}$ لكل واحد.

– قسمة 7 أرغفة على 10 فلاحين: $\overline{30}+\bar{\bar{2}}$ لكل واحد.

– قسمة 8 أرغفة على 10 فلاحين: $\overline{\overline{2}}+\overline{10}+\overline{30}$ لكل واحد.

– قسمة 9 أرغفة على 10 فلاحين: $\overline{\overline{2}}+\overline{5}+\overline{30}$ لكل واحد.

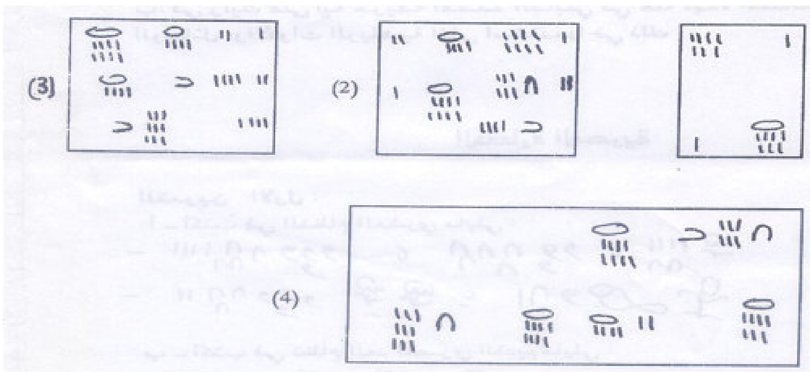
تمرين 6.

إليك المسألة. << يشترك ثلاث فلاحين في حصة من الأرغفة، نصيب الأول ثلثها، والثاني ربعها، والثالث نصيبه هو 10 أرغفة>>. أوجد هذه الحصة بالطريق الذي يتبعه المصري.

تمرين 7.

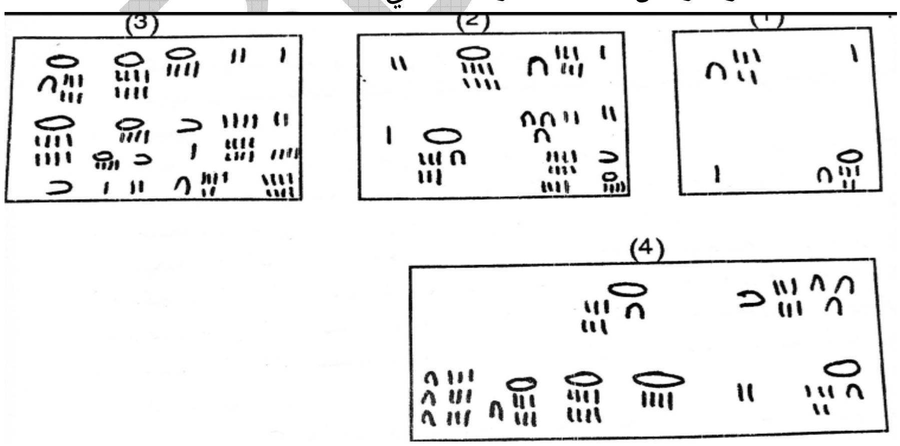
– إليك المسألة 26 من بردية ريند Rhind. << كمية و جزء من أربعة منها تعطي 15 >>. كيف يجد المصري هذه الكمية.

– إليك المسألة 24 من بردية ريند Rhind. << كمية و جزء من سبعة منها تعطي 19 >>. وحلها هو:



فسر النتائج.

– إليك المسألة << كمية و جزء من خمسة عشر منها تعطي 39 >>. وحلها هو:



فسر النتائج.

السنة – 4 أستاذ متوسط & 5 ثانوي –   سلسلة تمارين– 3– في تاريخ الرياضيات   (رياضيات يونانية)

تمرين 1

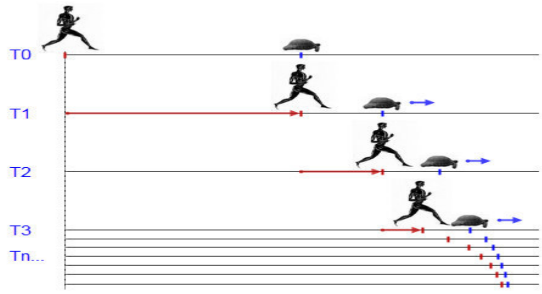
– اكتب في نظام العد اليوناني، الأعــداد: 12345، 3339905.

– عين الأعداد الخماسية والأعداد السداسية.

– اكتب الحد العام للاعداد الخطية، المثلثية، المربعة و المخمسة.

تمرين 2

ناقش مفارقة زينون– **Zénon d'Élée** –(القرن 4 ق. م.):



في هذا السباق بين آشيل والسلحفاة، يترك آشيل السلحفاة تسبقه بمسافة مقدارها a، وعندما يقطع هو هذه المسافة تكون السلحفاة قد قطعت المسافة a/2 . وهكذا، كلما يقطع آشيل مسافة تكون السلحفاة قد قطعت نصف تلك المسافة. فهل يمكن لآشيل أن يلحق بالسلحفاة؟

تمرين 3.

حل النصوص التالية.

1– (ديوفنطس, I, 27)

أوجد عددين مجموعهما 20 وجداءهما 96.

2– (ديوفنطس, III, 4)

أوجد ثلاثة أعداد يكون الخارج من طرح مربع مجموعها من كل واحد منها مربعا.

3– حل النص التالي:

نريد أن نجد عددين مكعبين يكون تفاضلهما عددا مربعا.

فنفرض المكعب الأصغر من ضلع شيء واحد, فيكون كعبا واحدا, ونفرض ضلع الأعظم كم أردنا من الأشياء, فلنفرضه من ضلع شيئين حتى يكون المكعب الأعظم ثمانية كعاب وتفاضلهما سبعة كعاب وهي تعدل عددا مربعا. فلنفرض ضلع المربع سبعة أشياء حتى يكون تسعة وأربعين مالا, فإذا السبعة الكعاب تعدل تسعة وأربعين مالا. والناحية التي منها الأموال أقعد (من) الناحيتين. فنقسم الجميع على مال واحد فيخرج لنا سبعة أشياء تعادل تسعة وأربعين أحدا, فالشيء الواحد يعدل سبعة آحاد. ومن أجل أنا فرضنا المكعب الأصغر من ضلع شيء واحد يكون ثلاثمائة وثلاثة وأربعين, ويكون ضلع الأعظم من أجل أنه من شيئين أربعة عشر, فيكون المكعب الأعظم ألفين وسبعمائة وأربعين وتفاضلهما ألفان وأربعمائة وواحد وهو مربع ضلعه تسعة وأربعون.

فقد وجدنا عددين مكعبين تفاضلهما عدد مربع. وذلك ما أردنا أن نبين.

(ديوفنطس, IV, 2, ترجمة قسطا بن لوقا (ت. 912 م))

4– الشكل 20 من المقالة التاسعة من كتاب الأصول.

الأعداد الأولية عددها غير منته.

تمرين 4.

حلل النصوص التالية :

a) الشكل الرابع من المقالة الثانية من كتاب الأصول .

"اذا قسم خط مستقيم كيف ما اتفق، فان مربعي القسمين وضعف السطح الذي يحيط به القسمان مساو لمربع الخط كله".

b) الشكل السادس من المقالة الثانية من كتاب الأصول .

اذا قسم خط مستقيم بنصفين وزيد عليه زيادة فان السطح الذي يحيط به الخط كله مع الزيادة والزيادة ومربع نصف الخط مساو لمربع الخط المركب من نصف الخط والزيادة.

c) الشكل 11 من المقالة الثانية من كتاب الأصول .

"نريد أن نقسم خطا مستقيما مفروضا بقسمين حتى يكون السطح القائم الزوايا الذي يحيط به الخط كله وأحد قسميه مساو لمربع القسم الباقي".

d) الشكل 14 من المقالة الثانية من كتاب الأصول.

انشىء مربعا مساحته تساوي مساحة مستطيل معطى.

e) الشكل 13 من المقالة السادسة من كتاب الأصول.

أوجد الوسط المتناسب لخطين مفروضين.

f) حلل النص التالي: "كل مثلث يخرج من زاوية من زواياه خط إلى القاعدة فيقسم الزاوية بنصفين فإن قسمي القاعدة يكون نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة ضلعي المثلث الباقيين أحدهما إلى الآخر. وإن كانت نسبة قسمي القاعدة أحدهما إلى الآخر كنسبة الضلعين الباقيين أحدهما إلى الآخر فإن الخط يقسم الزاوية بنصفين. مثاله أن قد أخرج من ج ا ب من مثلث ا ب ج خط ا د إلى قاعدة ب ج فقسم الزاوية بنصفين فأقول إن نسبة ب د إلى د ج كنسبة ب ا إلى ا ج. برهانه أنا نخرج من نقطة ج خطا يوازي خط ا د وهو خط ج ه ونخرج ب ا حتى يلقى ج ه على نقطة ه. فخط ا د يوازي ج ه وقد وقع عليهما خط ب ه فزاوية ب ا د الخارجية مثل زاوية ا ه ج الداخلية وأيضا فإن ا د يوازي ج ه وقد وقع عليها ا ج فزاويتا د ا ج، ه ج ا متبادلتان لكن زاوية ب ا د مثل زاوية د ا ج فزاوية ا ه ج مثل زاوية ا ج ه فضلع ا ج مثل خط ا ه فمثلث ب ج ه وقد أخرج من ضلع ب ه منه خطا يوازي ضلع ج ه وهو د ا فنسبة ب د إلى د ج كنسبة ب ا إلى ا ه. و اه مثل ا ج فنسبة ب د إلى د ج كنسبة ا ب إلى ا ج. وأيضا فليكن نسبة ب د إلى د ج كنسبة ا ب إلى ا ج ونخرج ا د فأقول إن زاوية ب ا ج قد انقسمت بنصفين فصارت زاوية ب ا د مثل د ا ج. برهان ذلك أنا أخرجنا خط ج ه موازيا لخط د ا وأخرجنا خط ب ا حتى تلقى ج ه على نقطة ه كما فعلنا قبل كانت نسبة ب د إلى ج د كنسبة ب ا إلى ا ه لكن نسبة ب د إلى د ج كنسبة ب ا إلى ا ج فنسبة ب ا إلى كل واحد من ا ج، ا ه متساويان. فزاويتا ا ه ج، ا ج ه متساويتان. لكن زاوية ا ج ه مثل زاوية د ا ج المتبادلة لها وزاوية ا ه ج الداخلة مثل زاوية ب ا د الخارجة فزاويتا د ا ب، د ا ج متساويتان وذلك ما أردنا".

السنة – 4 أستاذ متوسط & 5 ثانوي – سلسلة تمارين– 4– في تاريخ الرياضيات (رياضيات عربية)

تمرين 1 .

حلل النصوص التالية.

1- فإن قيل سار أحدهما في اليوم الأول فرسخين وفي الثاني أربعة وفي الثالث ستة ... على هذا. والآخر سار كل يوم عشرة فراسخ. في كم يوم يلتقيان؟ فاجعل الأيام شيئا واضربه في نفسه وزد عليه شيء. فيكون مالا وشيئا احفظه. ثم اضرب الشيء في عشرة يكن عشرة أشياء وذلك يعدل مالا وشيئا. فالشيء يكون تسعة وهذه هي الأيام التي فيها يلتقيان.

2- فإن قيل عشرة قسمتها قسمين وضربت أحد القسمين في الآخر وقسمت المبلغ من ذلك على الفضل ما بين القسمين فخرج جذر عشرة.

3- إذا قيل لك عشرة قسمتها قسمين فقسمت كل واحد من القسمين على الأخر وجمعتهما فكان جذر خمسة دراهم.

4- مال زدت عليه خمسه وخمسة دراهم ونقصت من المبلغ ثلثه وخمسة دراهم فلم يبق شيء.

5- فأما المقترن الثاني فهو أموال وأعداد تعادل أشياء والعمل في إخراج الشيء الواحد أن ترد الأموال إلى مال واحد ان كانت أكثر منه أو يكمل المال إن كانت أقل منه وطريقه أن تقسم جميع أعداد المسألة على عدد الأموال فيصير المال واحدا ثم يربع نصف الأجذار فان كان مساويا للعدد فان المطلوب مساو لعدد نصف الأجذار. وان كان أقل من العدد فالمطلوب مستحيل. وان أكثر فالمطلوب واجب الوجود فيلقي منه العدد ويأخذ جذر الباقي ويزيد على عدد نصف الأجذار أو ينقصه من عدد نصف الأجذار فما بلغ أو بقي فهو الشيء المطلوب.

6- عشرة أموال كعب يعادل 40 كعبا. فنقسمها على أقعد المراتب وهو الكعب فيخرج بالقسمة عشرة أموال يعادل 40 أحدا. فنقسم 40 على العشرة فيخرج المال أربعة فإذا ضربناه في جذره كان الكعب 8 ويكون الأربعين كعبا 320 وعشرة أموال كعب يكون 320 وهما متعادلان.

7- إذا أردت أن تأخذ جذر كعب كعب أربعة أموال كعب وأربعة أموال مال وستة كعوب واثني عشر مالا وتسعة آحاد، أخذت جذر كل من الطرفين أعني جذر كعب كعب وجذر تسعة آحاد يكون كعب وثلاثة آحاد. وقسم 12 مالا على 3 آحاد وخذ نصف الخارج من القسمة وزده على المحفوظ يصير كعبا ومالين وثلاثة فهو المطلوب.

تمرين 2

حلل النص التالي وقل ماهي الحيلة التي استعملها الرياضي لحل المسالة التالية:

<< إن قيل مال مال وكعبان يعدل جذر المال وثلاثين فمعادلته تصح ويخرج الجذر فيها معلوما بحيلة حسنة. فكأن قال مال يعدل جذره وثلاثين، فتعمل بأحد الضروب الست فيكون الجذر يعدل ستة وقد كنا أقمنا مقام المال المطلوب وجذر هو حسب ما تقدم فيكون الجذر المطلوب اثنان>>

تمرين 3.

حلل النصوص التالية.

1- أما الجمع على توالي الاعداد فهو ان تضرب نصف المنتهي إليه في المنتهي إليه وواحد. وتربيعه بضرب ثلثي المنتهي إليه وزيادة ثلث واحد في المجموع. وتكعيبه بتربيع المجموع. وأما الجمع على توالي الأفراد فهو ان تربع نصف المنتهى اليه المؤلف مع الواحد. وتربيعه بضرب سدس المنتهى إليه في مسطح العددين الذين يليانه بعده. وتكعيبه بضرب المجموع في ضعفه إلا واحد. وأما الجمع على توالي الأزواج فهو أن تحمل على المنتهى إليه اثنين أبدا وتضرب نصف المجتمع في نصف المنتهى إليه.

2- كل عدد يقسم بقسمين فإن مربع مربع العدد المقسوم مساو لمربع كل واحد من القسمين وضرب كل واحد من القسمين في مكعب الآخر أربع مرات وضرب مربع أحدهما في مربع الأخر ست مرات.

3- ادرس النص التالي : " فإن قيل أرض مثلثة من جانبيها عشرة أذرع والقاعدة أثنا عشر ذراعا في جوفها أرض مربعة كم كل جانب من المربعة" .

فقياس ذلك أن تعرف عمود المثلثة وهو أن تضرب نصف القاعدة وهو ستة في مثله فيكون ستة وثلاثين فأنقصها من أحد الجانبين الأقصرين مضروبا في مثله وهو مائة يبقى أربعة وستون فخذ جذرها ثمانية وهو العمود وتكسيرها ثمانية وأربعون ذراعا وهو ضربك العمود في نصف القاعدة وهو ستة فجعلنا أحد جوانب المربعة شيئا وضربناه في مثله فصار مالا فحفظناه ثم علمنا أنه قد بقى لنا مثلثتان عن جنبتي المربعة ومثلثة فوقها فأما المثلثتان على جنبتي المربعة فهما متساويتان. وعموداهما واحد وهما على زاوية قائمة فتكسيرها أن تضرب شيئا في ستة إلا نصف شئ فيكون ستة أشياء إلا نصف مال وهو تكسير المثلثتين جميعا اللتين هما على جنبتي المربعة. فأما تكسير المثلثة العليا فهو أن تضرب ثمانية غير شئ وهو العمود في نصف شئ فيكون أربعة أشياء إلا نصف مال فهذا هو تكسير المربعة وتكسير الثلاث مثلثات وهو عشرة أشياء تعدل ثمانية وأربعين هو تكسير المثلثة العظمى فالشئ الواحد من ذلك أربعة أذرع وأربعة أخماس ذراع وهو كل جانب من المربعة."

- ادرس التبرير الذي قدمه الخوارزمي لحل المعادلة الخامسة:

" مال وأحد وعشرون درهما تعدل عشرة أجذاره"

فنجعل المال سطحا مربعا مجهول الأضلاع وهو سطح أ د. ثم نضم إليه سطحا متوازي الأضلاع عرضه مثل أحد أضلاع سطح أ د وهو ضلع هـ ن والسطح هـ ب. فصار طول السطحين جميعا ضلعه جـ هـ. وقد علمنا أن طوله عشرة من العدد لأن كل سطح مربع متساوي الأضلاع والزوايا فإن أحد أضلاعه مضروبا واحد جذر ذلك السطح وفي إثنين جذراه. فلما قال مال وأحد وعشرون تعدل عشرة أجذاره علمنا أن طول ضلع هـ جـ عشرة أعداد لأن ضلع ضلع جـ د جذر المال. فقسمنا ضلع جـ هـ بنصفين على نقطة ح فيتبين لنا أن خط هـ ح مثل خط ح جـ. وقد تبين لنا أن خط ح ط مثل خط جـ د فزدنا على خط ح ط على استقامته مثل فضل جـ ح على ح ط ليتربع السطح. فصار خط ط ك مثل خط ك م وحدث سطح مربع متساوي الأضلاع والزوايا وهو سطح م ط. وقد كان تبين لنا أن خط ط ك خمسة

وأضلاعه مثله فسطحه إذن خمسة وعشرون وهو ما اجتمع من ضرب نصف الأجذار في مثلها وهو خمسة في خمسة يكون خمسة وعشرين. وقد كان تبين لنا أن سطح هـ ب هو الواحد والعشرون التي زيدت على المال. فقطعنا من سطح هـ ب بخط ط كـ الذي هو أحد أضلاع سطح م ط بقي سطح ط ا. وأخذنا من خط كـ م خط كـ ل وهو مثل خط ح كـ فتبين لنا أن خط ط ح مثل خط م ل. وفضل من خط م ك خط ل كـ وهو مثل خط كـ ح فصار سطح م ز مثل سطح ط ا. فيتبين لنا أن سطح هـ ط مزيدا عليه سطح م ز مثل سطح هـ ب وهو أحد وعشرون. وقد كان سطح م ط خمسة وعشرين. فلما نقصنا من سطح م ط سطح هـ ط وسطح م ز الذين هما واحد وعشرون بقي لنا سطح صغير وهو سطح زكـ وهو فضل ما بين خمسة وعشرين وواحد وعشرين وهو أربعة وجذرها خط زح وهو مثل خط ح ا وهو إثنان. فإن نقصتهما من خط ح جـ الذي هو نصف الأجذار بقي خط اجـ وهو ثلاثة وهو جذر المال الأول.

فإن زدته على خط جـ ح الذي هو نصف الأجذار بلغ ذلك سبعة وهو خط زح. ويكون جذر المال أكثر من هذا المال إذا زدت عليه واحدا وعشرين صار ذلك مثل عشرة أجذاره. وذلك ما أردنا أن نبين."

المراجع.

1-المراجع العربية.

- الأقليدسي.(1985)، **الفصول في الحساب الهندي**، تحقيق أ. س. سعيدان، حلب، ط2، معهد التراث العلمي العربي.
- ابن منعم. (2005)، **فقه الحساب**، تحقيق: إدريس لمرابط، الرباط، دار الأمان.
- البغدادي، عبد القاهر.(1985)، **التكملة في الحساب**، تحقيق: أ. س. سعيدان، الكويت، ط1، معهد المخطوطات العربية.، 1985.
- جبار، أ.(2011)، **علماء الحضارة العربية الاسلامية ومساهماتهم**(العلوم الرياضية والفلكية وتطبيقاتها) ق9 م- ق 15 م، الجزائر العاصمة، ط1، كليك للنشر.
- جبار، أ.(2008)، **العلوم العربية في عصرها الذهبي**، ترجمة: عبد السلام الشدادي ومحمد آبلاغ، المغرب: تيمارا(الرباط)، بيت الفنون والعلوم والآداب.
- ر. راشد.(1989)، **تاريخ الرياضيات العربية بين الجبر والحساب**، بيروت، ط1، مركز دراسات الوحدة العربية.
- ر. راشد.(2010)، **رياضيات الخوارزمي تأسيس علم الجبر**، ترجمة نقولا فارس، بيروت، ط1، مركز دراسات الوحدة العربية.
- ر. راشد & ر. مورلون. (1997)، **تاريخ العلوم العربية**، بيروت، ط1، مركز دراسات الوحدة العربية، ج.2.
- قرقور يوسف. (1986): **الرياضيات المغاربية، ابن قنفذ القسنطيني(ت. 1407)**، الملتقى الدولي الأول لتاريخ الرياضيات العربية، الجزائر العاصمة، الجزائر، ص. 179-190.

- قرقور يوسف. (2010): **تاريخ الرياضيات للسنة الرابعة التعليم المتوسط**، مطبوعة دروس، المدرسة العليا للأساتذة القبة. الجزائر.

- الطوسي نصير الدين.(1967)، **جوامع الحساب بالتخت والتراب**، تحقيق أحمد سليم سعيدان، *مجلة الأبحاث*، رقم 20، بيروت، ج. 1. 1967. ص: 61–193.

- عباسي، أ.(2010)، **حساب الجذر النوني لعدد عن الحسن النيسابوري(ت. بعد 1330 م)**، رسالة ماجستيرفي تاريخ الرياضيات، الجزائر: المدرسة العليا للأساتذة بالقبة.

- الكاشي.(1967)، **مفتاح الحساب**، تحقيق: الدمرداش. أ. س & الحنفي. م. ح، القاهرة، دار الكتاب العربي للطباعة والنشر.

- الكرجي.(1986)، **الكافي في الحساب**، تحقيق وشرح: شلهوب س.، حلب، معهد التراث العلمي العربي.

2- المرجع غير العربية.

- Aballagh, M. (1988), *les fondements des mathématiques à travers le Rafʿal- ḥijāb d'ibn al-bannā',* actes de colloque: 1re colloque international d'Alger sur l'histoire des mathématiques arabes, (Alger, 1-3 Décembre 1986), Maison des livres, Alger, pp : 133-155.

- Allard, A. (1992), *Muhammed Ibn Musa al-Khwarizmi, Le calcul indien (Algorismus), versions latines du XIIe siècle*, Paris, Blanchard, Bruxelles, Société des Etudes Classiques.

- Berggren, J. L. (1986), *Episode in the mathematics of medieval Islam,* New York-Berlin, Springer-Verlag.

- Djebbar, A. (1987), *Algorithmes et optimisation dans les mathématiques arabes,* Actes du Premier Symposium International de l'ICOMIDC sur "Informatics and the teaching of mathematics in developing countries" (Monastir, 3-7 Février1986), M. Amara, N. Boudriga, K. Harzallah (édit.), Tunis, 10pp.

- Djebbar, A. (2008), *L'âge d'or des sciences arabes,* Rabat, Maison des arts, des sciences et des lettres.
- Djebbar, A. (2005), *L'algèbre arabe : Genèse d'un art,* Paris: Vuibert & Adapt.

- Djebbar, A. (1983), *L'analyse combinatoire au Maghreb: l'exemple d'Ibn Mun'ım XIIe-XIIIe s.* Paris, Université Paris-Sud, Prépublication, 1983, n° 83 T 03 ; Publications Mathématiques d'Orsay, 1985, n° 85-01.

- Katz Victor J. (1998), *A history of mathematics: an introduction*, Addison-Wesley, Educational Publishers, Inc, Second Ed.

- Lamrabet, D. (1994), *Introduction à l'histoire des mathématiques maghrébines,* Rabat, Dar al-Ma'ârif al-Jadida.

- Maurice, Caveing. (1994), *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes*, Presses Univ de LILLE

- Ragep, F. Jamil. (2000), "Al-Ṭūsī, Naṣīr al-Dīn: As scientist" *In Encyclopedia of Islam*, 2nd Ed. Vol. 10, Leiden: E. J. Brill. Pp: 750–752.

- Sarton, George. (1936*b), the Study of the History of Mathematics,* Cambridge: Harvard University Press.

- Youschkevitch, A. P. (1976), *Les mathématiques arabes (VIII^{e}-XV^{e}),* M. Cazenave & K. Jaouiche (trad.), Paris, Vrin.