الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة-بوسعادة

المجاهد الفريق أحمد قايد صالح

قسم: العلوم الدقيقة

École Normale Supérieure

de Bou Saâda

Dép. Sciences Exactes

دروس في المعادلات التفاضلية

المقياس: المعادلات التفاضلية

المستوى: السنة الرابعة رياضيات

الأستاذ: عثمان عبداللاوي

الرتبة: أستاذ محاضر بالمدرسة العليا للأساتذة-بوسعادة

11/11/2021

السنة الجامعية: 2020-2021

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

École Normale Supérieure
de Bou Saâda
Dép. Sciences Exactes

المدرسة العليا للأساتذة-بوسعادة
المجاهد الفريق أحمد قايد صالح
قسم: العلوم الدقيقة

دروس في المعادلات التفاضلية

المقياس: المعادلات التفاضلية

المستوى: السنة الرابعة رياضيات

الأستاذ: عثمان عبداللاوي

الرتبة: أستاذ محاضر بالمدرسة العليا للأساتذة-بوسعادة

السنة الجامعية: 2020-2021

الفهرس

المقدمة

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على نبينا محمد، وعلى آله وأصحابه أجمعين، أما بعد: تعد المعادلات التفاضلية – بصنفيها العادية والجزئية – من أهم فروع الرياضيات التطبيقية ولا غنى لكافة فروع العلوم الهندسية والفيزيائية عنها. بدأت دراسة المعادلات التفاضلية في القرن السابع عشر في أعمال العديد من العلماء كوسيلة لنمذجة ودراسة بعض الظواهر الفيزيائية، حيث أستخدمت وتستخدم في نمذجة وفهم بعض المسائل الفيزيائية التي تتعلق بتابع بمتغير واحد وكمثال على ذلك معادلة الحركة لنيوتن أما المعادلات التفاضلية الجزئية فأستخدمت وتستخدم في نمذجة وفهم بعض المسائل الفيزيائية التي تتعلق بتابع بأكثر من متغير واحد وكأمثلة على ذلك، نذكر:

(1) معادلة الحرارة والتي تحكم إنتشار الحرارة.

(2) معادلة الموجة والتي تحكم إنتقال الضوء والصوت وموجات الماء.

(3) معادلة الإنتشار والتي تصف فيض الجسيمات والطاقة.

لا توجد طرق رياضية عامة لحل المعادلات التفاضلية ولكن هناك بعض الطرق يمكن تعميمها على نمط خاص من المعادلات التفاضلية وحتى الطرق العددية فهي ليست طرقا عامة لحل جميع المعادلات التفاضلية في كل الشروط. معرفة الشروط الإبتدائية للنظام الذي تعبر عنه المعادلة التفاضلية مهم جدا ويعتمد عليها في إستقراء مستقبل سلوك النظام قيد الدراسة فكلما عرفنا الظروف الأولية والشروط الإبتدائية لنظام ما بدقة كلما إستطعنا التكهن وبدقة عن سلوكه مستقبلا.

هذه المطبوعة، عبارة عن مجموعة محاضرات في المعادلات التفاضلية، ألقيت على مدى ثلاث سنوات لطلبة السنة الرابعة رياضيات (أستاذ تعليم متوسط وثانوي) وقد تم إعدادها بناءا على ما إحتواه عرض التكوين لشهادة أستاذ التعليم المتوسط والثانوي المتعلق بمقياس المعادلات التفاضلية لطلبة السنة الرابعة رياضيات رمز ر415. إن إعداد هذه المطبوعة إعتمد على الجهود الكبيرة التي بذلها العديد من العلماء والباحثين والمؤلفين والمترجمين، فقد إقتصر عملي على تجميع هذه المادة العلمية، وترتيبها، وتنسيقها، ومحاولة صياغتها بأبسط طريقة ممكنة لتسهيل وصولها للطالب، مع بعض الإضافات.

قسمت المطبوعة إلى خمسة فصول، هي على النحو التالي:

الفصل الاول: تذكير بالمعادلات وجمل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى، حيث تطرقنا في هذا الفصل إلى مجموعة من المفاهيم الأولية حول المعادلات وجمل المعادلات التفاضلية العادية الخطية وغير الخطية من الرتبة الأولى

وإلى وجود ووحدانية الحل واختتمنا هذا الفصل بطرق مكاملة بعض أنواع المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى.

الفصل الثاني: المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية، حيث تطرقنا في هذا الفصل إلى مسألة وجود ووحدانية الحل للمعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية، تطرقنا كذلك إلى بعض طرق حساب الحل للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية في حالة المعاملات الثابتة وفي حالة المعاملات غير الثابتة.

الفصل الثالث: المسائل الحدية (المسائل ذات النقطتين)، حيث تطرقنا في هذا الفصل الى المسائل ذات النقطتين أي المسائل مع الشروط الحدودية وكحالة خاصة من هذه المسائل ذات النقطتين فقد تركز اهتمامنا على مسألة ستورم ليوفيل"Sturm Liouville" حيث اهتممنا بمسألة وجود قيم ذاتية وتوابع ذاتية لها.

الفصل الرابع: المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية، حيث تطرقنا في هذا الفصل إلى بعض المفاهيم الأولية حول المعادلات التفاضلية الجزئية. دراسة وجود الحل للمعادلات التفاضلية الجزئية مسألة معقدة تتطلب مفاهيما خارجة عن مقررات السنة الرابعة رياضيات لذلك فإننا نفرض دوما وجود الحل ونقوم بحسابه. تركز اهتمامنا في هذا الفصل على المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية بأنماطها الأساسية الثلاثة: الناقصية، المكافئة والزائدية حيث قمنا بحل مسائل تفاضلية مشكلة من هذه الأنماط الثلاثة باستعمال كلا من طريقة فصل المتغيرات (طريقة فوريه "Fourier") وطريقة تحويل لابلاس وكأمثلة عن دراسة وحدانية الحل فقد استعملنا مبدأ الطاقة لإثبات وحدانية الحل لكل من مسألة القيم الإبتدائية-الحدية للحرارة و مسألة القيم الإبتدائية-الحدية للموجة.

الفصل الخامس: طريقة الفروق المنتهية لحل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية، حيث تطرقنا في هذا الفصل إلى المبدأ العام لهذه الطريقة ثم قمنا باستعمالها لحل بعض أنواع المسائل الحدية بمعادلات تفاضلية عادية وكذلك استعملناها في حل بعض أنواع المسائل الحدية بمعادلات تفاضلية جزئية.

كل فصل من الفصول المذكورة أعلاه، مدعوم بأمثلة توضيحية لتسهيل استيعاب محتوياته وقد تم إختتام كل فصل - ماعدا الفصل الأول - بمجموعة من التمارين المقترحة.

في الأخير، أتمنى أن أكون قد وفقت، بمشيئة الله، في تزويد طلبتنا الأعزاء بمولود بيداغوجي جديد، نحسبه أن يكون سندا لهم في دراسة مقياس المعادلات التفاضلية، كما أتمنى من الطلبة والأساتذة الزملاء موافاتنا بملاحظاتهم القيمة لنأخذ بها في المستقبل. والله الموفق.

الفصل الأول

تذكير بالمعادلات وجمل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

محتوى الفصل

في كل مما يلي I مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ و n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 1.

1.1 مفاهيم عامة حول المعادلات وجمل المعادلات التفاضلية الخطية

- نسمي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى كل معادلة من الشكل:

$$Y'(x)+A(x)Y(x)=B(x) \qquad (1.1.1)$$

حيث $A:\ I\to M_n(\mathbb{C})$ و $B:\ I\to\mathbb{C}^n$ دالتان مستمرتان. حل المعادلة التفاضلية (1.1.1) يعني إيجاد كل الدوال $Y:\ I\to\mathbb{C}^n$ القابلة للإشتقاق على I والتي تحقق المعادلة (1.1.1).

- المعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة بالمعادلة (1.1.1) هي:

$$Y'(x)+A(x)Y(x)=0 \qquad (1.1.2)$$

- ليكن $(x_0,Y_0)\in I\times\mathbb{C}^n$. نسمي مسألة كوشي المرفقة بالمعادلة التفاضلية (1.1.1) كل مسألة من الشكل:

$$\begin{cases} Y'(x)+A(x)Y(x)=B(x) \\ Y(x_0)=Y_0 \end{cases} \qquad (1.1.3)$$

- إذا كانت $A:\ I\to M_n(\mathbb{C})$ و $B:\ I\to\mathbb{C}^n$ دالتان مستمرتان و $(x_0,Y_0)\in I\times\mathbb{C}^n$. فإن المسألة (1.1.3) تقبل حلا وحيدا معرفا على I.

نظرية 1.1.1 (**بنية مجموعة الحلول**): لتكن $A:\ I\to M_n(\mathbb{C})$ و $B:\ I\to\mathbb{C}^n$ دالتان مستمرتان.

1. مجموعة الحلول S للمعادلة التفاضلية المتجانسة (1.1.2) هي فضاء شعاعي جزئي من $C^1(I,\mathbb{C}^n)$ بعده يساوي n.
2. مجموعة حلول المعادلة التفاضلية غير المتجانسة (1.1.1) هي فضاء تآلفي جزئي من $C^1(I,\mathbb{C}^n)$ بعده يساوي n.

2.1 حل المعادلات وجمل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة

إذا كانت $A\in M_n(\mathbb{C})$. نسمي أسية A المصفوفة المعرفة بـ:

$$\exp(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}.$$

خواص: لدينا الخواص التالية:

1. التطبيق $A\mapsto\exp(A)$ مستمر من $M_n(\mathbb{C})$ في $M_n(\mathbb{C})$.
2. إذا كان $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ بحيث $AB=BA$ فإن $\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B)$.
3. من أجل كل $A\in M_n(\mathbb{C})$. التطبيق $x\mapsto\exp(xA)$ قابل للإشتقاق ومشتقه هو $x\mapsto A\exp(xA)$.

نظرية 1.2.1: ليكن $A\in M_n(\mathbb{C})$، $x_0\in I$ و $Y_0\in\mathbb{C}^n$. التطبيق المعرف بـ: $x\mapsto \exp((x-x_0)A)Y_0$ هو الحل الوحيد للمسألة الكوشية:

$$\begin{cases} Y'(x)=AY(x) \\ Y(x_0)=Y_0 \end{cases}$$

نتيجة 1.2.1: لتكن $A\in M_n(\mathbb{C})$ مصفوفة قابلة للتقطير في $\mathbb{C}$ و ليكن $\{V_1,V_2,...,V_n\}$ الأساس المشكل من الأشعة الذاتية لـ A المرفقة بالقيم الذاتية $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$ على الترتيب معادة بقدر رتب تضاعفها. التوابع التالية:

$$Y_i(x)=e^{\lambda_i x}V_i\,,\quad 1\le i\le n$$

تشكل أساسا للفضاء الشعاعي لمجموعة حلول المعادلة المتجانسة: $Y'(x)=AY(x)$.

3.1 طريقة تغيير الثابت لحل المعادلات وجمل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة

نعتبر المعادلة التفاضلية غير المتجانسة:

$$Y'(x)=AY(x)+B(x) \qquad (1.3.1)$$

حيث $A:\ I\to M_n(\mathbb{C})$ و $B:\ I\to\mathbb{C}^n$ دالتان مستمرتان.

نسمي جملة أساسية لحلول المعادلة (1.3.1) كل أساس $\{Y_1,Y_2,...,Y_n\}$ للفضاء الشعاعي لمجموعة حلول المعادلة المتجانسة المرفقة بها.

مبرهنة 1.3.1: ليكن $\{Y_1,Y_2,...,Y_n\}$ جملة أساسية لحلول المعادلة (1.3.1) و $\{C_1,C_2,...,C_n\}$ جملة لـ n دالة من الصنف C^1 على I. التطبيق Y المعرف بـ:

$$x\mapsto Y(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)Y_i(x)$$

هو حل للمعادلة غير المتجانسة (1.3.1) إذا وفقط إذا تحقق من أجل كل $x\in I$ ما يلي:

$$\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)Y_i(x)=B(x)$$

مبرهنة 2.3.1: إذا كانت $A:\ I\to M_n(\mathbb{C})$ و $B:\ I\to\mathbb{C}^n$ دالتان مستمرتان و $(x_0,Y_0)\in I\times\mathbb{C}^n$. فإن المسألة التالية:

$$\begin{cases} Y'(x)=AY(x)+B(x) \\ Y(x_0)=Y_0 \end{cases}$$

تقبل حلا وحيدا على I محدد بالعلاقة التالية:

$$. Y(x)=\exp((x-x_0)A)Y_0+\int_{x_0}^{x}\exp((t-x_0)A)B(t)dt \qquad (1.3.2)$$

كحالة خاصة من المبرهنة 1.3.1: من أجل $n=1$ تكون لدينا المسألة الكوشية التالية:

$$\begin{cases} y'(x)=ay(x)+b(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

حيث a ثابت حقيقي و $b:\quad I\to\mathbb{C}$ دالة مستمرة. هذه المسألة تقبل حلا وحيدا على I محدد بالعبارة التالية:

$$. y(x)=\exp((x-x_0)a)y_0+\int_{x_0}^{x}\exp((t-x_0)a)b(t)dt$$

في حالة المعادلات التفاضلية السلمية ذات المعاملات المتغيرة. لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 3.3.1: إذا كانت كلتا الدالتين a و b مستمرتان على I و $x_0\in I$ فان المسألة التالية:

$$\begin{cases} y'(x)=a(x)y(x)+b(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

تقبل حلا وحيدا على I محدد بالعبارة التالية:

$$y(x)=\left[y_0+\int_{x_0}^{x}b(t)\exp\left(-\int_{x_0}^{t}a(s)\,\mathrm{d}s\right)dt\right]\exp\left(\int_{x_0}^{x}a(s)\,\mathrm{d}s\right) \qquad (1.3.3)$$

4.1 المعادلات التفاضلية غير الخطية

ليكن Ω نطاقا مفتوحا من $\mathbb{R}^2$ و $f:\quad \Omega\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة.

- نسمي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى كل معادلة من الشكل:

$$y'(x)=f(x,y(x)) \qquad (1.4.1)$$

- نسمي حلا للمعادلة (1.4.1) كل دالة حقيقية $\varphi: x\mapsto\varphi(x)$ تحقق الشروط التالية:

(أ) φ قابلة للإشتقاق باستمرار على I أي أن: $\varphi\in C^1(I)$.

(ب) من أجل كل $x\in I$ فإن $(x,\varphi(x))\in\Omega$.

(ت) من أجل كل $x\in I$ فإن $\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$.

تعريف 1.4.1: لتكن $x\mapsto y(x)=\phi(x)$ حلا للمعادلة (1.4.1) على المجال I.

حل المعادلة (1.4.1) الذي هو ψ المعرف على مجال J يحوي I، يسمى تمديدا للحل ϕ، إذا حقق:

$$\forall x \in I : \psi(x) = \phi(x)$$

تعريف 2.4.1: نقول عن حل للمعادلة (1.4.1) إنه أعظمي إذا انطبق أي تمديد له عليه.

نظرية 1.4.1 (**كوشي ليبشيتز"Cauchy Lipschitz"**): ليكن Ω نطاقا مفتوحا من $\mathbb{R}^2$ و $f: \quad \Omega \to \mathbb{R}^2$ دالة من الصنف C^1 على Ω. إذا كانت (x_0, y_0) نقطة من Ω فإن مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(\mathrm{x}_0) = y_0 \end{cases}$$

تقبل حلا أعظميا وحيدا على مجال مفتوح يشمل x_0.

لنتطرق الآن إلى طرق مكاملة بعض أنواع المعادلات التفاضلية غير الخطية من الرتبة الأولى.

5.1 مكاملة بعض أنواع المعادلات التفاضلية غير الخطية

1.5.1 مكاملة المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة

تعريف 1.5.1: كل معادلة من الشكل:

$$g(y(x))y'(x) = f(x) \qquad (1.5.1)$$

حيث f و g دالتان مستمرتان على مجال I من $\mathbb{R}$، تسمى معادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين.

مبرهنة 1.5.1: ليكن F تابعا أصليا للتابع f و G تابعا أصليا للتابع g على مجال I من $\mathbb{R}$. نقول إن التابع $y \in C^1(I)$ حلا لـ (1.5.1) إذا وفقط إذا حقق المعادلة التالية:

$$G(y(x)) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \qquad (1.5.2)$$

مثال 1.5.1: كامل المعادلة التفاضلية:

$$y' = 1 + y^2 \qquad (1.5.3)$$

بقسمة طرفي المعادلة (1.5.3) على $1 + y^2$ نجد:

$$\begin{aligned}(1.5.3) &\Leftrightarrow \frac{y'}{1+y^2}=1 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{1+y^2}=\int dx\\ &\Leftrightarrow \arctan(y)=x+c,\quad c\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow y=\tan(x+c),\quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

2.5.1 مكاملة المعادلات التفاضلية لبرنولي "Bernouli"

تعريف 2.5.1: نسمي معادلة لبرنولي كل معادلة من الشكل:

$$y'+a(x)y=b(x)y^m \qquad (1.5.4)$$

حيث a و b تابعان مستمران على مجالي تعريفيهما و $m\in\mathbb{R}-\{0,1\}$.

– مكاملة معادلة برنولي

أولا: نقوم بتحويل معادلة برنولي إلى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى. بقسمة طرفي المعادلة (1.5.4) على y^m حيث $y^m\neq 0$ نجد:

$$(1.5.4)\Leftrightarrow \frac{y'}{y^m}+a(x)\frac{1}{y^{m-1}}=b(x)$$

نضع $z=\frac{1}{y^{m-1}}$ ومنه فإن $z'=(1-m)\frac{y'}{y^m}$ ويكون لدينا:

$$\begin{aligned}(1.5.4) &\Leftrightarrow \frac{1}{1-m}z'+a(x)z=b(x)\\ &\Leftrightarrow z'+(1-m)a(x)z=(1-m)b(x)\end{aligned}$$

ثانيا: نبحث عن الحل z للمعادلة التفاضلية (1.5.5) والتي هي خطية ومن الرتبة الأولى:

$$z'+(1-m)a(x)z=(1-m)b(x) \qquad (1.5.5)$$

ثم نحسب y حل المعادلة التفاضلية (1.5.4) أي حل معادلة برنولي من العلاقة التالية: $y(x)=\sqrt[1-m]{z(x)}$. بما أن $y=0$ كذلك حلا للمعادلة (1.5.4) فإن مجموعة حلول (1.5.4) هي:

$$S=\left\{x\mapsto y_1(x)=\sqrt[1-m]{z(x)},\qquad x\mapsto y_2(x)=0\right\}$$

مثال 2.5.1: كامل المسألة التالية:

$$\begin{cases} y'(x)-y(x)=xy^2(x) & (1.5.6)\\ y(0)=1 & (1.5.7)\end{cases}$$

أولا: نقوم بتحويل المعادلة $(1.5.6)$ إلى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى. بقسمة طرفي المعادلة $(1.5.6)$ على y^2 حيث $y^2 \neq 0$ نجد:

$$(1.5.6) \Leftrightarrow \frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y} = x$$

نضع $z = \dfrac{1}{y}$ ومنه فإن $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$ ويكون لدينا:

$$(1.5.6) \Leftrightarrow z' + z = -x$$

ثانيا: نبحث عن الحل z للمعادلة التفاضلية $(1.5.8)$ والتي هي خطية ومن الرتبة الأولى:

$$z' + z = -x \qquad (1.5.8)$$

باستعمال العلاقة $(1.3.3)$ نجد أن:

$$z(x) = \left[z_0 + \int_{x_0}^{x} b(t) \exp\left(-\int_{x_0}^{t} a(s)\,ds \right) dt \right] \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds \right) \qquad (1.5.9)$$

حيث $a(x) = -1$ ، $b(x) = -x$ ، $x_0 = 1$ و $z_0 = 1$. بالتعويض في $(1.5.9)$ نجد:

$$z(x) = -x + 1$$

ومنه فإن الحل y للمسألة التفاضلية $((1.5.6)-(1.5.7))$ هو:

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{-x+1}, \qquad x \in \mathbb{R} - \{1\} .$$

الفصل الثاني

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

محتوى الفصل

1.2 مفاهيم عامة حول المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

تكتب المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية في شكلها العادي كالتالي:

$$y''=F\left(x,y,y'\right) \quad (2.1.1)$$

مسألة كوشي للمعادلة (2.1.1) تكمن في إيجاد حل $y=\varphi(x)$ للمعادلة (2.1.1) يمر بنقطة (x_0,y_0) بميل يساوي $y'(x_0)$.

مبرهنة 1.1.2 (الوجود والوحدانية): إذا كانت F مستمرة في نطاق D من $\mathbb{R}^3$ و تحقق شرط ليبشيتز "Lipschitz"بالنسبة لكل من y و y' فإنه من أجل كل نقطة (x_0,y_0,y'_0) داخلية لـ D، في جوار ما لـ x_0 يعرف حل واحد للمعادلة (2.1.1) يحقق الشرطين: $y(x_0)=y_0$ و $y'(x_0)=y'_0$ أي يوجد حل واحد لمسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y''=F(x,y,y') \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y'_0 \end{cases}$$

تعريف 1.1.2: نسمي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات توابع كل معادلة تكتب من الشكل:

$$y''(x)+b\left(x\right)y'(x)+c\left(x\right)y(x)=f(x) \quad (2.1.2)$$

حيث b ، c و f توابع مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$.

ملاحظات:

- إذا كان $f=0$ فإن المعادلة (2.1.2) هي معادلة متجانسة.
- إذا كان $f\neq 0$ فإن المعادلة (2.1.2) هي معادلة غير متجانسة.
- في حل المعادلات التفاضلية من الشكل (2.1.2) نفرض دوما أن $y\in C^2(I)$.

نتيجة 1.1.2: بفرض أن $x_0\in I$ وبما أن الدوال b ، c و f مستمرة على المجال I فانه يوجد حل وحيد للمعادلة (2.1.2) في جوار ما للنقطة x_0 يحقق الشرطين التاليين: $y(x_0)=y_0$ و $y'(x_0)=y'_0$

2.2 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة

تعريف 1.2.2: نسمي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة كل معادلة تكتب من الشكل:

$$y''(x)+by'(x)+cy(x)=f(x) \qquad (2.2.1)$$

حيث f تابع مستمر على مجال I من $\mathbb{R}$ و b و c ثابتان حقيقيان.

تعريف 2.2.2: نعرف مؤثرا تفاضليا L كما يلي:

$$\mathrm{L}: C^2(I) \to C^0(I)$$
$$y \mapsto \mathrm{L}(y)=y''+by'+cy$$

مع b و c يمكن أن يكونا تابعين مستمرين على I كما يمكن أن يكونا ثابتين حقيقين. المؤثر L خطي أي أنه من أجل كل $y_1,y_2 \in C^2(I)$ و α و β ينتميان إلى $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$، لدينا:

$$\mathrm{L}\left(\alpha y_1+\beta y_2\right)=\alpha \mathrm{L}\left(y_1\right)+\beta \mathrm{L}\left(y_2\right)$$

ملاحظة 1.2.2: إذا استعملنا المؤثر L في المعادلة (2.1.2) أو في المعادلة (2.2.1) نجد:

$\mathrm{L}(y)(x)=f(x)$ من أجل كل $x \in I$ أي أن $\mathrm{L}(y)=f$.

1.2.2 دراسة المعادلات المتجانسة $\mathrm{L}(y)=0$

نفرض أن $\varphi(x)=e^{rx}$ حلا للمعادلة $\mathrm{L}(y)=0$ فيكون لدينا: $\varphi''(x)=r^2e^{rx}$ و $\varphi'(x)=re^{rx}$. بتعويض كلا من φ، φ' و φ'' في المعادلة $\mathrm{L}(y)=0$ نجد:

$$r^2e^{rx}+bre^{rx}+ce^{rx}=0$$

أي أن

$$e^{rx}\left(r^2+br+c\right)=0$$

وبما أنه من أجل كل $r\in\mathbb{R}$ لدينا: $e^{rx}\neq 0$ فإن

$$r^2+br+c=0$$

تعريف 3.2.2: كثير الحدود من الشكل:

$$p\left(r\right)=r^2+br+c$$

يسمى كثير الحدود المميز للمعادلة التفاضلية: $\mathrm{L}(y)=0$.

لحل المعادلة التفاضلية $\mathrm{L}\left(y\right)=0$ نميز ثلاث حالات:

الحالة الأولى: إذا كان p يقبل جذرين حقيقين مختلفين r_1 و r_2 معناه $\Delta=b^2-4c>0$. في هذه الحالة يكون لدينا: $r_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}$ و $r_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$ والحل العام للمعادلة $\mathrm{L}\left(y\right)=0$ يكون على الشكل:

$y\left(x\right)=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$.

مثال 1.2.2: حل المعادلة التفاضلية: $\quad y''(x)-4y(x)=0 \qquad (2.2.2)$

كثير الحدود المميز للمعادلة (2.2.2) هو $p(r)=r^2-4$ و لدينا:

$$p(r)=0 \Leftrightarrow r^2-4=0 \Leftrightarrow (r=-2)\vee(r=2)$$

ومنه فالحل العام للمعادلة (2.2.2) يكون على الشكل:

$$y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x} / \quad c_1,c_2\in\mathbb{C}.$$

الحالة الثانية: إذا كان p يقبل جذرا مضاعفا معناه $\Delta=0$ معناه $b^2-4c=0$ وليكن r_0 هو هذا الجذر.

الحل العام للمعادلة $\mathrm{L}(y)=0$ في هذه الحالة يكون على الشكل:

$$y(x)=c_1e^{r_0x}+c_2xe^{r_0x} / \quad c_1,c_2\in\mathbb{C}$$

مثال 2.2.2: حل المعادلة التفاضلية: $y''(x)-2y'(x)+y(x)=0 \quad (2.2.3)$

كثير الحدود المميز للمعادلة (2.2.3) هو $p(r)=r^2-2r+1$ ولدينا:

$$p(r)=0 \Leftrightarrow r^2-2r+1=0 \Leftrightarrow r_0=1$$

ومنه فالحل العام للمعادلة (2.2.3) يكون على الشكل:

$$y(x)=c_1e^{x}+c_2xe^{x} / \quad c_1,c_2\in\mathbb{C}.$$

الحالة الثالثة: إذا كان p يقبل جذرين عقديين مترافقين معناه $\Delta<0$ و $r_1=\alpha+i\beta$ و $r_2=\alpha-i\beta$.

حلول المعادلة $\mathrm{L}(y)=0$ في هذه الحالة هي من الشكل:

$$y(x)=e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right)/ \quad c_1,c_2\in\mathbb{C}$$

مثال 3.2.2: حل المعادلة التفاضلية: $y''(x)+y'(x)+y(x)=0 \quad (2.2.4)$

كثير الحدود المميز للمعادلة (2.2.4) هو $p(r)=r^2+r+1$ ولدينا:

$$p(r)=0 \Leftrightarrow r^2+r+1=0 \Leftrightarrow (r=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})\vee(r=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

ومنه فالحل العام للمعادلة (2.2.4) يكون على الشكل:

$$y(x)=e^{\frac{-x}{2}}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+c_1\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)/ \quad c_1,c_2\in\mathbb{C}$$

1.1.2.2 الإستقلال والإرتباط الخطي للحلول

تعريف 4.2.2: ليكن φ_1 و φ_2 حلين للمعادلة $\mathrm{L}(y)=0$ على مجال I من $\mathbb{R}$.

- نقول عن φ_1 و φ_2 أنهما مرتبطين خطيا على I إذا وجد ثابتين حقيقيين c_1 و c_2 بحيث: $c_1\neq0$ كذلك $c_2\neq0$ و $c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)=0$ من أجل كل x من I.
- نقول عن φ_1 و φ_2 أنهما مستقلين خطيا على I إذا تحقق ما يلي:

$$\forall x\in I,\quad \forall c_1,c_2\in\mathbb{R}:\quad c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)=0\Rightarrow c_1=c_2=0$$

2.1.2.2 دراسة إستقلال حلول المعادلة المتجانسة

نميز الحالات الثلاثة التالية:

– **حالة** $\Delta>0$. في هذه الحالة يكون $\varphi_1(x)=e^{r_1x}$ و $\varphi_2(x)=e^{r_2x}$ ومن أجل كل $x\in I$ و $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. لدينا:

$$\begin{aligned}c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)=0 &\Leftrightarrow c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}=0\\ &\Rightarrow c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}=0\\ &\Rightarrow c_1+c_2e^{(r_2-r_1)x}=0\\ &\Rightarrow c_2\left(r_2-r_1\right)e^{(r_2-r_1)x}=0\\ &\Rightarrow c_2=0.\end{aligned}$$

بتعويض $c_2=0$ في المساواة $c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)=0$ نجد $c_1=0$ ومنه φ_1 و φ_2 مستقلين خطيا على I.

– **حالة** $\Delta=0$. في هذه الحالة $\varphi_1(x)=e^{r_0x}$ و $\varphi_2(x)=xe^{r_0x}$ ومن أجل كل $x\in I$ و $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ لدينا:

$$\begin{aligned}c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)=0 &\Leftrightarrow \forall c_1,c_2\in\mathbb{R}:\quad c_1e^{r_0x}+c_2xe^{r_0x}=0\\ &\Rightarrow c_1+c_2x=0\\ &\Rightarrow c_1=c_2=0\end{aligned}$$

ومنه فإن φ_1 و φ_2 مستقلين خطيا على I.

– **حالة** $\Delta<0$. تترك للطالب.

مبرهنة 1.2.2: إذا كان φ_1 و φ_2 حلين مستقلين للمعادلة $\mathrm{L}(y)=0$ على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الحل العام للمعادلة $\mathrm{L}(y)=0$ يكتب من الشكل:

$$y(\mathrm{x})=\mathrm{c}_1\,\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)/\quad c_1,c_2\in K,\quad ((K=\mathbb{R})\vee(K=\mathbb{C})).$$

تعريف الرونسكي"Wronskian": ليكن I مجالا من $\mathbb{R}$ و $\varphi_1,\varphi_2\in C^1(I)$، نسمي المحدد:

$$\mathrm{W}\left(\varphi_1,\varphi_2\right)(x)=\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x)\\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x)\end{vmatrix}=\varphi_1(x)\varphi'_2(x)-\varphi'_1(x)\varphi_2(x)$$

رونسكيان التابعين φ_1 و φ_2. واضح أن W تابع للمتغير x ولذلك نرمز له تجاوزا بالرمز $\mathrm{W(x)}$ وسنرى الآن أن دالة الرونسكيان تقوم بدور مهم في تحديد خواص حلول المعادلة التفاضلية وهو دور يستند في الأساس على النتيجة التالية:

نتيجة 1.2.2: ليكن φ_1 و φ_2 حلين للمعادلة $\mathrm{L}(y)=0$ على مجال I و $x_0\in I$. لدينا:

$$\mathrm{W}(\varphi_1,\varphi_2)(x)=\mathrm{W}(\varphi_1,\varphi_2)(x_0)e^{-b(x-x_0)}$$

إثبات: من تعريف الرونسكي، لدينا:

$$\mathrm{W}(\varphi_1,\varphi_2)(x)=\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x)\\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x)\end{vmatrix}=\varphi_1(x)\varphi'_2(x)-\varphi'_1(x)\varphi_2(x)$$

وبما أن φ_1 و φ_2 حلين للمعادلة $\mathrm{L}(y)=0$ فإنه ينتج لدينا:

$$\begin{cases}\varphi''_1(x)+\mathrm{b}\,\varphi'_1(x)+\mathrm{c}\,\varphi_1(x)=0\\ \varphi''_2(x)+\mathrm{b}\,\varphi'_2(x)+\mathrm{c}\,\varphi_2(x)=0\end{cases}$$

بضرب طرفي المعادلة الأولى في $\varphi_2(x)$ وطرفي المعادلة الثانية في $\varphi_1(x)$ وبالطرح نجد أن:

$$\left(\varphi''_1(x)\varphi_2(x)-\varphi''_2(x)\varphi_1(x)\right)+b\left(\varphi'_1(x)\varphi_2(x)-\varphi'_2(x)\varphi_1(x)\right)=0$$

أي أن الرونسكيان يحقق المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى التالية:

$$\mathrm{W}'(\varphi_1,\varphi_2)(x)+b\mathrm{W}(\varphi_1,\varphi_2)(x)=0$$

بحل هذه المعادلة التفاضلية نجد إذن: $\mathrm{W}(\varphi_1,\varphi_2)(x)=\mathrm{W}(\varphi_1,\varphi_2)(x_0)e^{-b(x-x_0)}$.

نتيجة 2.2.2: إذا كان φ_1 و φ_2 حلين للمعادلة $\mathrm{L}(y)=0$ على مجال I فإما أن يكون $\mathrm{W}(x)=0$ على I بكاملة أو أن يكون $\mathrm{W}(x)\neq 0$ لأي x من I.

مبرهنة 2.2.2: ليكن φ_1 و φ_2 حلين للمعادلة $\mathrm{L}(y)=0$ لدينا التكافؤ التالي:

φ_1 و φ_2 مستقلان خطيا على I إذا وفقط إذا كان $\mathrm{W}(\varphi_1,\varphi_2)(x)\neq 0$ من أجل كل x من I.

إثبات :

$(\Leftarrow)$: نفرض أن الحلين φ_1 و φ_2 للمعادلة $\mathrm{L}(y)=0$ مستقلان خطياً ونبرهن أنه من أجل كل x من I ، لدينا: $\mathrm{W}(x)\neq 0$. لنفرض جدلا أنه: $\exists x_0\in I:\mathrm{W}(x_0)=0$ ولنعتبر الجملة التالية:

$$(2.2.5):\quad \begin{cases}\alpha_1\varphi_1(x_0)+\alpha_2\varphi_2(x_0)=0\\ \alpha_1\varphi'_1(x_0)+\alpha_2\varphi'_2(x_0)=0\end{cases}$$

حيث α_1 و α_2 ثوابت مجهولة. محدد الجملة (2.2.5) هو $\mathrm{W}(x_0)=0$ أي أن الجملة (2.2.5) تملك حلا غير معدوم وليكن $\alpha_1=\alpha_1^0$ و $\alpha_2=\alpha_2^0$.

من جهة الدالة $\varphi=\alpha_1^0\varphi_1+\alpha_2^0\varphi_2$ هي حل للمعادلة $\mathrm{L}(y)=0$. ومن جهة أخرى فحسب الجملة (2.2.5) يكون لدينا:

$$\begin{cases}\varphi(x_0)=\alpha_1^0\varphi_1(x_0)+\alpha_2^0\varphi_2(x_0)=0\\ \varphi'(x_0)=\alpha_1^0\varphi'_1(x_0)+\alpha_2^0\varphi'_2(x_0)=0\end{cases}$$

أي أن φ تحقق الشرط: $\varphi(x_0)=0$ و $\varphi'(x_0)=0$ ومنه فإن: $\varphi=0$ أي أن $\alpha_1^0\varphi_1+\alpha_2^0\varphi_2=0$ وهذا مناف لكون φ_1 و φ_2 مستقلان خطيا، ومنه من أجل كل $x\in I$ يكون لدينا: $W(x)\neq 0$.

$(\Rightarrow)$: من أجل كل $x\in I$ لدينا: $W(x)\neq 0$ وإذا فرضنا جدلا أن φ_1 و φ_2 مرتبطان خطياً، أي:

$$\exists\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}:\ \left(\alpha_1,\alpha_2\right)\neq(0,0)\ \ \wedge\ \ (\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2=0)$$

نضع مثلاً $\alpha_2\neq 0$ لاحظ أن: $\varphi_2=-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\varphi_1\Rightarrow\varphi_2'=-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\varphi_1'$ ومنه يكون لدينا:

$$W(x)=\begin{vmatrix}\varphi_1 & -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\varphi_1\\ \varphi_1' & -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\varphi_2'\end{vmatrix}=0$$

وهذا مناف لكون $W(x)\neq 0$، وبالتالي الحلان φ_1 و φ_2 مستقلان خطياً.

2.2.2 دراسة المعادلات غير المتجانسة $L(y)=f$

ليكن ω_p حلا خاصا للمعادلة $L(y)=f$ و ω حلا آخر لها. لدينا:

ω_p حلا خاصا للمعادلة $L(y)=f$ معناه $L(\omega_p)=f$

ω حلا للمعادلة $L(y)=f$ معناه $L(\omega)=f$

ومنه $L(\omega)-L(\omega_p)=f-f=0$ أي أن $L(\omega-\omega_p)=0$ إذن $(\omega-\omega_p)$ حلا للمعادلة المتجانسة: $L(y)=0$. لكن نعلم أن الحل العام للمعادلة المتجانسة يكتب على الشكل:

$$\varphi=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2$$

إذن

$$\omega-\omega_p=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)$$

ومنه

$$\omega(x)=\omega_p(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)/\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

حيث أن:

- ω هو الحل العام للمعادلة $L(y)=f$.
- ω_p هو حل خاص للمعادلة $L(y)=f$.
- $\omega_h=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2/\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$ هو حل المعادلة المتجانسة $L(y)=0$.

من أجل البحث عن حل خاص للمعادلة غير المتجانسة. نحتاج المبرهنة التالية:

مبرهنة 3.2.2: ليكن f تابعا مستمرا على مجال I من $\mathbb{R}$ و $\{\varphi_1,\varphi_2\}$ جملة أساسية لحلول المعادلة: $\mathrm{L}(y)=f$ على I، كل حل للمعادلة $\mathrm{L}(y)=f$ يكتب من الشكل:

$$y(x)=\omega_p(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)/\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

حيث ω_p حل خاص للمعادلة $\mathrm{L}(y)=f$ يحدد من العلاقة:

$$\omega_p(x)=\varphi_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{W}_1(s)}{\mathrm{W}(s)}ds+\varphi_2(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{W}_2(s)}{\mathrm{W}(s)}ds$$

حيث:

$$\mathrm{W}(x)=\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x)\end{vmatrix}\text{ ، }\mathrm{W}_1(x)=\begin{vmatrix}0 & \varphi_2(x)\\ f(x) & \varphi_2'(x)\end{vmatrix}\text{ و }\mathrm{W}_2(x)=\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & 0\\ \varphi_1'(x) & f(x)\end{vmatrix}$$

إثبات: نقوم باستعمال طريقة تغير الثوابت c_1 و c_2. نفرض أن الحل الخاص يكتب من الشكل:

$$\omega_p(x)=c_1(x)\varphi_1(x)+c_2(x)\varphi_2(x)$$

فيكون لدينا:

$$\omega_p'(x)=c_1'(x)\varphi_1(x)+c_1(x)\varphi_1'(x)+c_2'(x)\varphi_2(x)+c_2(x)\varphi_2'(x)$$

و

$$\begin{aligned}\omega_p''(x)=&c_1''(x)\varphi_1(x)+2c_1'(x)\varphi_1'(x)+c_1(x)\varphi_1''(x)+c_2''(x)\varphi_2(x)\\&+2c_2'(x)\varphi_2'(x)+c_2(x)\varphi_2''(x)\end{aligned}$$

بتعويض كلا من ω_p، ω_p' و ω_p'' في المعادلة غير المتجانسة: $\mathrm{L}(y)=f$ نجد:

$$\begin{aligned}&c_1(x)\mathrm{L}(\varphi_1(x))+c_2(x)\mathrm{L}(\varphi_2(x))\\&+\left[c_1''(x)\varphi_1(x)+2c_1'(x)\varphi_1'(x)+c_2''(x)\varphi_2(x)+2c_2'(x)\varphi_2'(x)\right]\\&+b\left[c_1'(x)\varphi_1(x)+c_2'(x)\varphi_2(x)\right]=f(x)\end{aligned}\qquad(2.2.6)$$

بوضع:

$$c_1'(x)\varphi_1(x)+c_2'(x)\varphi_2(x)=0\qquad(2.2.7)$$

يكون لدينا:

$$c_1''(x)\varphi_1(x)+c_2''(x)\varphi_2(x)+c_1'(x)\varphi_1'(x)+c_2'(x)\varphi_2'(x)=0\qquad(2.2.8)$$

ومنه بتعويض (2.2.7) و (2.2.8) في (2.2.6) نجد:

$$\left(c_1'(x)\varphi_1'(x)+c_2'(x)\varphi_2'(x)\right)+b\left(c_1'(x)\varphi_1(x)+c_2'(x)\varphi_2(x)\right)=f(x)$$

ومنه نحصل على الجملة التالية:

$$(2.2.9)\qquad \begin{cases} c_1'(x)\varphi_1(x)+c_2'(x)\varphi_2(x)=0 \\ c_1'(x)\varphi_1'(x)+c_2'(x)\varphi_2'(x)=f(x) \end{cases}$$

نحسب c_1' و c_2' باستعمال طريقة كرامر "Cramer". محدد الجملة (2.2.9) هو:

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}=\mathrm{W}(\varphi_1,\varphi_2)(x)\neq 0$$

بوضع:

$$\mathrm{W}_2(x)=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & 0 \\ \varphi_1'(x) & f(x) \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \mathrm{W}_1(x)=\begin{vmatrix} 0 & \varphi_2(x) \\ f(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}$$

نحصل على $c_1'(x)=\dfrac{\mathrm{W}_1(x)}{\mathrm{W}(x)}$ و $c_2'(x)=\dfrac{\mathrm{W}_2(x)}{\mathrm{W}(x)}$ ومنه من أجل كل x_0 مثبت من I فإن الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة $\mathrm{L}(y)=f$ يحسب من العلاقة:

$$\omega_p(x)=\varphi_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{W}_1(s)}{\mathrm{W}(s)}ds+\varphi_2(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{W}_2(s)}{\mathrm{W}(s)}ds$$

وبالتالي فالحل العام للمعادلة $\mathrm{L}(y)=f$ يحسب من العلاقة:

$$y(x)=\varphi_1(x)\left(c_1+\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{W}_1(s)}{\mathrm{W}(s)}ds\right)+\varphi_2(x)\left(c_2+\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{W}_2(s)}{\mathrm{W}(s)}ds\right)$$

ملاحظة 2.2.2: تبقى المبرهنة 3.2.2 صحيحة في حالة المعادلات المتجانسة بمعاملات توابع.

مثال 4.2.2: حل المعادلة التفاضلية: $\quad (2.2.10)\quad y''(x)-y'(x)-2y(x)=e^{-x}$

أولا: نبحث عن حلول المعادلة المتجانسة أي نبحث عن حلول المعادلة:

$$y''(x)-y'(x)-2y(x)=0$$

لدينا $p(r)=r^2-r-2$ و $p(r)=0\Leftrightarrow(r=-1)\vee(r=2)$ إذن $\varphi_1(x)=e^{-x}$ و $\varphi_2(x)=e^{2x}$.

بما أن $\mathrm{W}(x)=\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{vmatrix}=3e^{x}\neq 0$ فإن φ_1 و φ_2 يشكلان جملة أساسية لحلول المعادلة المتجانسة.

ثانيا: لدينا:

$$y(x)=\varphi_1(x)\left(\beta_1+\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{W}_1(s)}{\mathrm{W}(s)}ds\right)+\varphi_2(x)\left(\beta_2+\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{W}_2(s)}{\mathrm{W}(s)}ds\right)$$

بعد التعويض والحساب نجد أن الحل العام للمعادلة (2.2.10) هو:

$$y(x)=-\left(\frac{x}{3}+c_1\right)e^{-x}+c_2e^{2x}\ /\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

3.2 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات معاملات توابع

1.3.2 دراسة المعادلات المتجانسة $L(y)=0$

عموما المعادلات من هذا الشكل لا يمكن حلها إلا إذا أعطي حلا خاصا لها. ليكن φ_1 حلا معطى للمعادلة $L(y)=0$ ولنبحث عن حل φ_2 مستقل خطيا مع φ_1 ويكتب من الشكل:

$\varphi_2(x)=u(x)\varphi_1(x)$ حيث $\varphi_1,u,\varphi_2\in C^2(I)$.

لدينا: φ_1 حلا معطى للمعادلة $L(y)=0$ معناه:

$$\varphi''_1(x)+b(x)\varphi'_1(x)+c(x)\varphi_1(x)=0 \qquad (2.3.1)$$

كذلك φ_2 حلا للمعادلة $L(y)=0$ معناه:

$$\varphi''_2(x)+b(x)\varphi'_2(x)+c(x)\varphi_2(x)=0 \qquad (2.3.2)$$

من جهة أخرى، لدينا:

$$\begin{aligned}\varphi_2(x)&=u(x)\varphi_1(x)\\ \varphi'_2(x)&=u'(x)\varphi_1(x)+u(x)\varphi'_1(x)\\ \varphi''_2(x)&=u''(x)\varphi_1(x)+2u'(x)\varphi'_1(x)+u(x)\varphi''_1(x)\end{aligned}$$

بتعويض كلا من عبارة φ_2، φ'_2 و φ''_2 في المعادلة $L(y)=0$ نجد:

$$\begin{aligned}&\left[u''(x)\varphi_1(x)+2u'(x)\varphi'_1(x)+u(x)\varphi''_1(x)\right]\\ &+b(x)\left[u'(x)\varphi_1(x)+u(x)\varphi'_1(x)\right]+c(x)u(x)\varphi_1(x)=0\end{aligned}$$

أي أن:

$$\begin{aligned}&u(x)\left[\varphi''_1(x)+b(x)\varphi'_1(x)+c(x)\varphi_1(x)\right]\\ &+u''(x)\varphi_1(x)+u'(x)\left[2a(x)\varphi'_1(x)+b(x)\varphi_1(x)\right]=0\end{aligned}$$

باستعمال (2.3.1) و (2.3.2) نجد:

$$u''(x)\varphi_1(x)+u'(x)\left[2\varphi'_1(x)+b(x)\varphi_1(x)\right]=0$$

ومنه نحصل على التالي:

$$\int\frac{u''(x)}{u'(x)}dx=-\int\frac{2\varphi'_1(x)+b(x)\varphi_1(x)}{\varphi_1(x)}dx\Leftrightarrow\int\frac{u''(x)}{u'(x)}dx=-2\int\frac{\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)}dx-\int b(x)dx$$

بعد الحساب نجد: $u(x)=\int\frac{1}{\varphi_1^2(x)}e^{-\int b(x)dx}dx$ وبالتالي فإن $\varphi_2(x)=\varphi_1(x)\int\frac{1}{\varphi_1^2(x)}e^{-\int b(x)dx}dx$.

من أجل حساب الحل العام للمعادلة المتجانسة $L(y)=0$. نحتاج المبرهنة التالية:

مبرهنة 1.3.2: إذا كان $\varphi_1(x)$ حلا للمعادلة $L(y)=0$ فإن الحل $\varphi_2(x)$ يكتب بدلالة $\varphi_1(x)$ على الشكل: $\varphi_2(x)=u(x)\varphi_1(x)$ حيث $u(x)$ يحدد بالعلاقة $u(x)=\int\frac{1}{\varphi_1^2(x)}e^{-\int b(x)dx}dx$ والحل العام للمعادلة $L(y)=0$ يكون على الشكل التالي:

$$y(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)/\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

مثال 1.3.2: ليكن $\varphi_1(x)=x^2$ حلا للمعادلة: $\quad (2.3.3) \qquad y''(x)-\frac{2}{x^2}y(x)=0,\quad x\neq 0$

- جد الحل العام للمعادلة $(2.3.3)$.

الحل $\varphi_2(x)$ يكتب بدلالة $\varphi_1(x)$ على الشكل: $\varphi_2(x)=u(x)\varphi_1(x)$ حيث $u(x)$ يحدد بالعلاقة $u(x)=\int\frac{1}{\varphi_1^2(x)}e^{-\int b(x)dx}dx$ أي أن $u(x)=\int\frac{1}{x^4}dx=\frac{-1}{3x^3}$ و $\varphi_2(x)=\frac{-1}{3x^3}x^2=\frac{-1}{3x}$ إذن الحل العام للمعادلة $(2.3.3)$ من الشكل:

$$y(x)=c_1x^2+c_2\frac{1}{x}/\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

2.3.2 دراسة المعادلات غير المتجانسة $L(y)=0$

لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 2.3.2: ليكن f تابعا مستمرا على مجال I من $\mathbb{R}$ و $\{\varphi_1,\varphi_2\}$ جملة أساسية لحلول المعادلة غير المتجانسة $L(y)=f$ على I. الحل العام للمعادلة غير المتجانسة $L(y)=f$ يحسب من العلاقة التالية:

$$y(x)=\varphi_1(x)\left(c_1+\int_{x_0}^{x}\frac{W_1(s)}{W(s)}ds\right)+\varphi_2(x)\left(c_2+\int_{x_0}^{x}\frac{W_2(s)}{W(s)}ds\right)/\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

مثال 2.3.2: حل المعادلة التفاضلية: $\quad (2.3.4) \qquad y''(x)-\frac{2}{x^2}y(x)=x,\quad x\neq 0$

من المثال السابق وجدنا أن الحل العام للمعادلة المتجانسة المرفقة لـ $(2.3.4)$ من الشكل:

$$y(x)=c_1x^2+c_2\frac{1}{x}/\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

ومنه فإن $\varphi_1(x)=x^2,\quad \varphi_2(x)=\frac{1}{x},\quad W(\varphi_1,\varphi_2)(x)=-3$. باستعمال عبارة الحل العام في المبرهنة 2.3.2 نجد أن الحل العام للمعادلة $(2.3.4)$ هو:

$$y(x)=\frac{1}{4}x^3+c_1x^2+c_2\frac{1}{x}/\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

4.2 حل بعض المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية باستعمال السلاسل الصحيحة

فيما يلي سنهتم فقط بحساب الحل في جوار نقطة عادية لمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية باستخدام السلاسل الصحيحة (للإطلاع أكثر على الموضوع أنظر [5]). من أجل ذلك نحتاج التعريفين التاليين:

تعريف 1.4.2: الدالة f التي يمكن تمثيلها في مجال مفتوح $(\alpha < x < \beta)$ بسلسلة صحيحة متقاربة أي يمكن كتابتها على الشكل:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

يقال عنها أنها تحليلية عند $x_0 = 0$، تكون الدالة f تحليلية على مجال مفتوح إذا وفقط إذا كانت تحليلية عند كل نقطة x من هذا المجال.

تعريف 2.4.2: نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية التالية:

$$y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

نقول عن النقطة $x = x_0$ بأنها نقطة عادية للمعادلة التفاضلية إذا كانت كل من الدالتين b و c تحليليتين عند هذه النقطة.

نظرية 1.4.2: إذا كانت $x = x_0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

فإن الحل العام لهذه المعادلة يكون على الشكل التالي:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

حيث a_0 و a_1 ثابتان إختياريان و $y_1(x)$ و $y_2(x)$ سلسلتان تحليليتان عند $x = x_0$ ومستقلتان خطيا ونصف قطر تقارب كلا منهما أقل من أصغر نصفي قطر تقارب سلسلتي b و c.

إثبات: (أنظر [5]).

مثال 1.4.2: باستخدام السلاسل الصحيحة. جد حل المسألة التفاضلية التالية:

$$(2.4.1): \quad \begin{cases} (1+x^2)y''(x) + 2xy'(x) = 0 & (2.4.1)_1 \\ y(0) = 0 & (2.4.1)_2 \\ y'(0) = 1 & (2.4.1)_3 \end{cases}$$

النقطة $x=0$ هي نقطة عادية للمعادلة التفاضلية $(2.4.1)_1$ لأن الدالتين b و c المعرفتين بالعبارتين: $b(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ و $c(x)=0$ كلتاهما تحليليتان عند النقطة $x=0$. بفرض الحل يكتب على الشكل: $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ فإنه وبالأشتقاق نحصل على:

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_n x^{n-1} \quad \text{و} \quad y''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية $(2.4.1)_1$ نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2}+n(n+1)a_n\right]x^n=0$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل:

$$2a_2+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2}+n(n+1)a_n\right]x^n=0$$

ومنه وبمساواة قوى x المختلفة بالصفر نجد:

$$\begin{cases} a_2=0 & (2.4.2) \\ a_{n+2}=-\dfrac{n}{n+2}a_n\,, \quad n\geq 1 & (2.4.3) \end{cases}$$

باستعمال (2.4.2) والعلاقة التكرارية (2.4.3) فإنه بالإضافة إلى كون $a_2=0$ نجد:

$$\forall n\geq 1: \quad \begin{cases} a_{2n}=0 \\ a_{2n+1}=\dfrac{(-1)^n}{2n+1}a_1 \end{cases}$$

وهكذا نحصل على:

$$y(x)=a_0+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}a_1 x^{2n+1}$$

باستعمال الشرطين الإبتدائيين $(2.4.1)_2$ و $(2.4.1)_3$ نحصل على $a_0=0$ و $a_1=1$ ومنه فإن عبارة الحل العام للمسألة التفاضلية (2.4.1) هي:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\,.$$

5.2 حل بعض المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية باستعمال تحويل لابلاس

تحويل لابلاس هو أداة سهلة وفعالة لحل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية.

تعريف 1.5.2: من أجل كل دالة f في مجموعة مناسبة نسمي تحويل لابلاس للدالة f التابع F المعرف كما يلي:

$$L\big(f(x)\big)(s)=F(s)=\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx,\quad s\in\mathbb{C}$$

مع شروط على كل من f و s لضمان تقارب التكامل أعلاه.

لحل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية باستعمال طريقة لابلاس نحتاج المبرهنة التالية:

مبرهنة 1.5.2: لتكن f دالة بحيث تحويل لابلاس لها ولمشتقاتها حتى الرتبة n $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ معرف وليكن $L\left(f(x)\right)(s)=F(s)$ عندئذ تكون لدينا الخاصية التالية:

$$L\left(f^{(n)}(x)\right)(s)=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-...-f^{(n-1)}(0)$$

من أجل $n=1$ يكون لدينا : $L\left(f'(x)\right)(s)=sF(s)-f(0)$

من أجل $n=2$ يكون لدينا: $L\left(f''(x)\right)(s)=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

مثال 1.5.2: بإستعمال تحويل لابلاس حل المسألة التفاضلية التالية:

$$(2.5.1):\quad \begin{cases} y''(x)-2y'(x)+2\,y(x)=0 & (2.5.1)_1 \\ (y(0)=1)\wedge(y'(0)=1) & (2.5.1)_2 \end{cases}$$

نضع : $L\big(y(x)\big)(s)=Y(s)$ ، بإدخال تحويل لابلاس على كل من طرفي $(2.5.1)_1$ نجد:

$$L\big(y''(x)\big)(s)-2L\big(y'(x)\big)(s)+2L\big(y(x)\big)(s)=0\qquad(2.5.2)$$

ومنه بإستعمال عبارة تحويل لابلاس لكل من المشتقة الأولى والثانية نحصل من $(2.5.2)$ على:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-2\big(sY(s)-y(0)\big)+2Y(s)=0\qquad(2.5.3)$$

بإستعمال الشروط الإبتدائية $(2.5.1)_2$ وبتبسيط $(2.5.3)$ نحصل على:

$$Y(\mathrm{s})=\frac{s-1}{s^2-2s+2}=\frac{s-1}{(s-1)^2+1} \qquad (2.5.4)$$

بإدخال تحويل لابلاس العكسي على طرفي (2.5.4) نجد أن الحل العام للمسألة (2.5.1) هو:

$$y(x)=e^x\cos x\ .$$

مثال 2.5.2: بإستعمال تحويل لابلاس حل المسألة التفاضلية التالية:

$$(2.5.5): \quad \begin{cases} y''(x)+y'(x)-2\,\mathrm{y(x)}=3\cos 3x-11\sin 3x & (2.5.5)_1 \\ (y(0)=0)\wedge(y'(0)=6) & (2.5.5)_2 \end{cases}$$

بإدخال تحويل لابلاس على كل من طرفي $(2.5.5)_1$ نجد:

$$L\big(y''(x)\big)(s)+L\big(y'(x)\big)(s)-2L\big(y(x)\big)(s)=3L(\cos 3x)(s)-11L(\sin 3x)(s) \qquad (2.5.6)$$

ومنه بإستعمال عبارة تحويل لابلاس لكل من المشتقة الأولى والثانية نحصل من (2.5.6) على:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+sY(s)-y(0)-2Y(\mathrm{s})=3\frac{s}{s^2+9}-11\frac{3}{s^2+9} \qquad (2.5.7)$$

بإستعمال الشروط الإبتدائية $(2.5.5)_2$ وبتبسيط (2.5.7) نحصل على:

$$Y(\mathrm{s})=\frac{3(2s^2+s+7)}{(s^2+s-2)(s^2+9)}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+2}-\frac{3}{s^2+9} \qquad (2.5.8)$$

بإدخال تحويل لابلاس العكسي على طرفي (2.5.8) نجد أن الحل العام للمسألة (2.5.5) هو:

$$y(x)=e^x-e^{-2x}+\sin 3x\ .$$

تمارين مقترحة على الفصل الثاني

التمرين الأول:

نعتبر المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

$$(E_1): \quad y''(x)+y(x)=2(x+1)e^x, \quad x\in\mathbb{R}$$
$$(E_2): \quad y''(x)-\frac{2}{x}y'(x)=0, \quad x\in\mathbb{R}^*$$

1. علما أن: $x\mapsto \varphi(x)=x^3$ حلا للمعادلة (E_2)، عين الحل العام لكل من (E_1) و (E_2).
2. عين الحل لكل مسألة من المسألتين التفاضليتين التاليتين:

$$(P_1): \quad \begin{cases} y''(x)+y(x)=2(x+1)e^x, \quad x\in\mathbb{R} \\ y(0)=1, \quad y'(0)=0 \end{cases}$$ و $$(P_2): \quad \begin{cases} y''(x)-\frac{2}{x}y'(x)=x, \quad x\in\mathbb{R}^* \\ y(1)=1, \quad y'(1)=0 \end{cases}$$

التمرين الثاني:

1. باستعمال السلاسل الصحيحة، حل كلا من المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

$$(E_3): \quad y''(x)+xy'(x)+(x^2+2)y(x)=0, \quad x\in\mathbb{R}$$
$$(E_4): \quad (x^2-1)y''(x)+3xy'(x)+xy(x)=0, \quad x\in\mathbb{R}$$

2. باستعمال السلاسل الصحيحة، حل المسألة التفاضلية التالية:

$$(P_3): \quad \begin{cases} (x^2-1)y''(x)+3xy'(x)+xy(x)=0, \quad x\in\mathbb{R} \\ y(0)=4, \quad y'(0)=6 \end{cases}$$

التمرين الثالث:

باستعمال تحويل لابلاس، حل كلا من المسألتين التفاضليتين التاليتين:

$$(P_4): \quad y'(x)+4\,y(x)+5\int_0^x y(t)dt=e^{-x}, \qquad y(0)=0.$$

$$(P_5): \quad \begin{cases} y''_1(x)-2y_1'(x)-2y_2(x)=0 \\ y'_1(x)-2\,y_1(x)+y'_2(x)=-2e^{-x} \\ y_1(0)=3, \quad y_1'(0)=2, \quad y_2(0)=0. \end{cases}$$

الفصل الثالث

المسائل الحدية (المسائل ذات النقطتين)

محتوى الفصل

1.3 مقدمة عامة حول المسائل الحدية أو المسائل ذات النقطتين

في الفصل السابق تطرقنا إلى وجود ووحدانية الحل لمسألة كوشي للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية وقد تركز إهتمامنا على طرق حساب حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية في حالة المعاملات الثابتة وكذلك في حالة المعاملات المتغيرة. في هذا الفصل سنهتم بدراسة المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ولكن مع شروط حدية (أو حدودية) وليس شروط إبتدائية كما في الفصل السابق.

2.3 دراسة المسائل الحدية أو المسائل ذات النقطتين

ليكن $f \in C^0([0,l])$. سندرس وجود ووحدانية الحل للمسائل الحدية من الشكل:

$$(3.2.1): \quad \begin{cases} y''(x)-b(x)y'(x)-c(x)y(x)=f(x) & (3.2.1)_1 \\ \alpha_1 y'(0)+\beta_1 y(0)=c_1 & (3.2.1)_2 \\ \gamma_1 y'(l)+\delta_1 y(l)=d_1 & (3.2.1)_3 \end{cases}$$

حيث α_1 ، β_1 ، γ_1 ، δ_1 ، c_1 و d_1 أعداد حقيقية معطاة و $y \in C^2([0,l])$.

– **صياغة المسألة** (3.2.1) **على شكل مسألة مكافئة:** نفرض أن $\alpha_1 \geq 0$ و $\gamma_1 \geq 0$. بضرب طرفي المعادلة $(3.2.1)_1$ في التابع $e^{-A(x)}$ حيث: $A(x)=\int_0^x b(s)ds$ نجد:

$$\begin{aligned}(3.2.1)_1 &\Leftrightarrow e^{-A(x)}\left[y''(x)-b(x)y'(x)-c(x)y(x)\right]=e^{-A(x)}f(x)\\ &\Leftrightarrow \left[y''(x)-b(x)y'(x)\right]e^{-A(x)}-c(x)e^{-A(x)}y(x)=e^{-A(x)}f(x)\\ &\Leftrightarrow \left[y'(x)e^{-A(x)}\right]'-c(x)e^{-A(x)}y(x)=e^{-A(x)}f(x)\end{aligned}$$

بوضع: $g(x)=-f(x)e^{-A(x)}$ ، $q(x)=c(x)e^{-A(x)}$ و $p(x)=e^{-A(x)}$ فإننا نحصل على:

$$(3.2.1)_1 \quad \Leftrightarrow -\left[p(x)y'(x)\right]'+q(x)y(x)=g(x)$$

لدينا كذلك بقسمة طرفي المعادلة $(3.2.1)_2$ على $\sqrt{\alpha^2_1+\beta^2_1}$ نجد:

$$(3.2.1)_2 \quad \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha^2_1+\beta^2_1}}y'(0)+\frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha^2_1+\beta^2_1}}y(0)=\frac{c_1}{\sqrt{\alpha^2_1+\beta^2_1}}$$

بوضع: $\alpha=\frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha^2_1+\beta^2_1}}$ ، $\beta=\frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha^2_1+\beta^2_1}}$ و $c=\frac{c_1}{\sqrt{\alpha^2_1+\beta^2_1}}$ فإنه يكون لدينا:

$$(3.2.1)_2 \quad \Leftrightarrow \alpha y'(0)+\beta y(0)=c$$

ولدينا: $\alpha^2+\beta^2=1 \Rightarrow \exists\theta_0\in[0,\pi[\,/\quad (\alpha=\sin\theta_0)\wedge(\beta=-\cos\theta_0)$ ، إذن $(3.2.1)_2$ تصبح من الشكل:

$$(3.2.1)_2 \quad \Leftrightarrow y'(0)\sin\theta_0 - y(0)\cos\theta_0 = c$$

بنفس الطريقة، لدينا:

$$(3.2.1)_3 \quad \Leftrightarrow \frac{\gamma_1/p(l)}{\sqrt{(\gamma_1/p(l))^2+\delta^2_1}}\, p(l)y'(l) + \frac{\delta_1}{\sqrt{(\gamma_1/p(l))^2+\delta^2_1}}\, y(l) = \frac{d_1}{\sqrt{(\gamma_1/p(l))^2+\delta^2_1}}$$

بوضع: $\gamma = \frac{\gamma_1/p(l)}{\sqrt{(\gamma_1/p(l))^2+\delta^2_1}}$ ، $\delta = \frac{\delta_1}{\sqrt{(\gamma_1/p(l))^2+\delta^2_1}}$ و $d = \frac{d_1}{\sqrt{(\gamma_1/p(l))^2+\delta^2_1}}$ يكون لدينا:

$$(3.2.1)_3 \quad \Leftrightarrow \gamma p(l)y'(l) + \delta y(l) = d$$

ولدينا: $\gamma^2+\delta^2=1 \Rightarrow \exists\theta_l \in [0,\pi[\,/\, (\gamma=\sin\theta_l)\wedge(\delta=-\cos\theta_l)$ ، إذن $(3.2.1)_3$ تصبح من الشكل:

$$(3.2.1)_3 \quad \Leftrightarrow p(l)y'(l)\sin\theta_l - y(l)\cos\theta_l = d$$

نحصل إذن على المسألة $(3.2.2)$ التالية (المكافئة للمسألة $(3.2.1)$):

$$(3.2.2): \quad \begin{cases} -[p(x)y'(x)]' + q(x)y(x) = g(x) & (3.2.2)_1 \\ y'(0)\sin\theta_0 - y(0)\cos\theta_0 = c & (3.2.2)_2 \\ p(l)y'(l)\sin\theta_l - y(l)\cos\theta_l = d & (3.2.2)_3 \end{cases}$$

حل المسألة $(3.2.1)$ يعني إيجاد $y\in C^2([0,l])$ حلا لـ $(3.2.2)$ بحيث $p(x)>0$ على المجال $[0,l]$ و $\theta_0,\theta_l \in [0,\pi[$.

3.3 وجود ووحدانية الحل لبعض أنواع المسائل الحدية

إن دراسة وجود ووحدانية الحل للمسألة $(3.2.2)$ مرتبط بالمبرهنة التالية:

مبرهنة 1.3.3: ليكن $g\in C^0([0,l])$ و θ_0 و θ_l مثبتين من $[0,\pi[$ و $c,d\in\mathbb{R}$. القضيتين التاليتين متكافئتين:

1. المسألة $(3.2.2)$ تقبل حلا وحيدا $y\in C^2([0,l])$ من أجل كل $(c,d)\in\mathbb{R}^2$ و $g\in C^0([0,l])$.
2. التابع المعدوم (أي التابع $y\equiv 0$) هو الحل الوحيد للمسألة $(3.3.1)$ التالية:

$$(3.3.1): \quad \begin{cases} -[p(x)y'(x)]' + q(x)y(x) = 0 & (3.3.1)_1 \\ y'(0)\sin\theta_0 - y(0)\cos\theta_0 = 0 & (3.3.1)_2 \\ p(l)y'(l)\sin\theta_l - y(l)\cos\theta_l = 0 & (3.3.1)_3 \end{cases}$$

إثبات: ليكن y_p حلا خاصا للمعادلة غير المتجانسة $(3.2.2)_1$ و $\{y_1, y_2\}$ جملة أساسية لحلول المعادلة المتجانسة $(3.3.1)_1$. كل حل للمعادلة $(3.2.2)_1$ يكتب من الشكل:

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

بقي تعيين الثابتين c_1 و c_2 بحيث يحقق y الشرطين الحديين $(3.2.2)_2$ و $(3.2.2)_3$. لدينا:

$$(3.3.2): \quad \begin{cases} \left[y_1'(0)\sin\theta_0 - y_1(0)\cos\theta_0\right]c_1 + \left[y_2'(0)\sin\theta_0 - y_2(0)\cos\theta_0\right]c_2 \\ \qquad = c - y_p'(0)\sin\theta_0 + y_0(0)\cos\theta_0 = c' \\ \left[y_1'(l)p(l)\sin\theta_l - y_1(l)\cos\theta_l\right]c_1 + \left[y_2'(l)p(l)\sin\theta_l - y_2(l)\cos\theta_l\right]c_2 \\ \qquad = d - p(l)y_p'(l)\sin\theta_l + y_p(l)\cos\theta_l = d' \end{cases}$$

يمكن كتابة $(3.3.2)$ على الشكل:

$$(3.3.3): \quad \begin{cases} K_0 c_1 + L_0 c_2 = c' \\ K_l c_1 + L_l c_2 = d' \end{cases}$$

حيث:

$$\begin{cases} K_0 = y_1'(0)\sin\theta_0 - y_1(0)\cos\theta_0, \quad L_0 = y_2'(0)\sin\theta_0 - y_2(0)\cos\theta_0 \\ K_l = y_1'(l)p(l)\sin\theta_l - y_1(l)\cos\theta_l, \quad L_l = y_2'(l)p(l)\sin\theta_l - y_2(l)\cos\theta_l \end{cases}.$$

العبارتان التاليتان متكافئتان:

(أ) الجملة الجبرية الخطية $(3.3.3)$ تقبل حلا من أجل كل طرف ثان $(c', d') \in \mathbb{R}^2$.

(ب) الحل الوحيد للجملة

$$(3.3.4): \quad \begin{cases} K_0 c_1 + L_0 c_2 = 0 \\ K_l c_1 + L_l c_2 = 0 \end{cases}$$

هو $c_1 = c_2 = 0$.

تكافؤ العبارتين (أ) و (ب) يعني تكافؤ القضيتين (1) و (2) من المبرهنة 1.3.3 وهو المطلوب إثباته.

نتيجة 1.3.3: عمليا، المبرهنة 1.3.3 تعني أنه إذا قبلت المسألة $(3.3.1)$ حلا وحيدا هو $y \equiv 0$ فإنه من أجل كل $g \in C^0([0,l])$ وكل $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ تقبل المسألة $(3.2.2)$ حلا وحيدا.

سؤال: متى تقبل المسألة $(3.3.1)$، التابع $y \equiv 0$ حلا وحيدا لها ؟ أي متى يتحقق الشرط 2 للمبرهنة 1.3.3؟ حتى نقول أنه من أجل كل $g \in C^0([0,l])$ وكل $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ فإن المسألة $(3.2.2)$ تقبل حلا وحيدا.

للإجابة على هذا السؤال نعتمد على طريقتين هما طريقة الذروة وطريقة تكامل الطاقة.

1.3.3 وحدانية الحل بإستعمال مبدأ الذروة

لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 2.3.3: إذا كان $q(x) > 0$ من أجل كل $x \in [0,l]$ و $\theta_l = \theta_0 = 0$ فإن المسألة $(3.3.1)$ تقبل حلا وحيدا هو $y \equiv 0$.

إثبات: إذا كان $\theta_l=\theta_0=0$ فإن المسألة $(3.3.1)$ تكافئ المسألة التالية:

$$(3.3.5):\quad \begin{cases} -\left[p(x)y'(x)\right]'+q(x)y(x)=0 & (3.3.5)_1 \\ y(0)=0 & (3.3.5)_2 \\ y(l)=0 & (3.3.5)_3 \end{cases}$$

نفرض بالخلف أن $y\equiv 0$ ليس حلا للمسألة $(3.3.5)$. نميز إذن حالتين:

الحالة الأولى: نفرض أن $y>0$ من أجل كل $x\in[0,l]$. الذروة M للحل y على المجال $[0,l]$ موجبة تماما ويدركها عند نقطة c من $]0,l[$ إذن $y'(c)=0$ و $y''(c)\le 0$ وبالتالي:

$$\Big[\underbrace{-p(c)y''(c)}_{\ge 0}\Big]+\Big[\underbrace{-p'(c)y'(c)}_{=0}\Big]+\Big[\underbrace{q(c)y(c)}_{>0}\Big]=0$$

وهذا تناقض. إذن $y\le 0$.

الحالة الثانية: إذا افترضنا $y<0$ فبإستدلال مماثل للحالة الأولى نصل إلى تناقض. إذن $y\ge 0$ وبالتالي فإن $y\equiv 0$ وباستعمال المبرهنة $1.3.3$ فإن المسألة $(3.2.2)$ تقبل حلا وحيدا.

2.3.3 وحدانية الحل بإستعمال مبدأ تكامل الطاقة

لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 3.3.3: نفرض أن $q(x)\ge 0$ من أجل كل $x\in[0,l]$ و $0\le\theta_0\le\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}<\theta_l<\pi$، عندئذ المسألة $(3.3.1)$ تقبل حلا وحيدا $y\equiv 0$ في الحالتين التاليتين:

1) يوجد $c\in[0,l]$ بحيث $q(c)>0$.

2) $\theta_0\times\theta_l=0$ أي أن: $\theta_0=0$ أو $\theta_l=0$.

إثبات: نعتبر المعادلة التالية:

$$-\left(p(x)y'(x)\right)'+q(x)y(x)=0 \qquad (3.3.6)$$

بضرب طرفي المعادلة $(3.3.6)$ في $y(x)$ نجد:

$$-\left(p(x)y'(x)\right)'y(x)+q(x)y^2(x)=0 \qquad (3.3.7)$$

بمكاملة طرفي المعادلة $(3.3.7)$ على المجال $[0,l]$ نجد:

$$I=-\int_0^l\left(p(x)y'\right)'y(x)\,dx+\int_0^l q(x)y^2(x)\,dx=0$$

بإستعمال التكامل بالتجزئة على المجال $[0,l]$ نجد:

$$-\int_0^l\left(p(x)y'\right)'y(x)\,dx=-\left[p(x)y'(x)y(x)\right]_0^l+\int_0^l p(x)\left(y'(x)\right)^2dx$$

ومنه يمكن كتابة المقدار I الذي يسمى تكامل الطاقة على الشكل التالي:

$$I=\int_0^l p(x)\left(y'(x)\right)^2dx+\int_0^l q(x)y^2(x)\,dx-\left[p(x)y'(x)y(x)\right]_0^l=0$$

بوضع : $J=\int_0^l p(x)(y'(x))^2dx+\int_0^l q(x)y^2(x)dx$ و $K=\left[p(x)y'(x)y(x)\right]_0^l$ فإن $I=J-K=0$.

واضح أنه من أجل كل $x\in[0,l]$ فإن $J\geq 0$. لنبرهن أنه من أجل كل $x\in[0,l]$، لدينا: $K\leq 0$. من أجل ذلك نميز الحالات التالية:

أ) إذا كان $\theta_0=0$ فإن $y(0)=0$ و $K=y(l)y'(l)p(l)-y(0)y'(0)p(0)=y(l)y'(l)p(l)$. لكن لدينا: $y'(l)p(l)=y(l)\dfrac{\cos\theta_l}{\sin\theta_l}$ ومنه فإن $K=y(l)y'(l)p(l)=y^2(l)\dfrac{1}{\tan\theta_l}\leq 0$.

ب) إذا كان $\theta_0=\dfrac{\pi}{2}$ فإن $y'(0)=0$ ونجد $K=y(l)y'(l)p(l)=y^2(l)\dfrac{1}{\tan\theta_l}\leq 0$.

ت) إذا كان $0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$ فإنه يكون لدينا:

$$K=y(l)y'(l)p(l)-y(0)y'(0)p(0)=y^2(l)\frac{1}{\tan\theta_l}-p(0)y^2(0)\frac{1}{\tan\theta_0}\leq 0 .$$

برهنا إذن أنه من أجل كل $x\in[0,l]$ فإن $K\leq 0$ ومنه $0=I=J+(-K)\geq J\geq 0$ إذن $J=0$ ولدينا:

$$\begin{aligned}J=0&\Leftrightarrow\int_0^l p(x)(y'(x))^2dx+\int_0^l q(x)y^2(x)dx=0\\&\Leftrightarrow\left(\int_0^l p(x)(y'(x))^2dx=0\right)\wedge\left(\int_0^l q(x)y^2(x)dx=0\right)\end{aligned}$$

كذلك

$$\begin{aligned}\int_0^l p(x)(y'(x))^2dx=0&\Rightarrow p(x)(y'(x))^2=0\\&\Rightarrow y'(x)=0,\quad p>0\\&\Rightarrow y(x)=k,\quad k\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

ومنه نحصل على التكافؤ التالي: $\int_0^l q(x)y^2(x)dx=0\Leftrightarrow k^2\int_0^l q(x)dx=0$.

لنبين أنه في كل حالة من حالتي المبرهنة 3.3.3 يكون لدينا: $y\equiv 0$.

(1) في الحالة الأولى من المبرهنة 3.3.3 يوجد $c\in[0,l]$، بحيث $q(c)>0$ ومنه نميز الحالتين:

- إذا كان $q(x)>0$ من أجل كل $x\in[0,l]$ فإن $\int_0^l q(x)dx>0$ و $k^2\int_0^l q(x)dx=0\Rightarrow k=0$.
- إذا كان $q(x)=0$ من أجل كل $x\in[0,l]$ فإننا نحصل على تناقض مع الفرض في الحالة 1، ومنه يكون لدينا:

$$\int_0^l q(x)y^2(x)dx=0\Rightarrow k=0\Rightarrow y\equiv 0$$

(2) في الحالة الثانية من المبرهنة 3.3.3 إذا كان $\theta_0=0$ أو $\theta_l=0$ فإن $y(0)=k=0$ أو $y(l)=k=0$ ومنه يكون لدينا: $y\equiv 0$.

4.3 المسائل الحدية من النوع: ستورم ليوفيل

مسألة ستورم ليوفيل هي مسألة ذات نقطتين تتعلق بوسيط λ، الهدف من مسألة ستورم ليوفيل هو دراسة العناصر الذاتية لها (القيم الذاتية والتوابع الذاتية)، لنفرض أن p و q تابعان مستمران على $[0,l]$ و $p(x)>0$ على $[0,l]$ و $\theta_0,\theta_l\in[0,\pi[$. مسألة ستورم ليوفيل هي المسألة المعرفة على الشكل التالي:

$$(3.4.1):\quad \begin{cases} -\left[p(x)y'(x)\right]'+q(x)y(x)=\lambda y(x) & (3.4.1)_1\\ y'(0)\sin\theta_0-y(0)\cos\theta_0=0 & (3.4.1)_2\\ p(l)y'(l)\sin\theta_l-y(l)\cos\theta_l=0 & (3.4.1)_3 \end{cases}$$

الهدف هو البحث عن القيم الحقيقية للوسيط λ التي تجعل المسألة (3.4.1) تقبل حلا غير تافه (أي $y\neq 0$).

تعريف 1.4.3: نقول عن λ أنه قيمة ذاتية للمسألة (3.4.1) إذا وجد تابع $y\neq 0$ حلا للمسألة (3.4.1) . يسمى y التابع الذاتي المرفق للقيمة الذاتية λ .

مثال 1.4.3: أحسب العناصر الذاتية للمسألة التالية:

$$(3.4.2)\qquad \begin{cases} y''(x)+\lambda y(x)=0 & (3.4.2)_1\\ y(0)=y(\pi)=0 & (3.4.2)_2 \end{cases}$$

حل: بما أن العدد λ حقيقي، إذن نميز الحالات التالية:

الحالة 1: من أجل λ سالب تماما (أي $\lambda=-\mu^2$ مع $\mu\in\mathbb{R}^*$)، الحل العام لـ $(3.4.2)_1$ يكون من الشكل:

$$y(x)=c_1\exp(\mu x)+c_2\exp(-\mu x),\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

وبإستعمال الشروط الحدية $(3.4.2)_2$ نحصل على $c_1=c_2=0$، ومنه فإن $y\equiv 0$، إذن $\lambda=-\mu^2$ ليست قيمة ذاتية للمسألة (3.4.2) .

الحالة 2: من أجل $\lambda=0$، نجد كذلك $y\equiv 0$، ومنه $\lambda=0$ ليست قيمة ذاتية للمسألة (3.4.2) .

الحالة 3: من أجل λ موجب تماما (أي $\lambda=\mu^2$ مع $\mu\in\mathbb{R}^*$)، الحل العام لـ $(3.4.2)_1$ يكون من الشكل:

$$y(x)=c_1\cos(\mu x)+c_2\sin(\mu x),\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

وبإستعمال الشروط الحدية $(3.4.2)_2$، يكون لدينا:

$$y(0)=0\Rightarrow A=0$$
$$y(\pi)=0\Rightarrow B\sin(\mu\pi)=0$$

من أجل $\mu=0$ نجد أن $y\equiv 0$ ومن أجل $\mu\in\mathbb{Z}^*$ يمكننا أخذ $B=1$، فيكون لدينا: $y(x)=\sin(\mu x)$. إذن القيم الذاتية للمسألة (3.4.2) هي $\lambda=\mu^2$ والتوابع الذاتية المرفقة هي $y(x)=\sin(\mu x)$ مع $\mu\in\mathbb{Z}^*$.

تمرين تطبيقي: أحسب العناصر الذاتية للمسألتين التاليتين:

$$(3.4.3):\begin{cases} y''(x)+\lambda y(x)=0 & (3.4.3)_1\\ 2y(0)-y(\pi)=0 & (3.4.3)_2\\ 2y'(0)+y(\pi)=0 & (3.4.3)_3\end{cases} \quad \text{و} \quad (3.4.4):\begin{cases} y''(x)+\lambda y(x)=0 & (3.4.4)_1\\ y(0)-y(2\pi)=0 & (3.4.4)_2\\ y'(0)-y'(2\pi)=0 & (3.4.4)_3\end{cases}$$

حل. تعيين العناصر الذاتية للمسألة (3.4.3):

من أجل تعيين العناصر الذاتية، نميز الحالات الثلاثة التالية:

حالة $\lambda=0$: من أجل $\lambda=0$، يكون لدينا:

$$(3.4.3)_1 \Leftrightarrow y''(x)=0 \Leftrightarrow y(x)=c_1x+c_2,\quad c_1,c_2\in\mathbb{C}$$

بإستعمال الشروط الحدودية $((3.4.3)_2-(3.4.3)_3)$، نحصل على:

$$\begin{cases}2y(0)-y(\pi)=0\\ 2y'(0)+y(\pi)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\pi c_1+c_2=0\\ (2+\pi)c_1+c_2=0\end{cases}\Leftrightarrow c_1=c_2=0\Leftrightarrow y\equiv 0$$

إذن $\lambda=0$، ليست قيمة ذاتية للمسألة (3.4.3).

حالة $\lambda<0$: نضع $\lambda=-\alpha^2$ مع $\alpha\in\mathbb{R}^*$، فيكون لدينا:

$$(3.4.3)_1 \Leftrightarrow y''(x)-\alpha^2y(x)=0 \Leftrightarrow y(x)=c_1e^{\alpha x}+c_2e^{-\alpha x},\quad c_1,c_2\in\mathbb{C}$$

بإستعمال الشروط الحدودية $((3.4.3)_2-(3.4.3)_3)$، نحصل على:

$$\begin{cases}2y(0)-y(\pi)=0\\ 2y'(0)+y(\pi)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2-e^{\alpha\pi})c_1+(2-e^{-\alpha\pi})c_2=0\\ (2\alpha+e^{\alpha\pi})c_1+(-2\alpha+e^{-\alpha\pi})c_2=0\end{cases}$$

لدينا:

$$\Delta(\alpha)=\begin{vmatrix}2-e^{\alpha\pi} & 2-e^{-\alpha\pi}\\ 2\alpha+e^{\alpha\pi} & -2\alpha+e^{-\alpha\pi}\end{vmatrix}=-8\alpha+(2+2\alpha)(e^{-\pi\alpha}-e^{\pi\alpha})$$

نميز إذن الحالتين التاليتين:

- قيم λ حيث $\Delta(\alpha)\neq 0$، ليست قيما ذاتية للمسألة (3.4.3) لأنه إذا كان $\Delta(\alpha)=0$ فإنه يكون لدينا: $c_1=c_2=0$ وبالتالي $y\equiv 0$.
- قيم λ حيث $\Delta(\alpha)=0$، هي قيم ذاتية للمسألة (3.4.3) والتوابع الذاتية المرفقة هي:

$$y_\lambda(x)=c_2\left[\frac{e^{-\pi\sqrt{-\lambda}}-2}{2-e^{\pi\sqrt{-\lambda}}}e^{x\sqrt{-\lambda}}+e^{-x\sqrt{-\lambda}}\right],\quad c_2\in\mathbb{C}^*.$$

حالة $\lambda > 0$: نضع $\lambda = \alpha^2$ مع $\alpha \in \mathbb{R}^*$، فيكون لدينا:

$$(3.4.3)_1 \Leftrightarrow y''(x) + \alpha^2 y(x) = 0 \Leftrightarrow y(x) = c_1\cos(\alpha x) + c_2\sin(\alpha x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

بإستعمال الشروط الحدودية $((3.4.3)_2 - (3.4.3)_3)$، نحصل على:

$$\begin{cases} 2y(0) - y(\pi) = 0 \\ 2y'(0) + y(\pi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - \cos(\alpha\pi))c_1 - \sin(\alpha\pi)c_2 = 0 \\ \cos(\alpha\pi)c_1 + (2\alpha + \sin(\alpha\pi))c_2 = 0 \end{cases}$$

لدينا:

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} 2 - \cos(\alpha\pi) & -\sin(\alpha\pi) \\ \cos(\alpha\pi) & 2\alpha + \sin(\alpha\pi) \end{vmatrix} = 4\alpha + 2\sin(\alpha\pi) - 2\alpha\cos(\alpha\pi)$$

$$\Delta(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

بما أن $\alpha \in \mathbb{R}^*$ فان $\Delta(\alpha) \neq 0$، ومنه فإن $c_1 = c_2 = 0$ وبالتالي $y \equiv 0$. إذن قيم λ حيث $\lambda < 0$ ليست قيما ذاتية للمسألة $(3.4.3)$.

تعريف 2.4.3: نقول عن تابعين f و g مستمران على مجال $[a,b]$ أنهما متعامدان على $[a,b]$ إذاكان: $< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx = 0$.

تمرين تطبيقي:

بين أن التوابع: $x \mapsto \varphi_n(x) = A_n\sin(nx)$ ($n \in \mathbb{N}^*$ و $A_n \in \mathbb{R}$)، متعامدة مثنى مثنى على المجال $I = [0,\pi]$.

حل. من أجل كل $m,n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $m \neq n$، نبين العلاقة التالية:

$$\int_0^\pi \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0 \quad \text{أي} \quad \int_0^\pi A_m\sin(mx)A_n\sin(nx)dx = 0$$

نعلم أنه من أجل كل $m,n \in \mathbb{N}^*$ و $x \in [0,\pi]$، فإن:

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(n+m)x\right]$$

ومنه فإنه من أجل كل $m,n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $m \neq n$، يكون لدينا:

$$\int_0^\pi A_m\sin(mx)A_n\sin(nx)dx = \frac{1}{2}A_mA_n\int_0^\pi\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}A_mA_n\left[\begin{array}{l} \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x \\ -\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x \end{array}\right]_{x=0}^{x=\pi} = 0$$

أي أن التوابع: $x \mapsto \varphi_n(x) = A_n\sin(nx)$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$، متعامدة مثنى مثنى على المجال $I = [0,\pi]$.

مبرهنة 1.4.3: نعتبر معادلة ستورم ليوفيل التالية:

$$-\left[p(x)y'(x)\right]'+q(x)y(x)=\lambda y(\mathrm{x}) \qquad (3.4.5)$$

مع p و q تابعان مستمران على $[a,b]$ ومن أجل كل $x\in[a,b]$ لدينا: $p(x)>0$ بالإضافة للشروط الحدية:

$$\begin{cases}\alpha y(a)+\beta y'(a)=0 \qquad (3.4.6)\\ \gamma y(b)+\delta y'(b)=0 \qquad (3.4.7)\end{cases}$$

عندئذ كل القيم الذاتية للمسألة $((3.4.5)-(3.4.7))$ حقيقية والتوابع الذاتية المرفقة للقيم الذاتية المختلفة متعامدة مثنى مثنى.

إثبات: لنبرهن أولا أن القيم الذاتية للمسألة $((3.4.5)-(3.4.7))$ حقيقية، نفرض بالخلف أن القيم الذاتية عقدية أي تكتب من الشكل: $\lambda=\alpha+i\beta$ وليكن $y_\lambda=u+iv$ توابعا ذاتية مرفقة لها مع α، β، u و v ثوابت حقيقية ولنبرهن أن $\beta=0$. للتبسيط نأخذ $(p=q=1)$، فيكون لدينا بتعويض y_λ في المعادلة $(3.4.5)$:

$$-(u+iv)''=(\alpha-1+i\beta)(u+iv) \qquad (3.4.8)$$

بضرب طرفي $(3.4.8)$ في $(u-iv)$ وفصل الجزئين الحقيقي والتخيلي نجد:

$$\begin{cases}-(uu''+vv'')=(\alpha-1)(u^2+v^2) \qquad (3.4.9)\\ vu''-uv''=\beta(u^2+v^2) \qquad (3.4.10)\end{cases}$$

بإستعمال $(3.4.10)$ نجد:

$$(3.4.10)\Leftrightarrow \beta\int_a^b(u^2(x)+v^2(x))dx=\int_a^b(v(x)u''(x)-u(x)v''(x))dx$$

بمكاملة الطرف الأيمن من المساواة أعلاه وباستعمال الشرطين الحديين $(3.4.6)$ و $(3.4.7)$ نجد:

$$\beta\int_a^b(u^2(x)+v^2(x))dx=\left[v(x)u'(x)-u(x)v'(x)\right]_a^b=0$$

وبما أن y_λ تابعا ذاتيا فإنه من أجل كل x من $[a,b]$، لدينا: $u^2(x)+v^2(x)\neq 0$ وبالتالي:

$$\beta\int_a^b(u^2(x)+v^2(x))dx=0\Rightarrow\beta=0\Rightarrow\lambda\in\mathbb{R}$$

أي أن القيم الذاتية للمسألة $((3.4.5)-(3.4.7))$ هي قيم حقيقية.

لنبرهن أن التوابع الذاتية المرفقة متعامدة مثنى مثنى، ليكن y_m و y_n تابعان ذاتيان مرفقان بالقيمتين الذاتيتين λ_m و λ_n على الترتيب، إذن:

$$-\left[p(x)y_m'(x)\right]'+q(x)y_m(x)=\lambda_m y_m(\mathrm{x}) \qquad (3.4.11)$$

$$-\left[p(x)y_n''(x)\right]'+q(x)y_n(x)=\lambda_n y_n(\mathrm{x}) \qquad (3.4.12)$$

بضرب $(3.4.11)$ في y_n و $(3.4.12)$ في $-y_m$ وبالجمع نجد:

$$\left[p(x)y_n'(x)\right]' y_m(x)-\left[p(x)y_m'(x)\right]' y_n(x)=\left(\lambda_m-\lambda_n\right)y_m(x)y_n(x)$$

بالمكاملة من a الى b نحصل على:

$$\left[p(x)\left(y_m(x)y_n'(x)-y_m'(x)y_n(x)\right)\right]_a^b=\left(\lambda_m-\lambda_n\right)\int_a^b y_m(x)\,y_n(x)dx \qquad (3.4.13)$$

بما أن y_m و y_n تابعان ذاتيان مرفقان بالقيمتين الذاتيتين λ_m و λ_n على الترتيب، فإنهما يحققان الشروط:

$$\begin{cases}\alpha y_m(a)+\beta y_m'(a)=0 & (3.4.14)\\ \gamma y_m(b)+\delta y_m'(b)=0 & (3.4.15)\end{cases} \wedge \begin{cases}\alpha y_n(a)+\beta y_n'(a)=0 & (3.4.16)\\ \gamma y_n(b)+\delta y_n'(b)=0 & (3.4.17)\end{cases}$$

بإستعمال الشروط الحدية أعلاه $((3.4.14)-(3.4.17))$ يمكن التحقق بسهولة من المساواة التالية:

$$\left[p(x)\left(y_m(x)y_n'(x)-y_m'(x)y_n(x)\right)\right]_a^b=0$$

ومنه بإستعمال $(3.4.13)$ نجد: $\left(\lambda_m-\lambda_n\right)\int_a^b y_m(x)y_n(x)dx=0$، وبما أنه من أجل كل $m\neq n$ لدينا: $\lambda_m\neq\lambda_n$ فإن: $\int_a^b y_m(x)y_n(x)dx=0$ و التوابع الذاتية متعامدة مثنى مثنى و هو المطلوب.

إن إثبات المبرهنة التالية، يتم على عدة مراحل، تتطلب جهدا كبيرا لإستيعابها. لذا سنقبل بها هنا دون برهان.

مبرهنة 2.4.3: تقبل مسألة ستورم ليوفيل متتالية من القيم الذاتية $\left(\lambda_k\right)$ مع $k=1,2,...$ حيث:

$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<...$ (1) و $\lim\lambda_k=+\infty$ (2).

تمارين مقترحة على الفصل الثالث

التمرين الأول:

على المجال $[0,\pi]$، نعتبر المسألة التالية:

$$(P_1): \quad \begin{cases} y''(x)+\lambda\, y(x)=0 \\ y(0)=0 \\ y(\pi)+ky'(\pi)=0 \end{cases} \quad , \quad k\in\mathbb{R}^*$$

1. برهن أنه إذا كانت λ_n قيمة ذاتية للمسألة (P_1) فإن التوابع الذاتية المرفقة لها هي:

$$x\mapsto y_n(x)=A_n\sin\sqrt{\lambda_n}\,x$$

2. بين أن $\lambda=0$ ليست قيمة ذاتية للمسألة (P_1)، أدرس الحالة $k=-\pi$.

التمرين الثاني:

على المجال $[0,2\pi]$، نعتبر المسألة التالية:

$$(P_2): \quad \begin{cases} y''(x)+\lambda\, y(x)=0 \\ y(0)-y(2\pi)=0 \\ y'(0)-y'(2\pi)=0 \end{cases}$$

1. برهن عدم وجود قيم ذاتية سالبة أو عقدية للمسألة (P_2).
2. برهن أن التوابع الذاتية المرفقة للقيم الذاتية متعامدة مثنى مثنى.
3. برهن أن $x\mapsto A_n\sin nx+B_n\cos nx$ هي توابع ذاتية مرفقة بالقيم الذاتية $\lambda=n^2$.

التمرين الثالث:

على المجال $[0,1]$، نعتبر المسألة التالية:

$$(P_3): \quad \begin{cases} y''(x)+2y'(x)+\lambda\, y(x)=0 \\ y'(0)=y(1)=0 \end{cases}$$

1. برهن أن $\lambda=1$ ليست قيمة ذاتية للمسألة (P_3).
2. برهن عدم وجود قيم ذاتية $\lambda<1$ للمسألة (P_3).
3. أثبت أن التوابع الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية $\lambda_n=\alpha_n{}^2+1$ هي:

$$x\mapsto y_n(x)=e^{-x}\left[\sin(\alpha_n x)+\alpha_n\cos(\alpha_n x)\right]$$

مع α_n حلا للمعادلة المثلثية التالية: $\sin z+z\cos z=0$.

الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية

محتوى الفصل

1.4 مقدمة عامة حول المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية

في هذا الفصل سوف نهتم بتقديم المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية وإيجاد حلول البعض منها باستعمال كلا من طريقة فصل المتغيرات وطريقة تحويل لابلاس.

– **ترميزات:** لتكن $u:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دالة متعددة المتغيرات و $1 \le i, j \le n$. سنرمز للمشتقات الجزئية لـ u بالنسبة لـ x_i بالرمز $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ أو u_{x_i} وبالمثل نرمز لمشتقاتها المختلطة بالنسبة لـ x_i و x_j بالرمز $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ أو $u_{x_i x_j}$ وفي حالة تساوي i و j نرمز بـ $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ أو $u_{x_i x_i}$.

1.1.4 الأنماط الأساسية للمعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية

تعريف 1.1.4: نسمي معادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الثانية بالمتغيرين المستقلين x و y والمجهول التابع u كل معادلة تكتب من الشكل:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

حيث A ، B ، C ، D ، E ، F و G دوال بدلالة المتغيرين المستقلين x و y.

تنقسم المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية حسب إشارة المقدار: $\Delta = B^2 - 4AC$ إلى ثلاث أنماط أساسية هي على النحو التالي:

1. المعادلات الناقصية: إذا كان $\Delta < 0$، ويعتبر مؤثر لابلاس في البعد 2 المعرف بـ: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ أبسط المؤثرات الناقصية.
2. المعادلات المكافئة: إذا كان $\Delta = 0$، ويعتبر مؤثر الحرارة في البعد 2 المعرف بـ: $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ أبسط المؤثرات المكافئة.
3. المعادلات الزائدية: إذا كان $\Delta > 0$، ويعتبر مؤثر الموجة في البعد 2 المعرف بـ: $\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ أبسط المؤثرات الزائدية.

2.1.4 الشروط الإبتدائية والشروط الحدية

لنعتبر معادلة لابلاس في البعد 2 المعرفة بـ: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. من بين حلول هذه المعادلة، نذكر مثلا:

$$u(x,y)=cxy,\quad u(x,y)=c\left(x^2-y^2\right),\quad u(x,y)=csh(x)\cos(y)$$
$$u(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right),\quad u(x,y)=c\ln\left(x^2+y^2\right)$$

حيث c وسيط حقيقي. إن الحل العام لأي معادلة تفاضلية جزئية يتضمن عددا معينا من الثوابت غير المحددة وذلك حسب رتبة المعادلة وعدد المتغيرات المستقلة فيها ولتحديد هذه الثوابت نحتاج إلى معرفة بعض الشروط الحدية أو الإبتدائية على الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية الجزئية.

لنعتبر على سبيل المثال مسألة إنتشار الحرارة في قضيب معدني موصل للحرارة طوله l. ينمذج إنتشار الحرارة في هذا القضيب المعدني بالمعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x},\quad 0<x<l,\quad t>0 \qquad (4.1.1)$$

بالإضافة إلى ذلك نفترض أن درجة الحرارة الإبتدائية (أي في اللحظة $t=0$) في القضيب المعدني هي $f(x)$ أي نفرض الشرط الإبتدائي التالي:

$$u(x,0)=f(x),\quad 0<x<l \qquad (4.1.2)$$

نفترض كذلك أن درجة الحرارة عند طرفي القضيب المعدني مثبتة وتساوي 0 مثلا، أي نفرض الشرطين الحديين التاليين:

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\quad t>0 \qquad (4.1.3)$$

من المعادلات (4.1.1)، (4.1.2) و (4.1.3) نحصل على مسألة إنتشار الحرارة التالية:

$$(4.1.4):\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x},\quad 0<x<l,\quad t>0 & (4.1.4)_1\\ u(x,0)=f(x),\quad 0<x<l & (4.1.4)_2\\ u(0,t)=0,\quad t>0 & (4.1.4)_3\\ u(l,t)=0,\quad t>0 & (4.1.4)_4 \end{cases}$$

2.4 طريقة فصل المتغيرات لحل المعادلات التفاضلية الجزئية

1.2.4 المبدأ العام للطريقة

طريقة فصل المتغيرات هي الطريقة التي نقوم خلالها بفصل تعلق متغيرات المجهول ببعضها. لنفترض أنه لدينا معادلة تفاضلية جزئية مجهولها u ولنبحث عن u من الشكل:

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

فكرة فصل المتغيرات تعود إلى فوريه (1768-1830) في حله لمعادلة الحرارة وقد كانت هذه المسألة هي السبب في تطوير نظرية سلاسل فوريه وتسمى طريقة فصل المتغيرات كذلك بطريقة فوريه.

- **تذكير بسلاسل فوريه:**

لنفترض أن دالة f قابلة للمكاملة على مجال $]-l,l[$ ودورية ذات دور $2l$. السلسلة:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (4.2.1)$$

تسمى سلسلة فوريه للدالة f حيث:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \quad \text{و} \quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\,.$$

مبرهنة 1.2.4: إذا كانت الدالتين f و f' مستمرتين بالقطعة على المجال $]-l,l[$ حيث f دورية ذات دور $2l$ فإن سلسلة فوريه (4.2.1) تتقارب نحو $f(x)$ في كل نقطة x تكون f مستمرة عندها، أي أن:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,.$$

2.2.4 حل مسألة القيم الإبتدائية – الحدية للحرارة بإستعمال طريقة فصل المتغيرات

لدينا المبرهنة التالية:

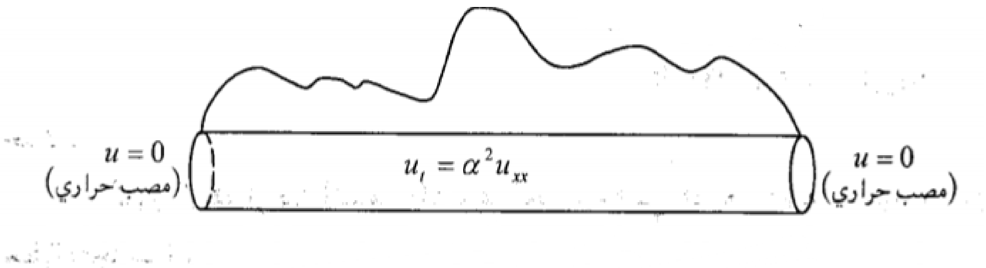
مبرهنة 2.2.4: إذا كانت f دالة مستمرة على $[0,L]$ وكانت f' دالة مستمرة بالقطعة على $[0,L]$ حيث: $f(0)=f(L)=0$ فإن حل مسألة القيم الإبتدائية – الحدية التالية:

$$(4.2.2) \qquad \begin{cases} u_t(x,t)=c^2u_{xx}(x,t), \quad (0<x<L)\wedge(t>0) & (4.2.2)_1 \\ u(x,0)=f(x), \quad 0\le x\le L & (4.2.2)_2 \\ u(0,t)=u(L,t)=0, \quad t\ge 0 & (4.2.2)_3 \end{cases}$$

يحدد من أجل كل $t\ge 0$ و $0\le x\le L$، بالعلاقة التالية:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-(\frac{n\pi c}{L})^2 t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{حيث:} \quad C_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt\,.$$

إثبات: نطبق طريقة فصل المتغيرات (أو طريقة فوريه) ومن المحتمل أن تكون أكثر الطرق شيوعا للحل، قبل أن نبدأ بفصل المتغيرات لنتأمل مسألتنا هذه، لدينا ذراع طولها منته ودرجة حرارتها في نهايتيها مثبتة عند الصفر ودرجة الحرارة الإبتدائية: $u(x,0)=f(x)$



مخطط مسألة الإنتشار

هدفنا من المسألة إيجاد الحل u –إن وجد– على الصورة التالية:

$$u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$$

حيث أن X دالة بدلالة x و T بدلالة t. بالإشتقاق الجزئي لـ u بالنسبة لكل من x و t نحصل على:

$$u_t(x,t)=X(x)T'(t) \qquad \text{و} \qquad u_{xx}(x,t)=X''(x)T(t)$$

و بالتعويض في المعادلة التفاضلية الجزئية $(4.2.2)_1$ نحصل على:

$$X(x)T'(t)=c^2X''(x)T(t)$$

وبالقسمة على $X(x)T(t)$ نحصل على:

$$\frac{T'}{T}(t)=c^2\frac{X''}{X}(x)$$

بما أن t و x متغيران مستقلان فإن كلا من طرفي المعادلة أعلاه يجب أن يساوي مقدارا ثابتا، و ليكن λ، عندئذ يكون لدينا:

$$\frac{T'}{T}(t)=c^2\frac{X''}{X}(x)=\lambda$$

الثابت λ يسمى ثابت فصل المتغيرات. نحصل إذن على المعادلتين التفاضليتين العاديتين التاليتين:

$$(4.2.3) \qquad \begin{cases} T'(t)-\lambda T(t)=0 \\ X''(x)-\dfrac{\lambda}{c^2}X(x)=0 \end{cases}$$

كذلك بتعويض الشروط الحدية $(4.2.2)_3$ في العبارة: $u(x,t)=X(x)T(t)$، نحصل على:

$$(4.2.4) \qquad \begin{cases} u(0,t)=X(0)T(t)=0 \\ u(L,t)=X(L)T(t)=0 \end{cases}$$

ومنه فإن: $X(0)=X(L)=0$ ، وإلا فإن: $T(t)=0$ من أجل كل $t\geq 0$ وهذا يؤدي إلى $u\equiv 0$ وهذا تناقض.

من (4.2.3) و (4.2.4) نحصل على مسألة ستورم ليوفيل التالية:

$$(4.2.5)\qquad \begin{cases} X''-\dfrac{\lambda}{c^2}X(x)=0, & 0<x<L \qquad (4.2.5)_1 \\ X(0)=X(L)=0 & (4.2.5)_2 \end{cases}$$

وهي مسألة تهدف إلى إيجاد القيم λ (تسمى القيم الذاتية) التي تجعل المسألة (4.2.5) تقبل حلولا غير صفرية (تسمى الدوال الذاتية). حسب قيم الوسيط الحقيقي λ نميز الحالات الثلاثة التالية:

الحالة 1: إذا كان $\lambda>0$ فإن $e^{-\frac{\lambda}{c}x}$ و $e^{\frac{\lambda}{c}x}$ حلين للمعادلة $(4.2.5)_1$ وبالتالي فالحل العام لها يكون على الشكل:

$$X(x)=Ae^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x}+Be^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x}$$

وبتطبيق الشروط الحدية $(4.2.5)_2$ نجد: $A=B=0$ أي أن: $X(x)=0$ من أجل كل x من $[0,L]$ وهذا مرفوض لأنه يؤدي إلى حل صفري للمسألة (4.2.5) .

الحالة 2: إذا كان $\lambda=0$ فإن الحل العام للمعادلة $(4.2.5)_1$ هو: $X(x)=A_2x+B_2$ وبتطبيق الشروط الحدية $(4.2.5)_2$ نجد: $A_2=B_2=0$ وبالتالي: $X(x)=0$ من أجل كل x من $[0,L]$ وهذا مرفوض كذلك لأنه يؤدي إلى حل صفري للمسألة (4.2.5) .

الحالة 3: إذا كان $\lambda<0$. نضع $\lambda=-\mu^2$ فيكون الحل العام للمعادلة $(4.2.5)_1$ من الشكل:

$$X(x)=A\sin\left(\frac{\mu}{c}x\right)+B\cos\left(\frac{\mu}{c}x\right),\qquad \mu=\sqrt{|\lambda|}>0$$

وبتطبيق الشروط الحدية $(4.2.5)_2$ نجد: $B=0$ ، $A\in\mathbb{R}^*$ و $\mu=\dfrac{n\pi c}{L}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$ ، ومنه فإن القيم الذاتية للمسألة (4.2.5) هي : $\lambda_n=-\left(\dfrac{n\pi c}{L}\right)^2,\quad n\in\mathbb{N}^*$ والدوال الذاتية المرفقة هي:

$$X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\quad n\in\mathbb{N}\qquad (4.2.6)$$

من أجل كل قيمة لـ λ_n نحل المعادلة التفاضلية التالية: $T'-\lambda_nT=0$. لدينا:

$$T'-\lambda_nT=0\Rightarrow\frac{T'}{T}=\lambda_n$$

نجد إذن الحلول التالية للمعادلة التفاضلية أعلاه:

$$T_n(t)=e^{\lambda_n t}=ke^{-\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2}t, \qquad (k\in\mathbb{R})\wedge(t>0)$$

وبالتالي فإنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$، الدالة u_n المعرفة بالشكل:

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=e^{-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

حل للمعادلة التفاضلية الجزئية $(4.2.2)_1$ وتحقق الشروط الحدية $(4.2.2)_3$ و منه فإن:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 t}\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

حل للمعادلة التفاضلية الجزئية $(4.2.2)_1$ وتحقق الشروط الحدية $(4.2.2)_3$.

الآن نطبق الشرط الإبتدائي $(4.2.2)_2$ أي الشرط $u(x,0)=f(x)$ مع $0\le x\le L$، فنجد:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(\frac{n\pi}{L}x), \quad 0\le x\le L$$

السلسلة أعلاه هي سلسلة فوريه للدالة f والمعاملات C_n تحسب من العلاقة:

$$C_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

مثال 1.2.4: باستعمال طريقة فصل المتغيرات. لنحل المسألة التالية:

$$(4.2.7)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0<x<1)\wedge(t\ge 0) & (4.2.7)_1\\ u(0,t)=0, \quad t\ge 0 & (4.2.7)_2\\ u(1,t)+\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t)=0, \quad t\ge 0 & (4.2.7)_3\end{cases}$$

نضع: $u(x,t)=X(x)T(t)$ فيكون لدينا بالتعويض في $(4.2.7)_1$: $u_t(x,t)=X(x)T'(t)$ و $\frac{X''}{X}(x)=\frac{T'}{T}(t)$
وبما أن $\frac{X''}{X}$ و $\frac{T'}{T}$ تابعين لمتغيرين مختلفين وهما متساويان فإنه يكون لدينا: $\frac{X''}{X}(x)=\frac{T'}{T}(t)=-\lambda$ ونحصل عندئذ على المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ T'(t)+\lambda T(t)=0\end{cases}$$

من الشروط الحدية نجد: $u(0,t)=X(0)T(t)=0$ و $u(1,t)+\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=X(1)T(t)+X'(1)T(t)=0$

وبما أن $T\neq 0$ فإننا نحصل على: $X(0)=X(1)+X'(1)=0$ ، وتصبح لدينا الجملة التالية:

$$(4.2.8)\qquad \begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 & (4.2.8)_1 \\ X(0)=X(1)+X'(1)=0 & (4.2.8)_2 \end{cases}$$

لحساب الحل X ، نبدأ أولا بحساب القيم الذاتية أي قيم الوسيط الحقيقي λ بحيث المسألة (4.2.8) تقبل حلا غير معدوم. نميز إذن الحالات التالية:

الحالة 1: يمكن أن نتحقق أنه من أجل $\lambda=0$ فإن $X\equiv 0$ ، ومنه فإن $\lambda=0$ ليست قيمة ذاتية للمسألة (4.2.8).

الحالة 2: يمكن كذلك أن نتحقق أنه من أجل $\lambda<0$ فإن $X\equiv 0$ ، ومنه فإن قيم λ حيث $\lambda<0$ قيما ليست ذاتية للمسألة (4.2.8).

الحالة 3: من أجل $\lambda>0$. نضع: $\lambda=\alpha l$ ، مع $\alpha\neq 0$ ، فيكون الحل العام للمعادلة $(4.2.8)_1$ من الشكل:

$$X(x)=c_1\cos\alpha x+c_2\sin\alpha x/\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

بإستعمال الشروط الحدية $(4.2.8)_2$ نحصل على:

$$\begin{cases} c_1=0 \\ c_2(\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)=0 \end{cases}$$

بأخذ $c_2\in\mathbb{R}^*$ فإن α يجب أن تحقق: $\sin\alpha+\alpha\cos\alpha=0$ أي تحقق: $\tan\alpha=-\alpha$. إذن λ قيمة ذاتية من أجل قيم α التي تحقق المعادلة المثلثية التالية: $\tan x=-x$ والقيم الذاتية المرفقة لها هي : $X_n(x)=\sin\sqrt{\lambda}x$.

لنمر الآن إلى حل المعادلة التفاضلية ذات المجهول T_n . لدينا: $T_n(t)+\lambda T_n(t)=0$ ومنه فإن $\frac{T_n'}{T_n}(t)=-\lambda$ ، بالمكاملة نجد: $T_n(t)=c_ne^{-\lambda t}$ ، ومنه حل المسألة (4.2.7) يحسب من العلاقتين التاليتين:

$$u_n(x,t)=X_n(x)\times T_n(t)=c_ne^{-\lambda t}\sin\sqrt{\lambda}x \text{ و } u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\sqrt{\lambda}xe^{-\lambda t}.$$

3.2.4 حل مسألة القيم الإبتدائية – الحدية للموجة باستعمال طريقة فصل المتغيرات

لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 3.2.4: إذا كانتا f و g دالتين مستمرتين و f' و g' دالتين مستمرتين بالقطعة على المجال $[0,a]$ فإن المسألة التالية:

$$(4.2.9)\qquad \begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}\,, \quad (0<x<a)\wedge(t>0) \qquad (4.2.9)_1 \\ u(x,0)=f(x), \quad u_t(x,0)=g(x), \quad 0\le x\le a \qquad (4.2.9)_2 \\ u(0,t)=0, \quad u(a,t)=0, \quad t\ge 0 \qquad (4.2.9)_3 \end{cases}$$

قابلة للحل وحلها يحسب من العلاقة التالية:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(\frac{n\pi c}{a}t)+B_n\sin(\frac{n\pi c}{a}t\right]\sin(\frac{n\pi c}{a}x) \qquad (4.2.10)$$

بحيث:

$$B_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^a g(\tau)\sin(\frac{n\pi}{a}\tau)d\tau,\quad n\ge 1 \quad \text{و} \quad A_n=\int_0^a f(\tau)\sin(\frac{n\pi}{a}\tau)d\tau, n\ge 1 \qquad (4.2.11)$$

إثبات: المعادلة $(4.2.9)_1$ خطية ومتجانسة ولذا فإن مجموع الحلول الخاصة لها يعتبر أيضا حـلا لهـــــذه المعادلة و بالحصول على عدد كبير بقدر كاف من الحلول الخاصة يمكن تعيين الحل المطلوب بتجميعها بمعاملات معينة.

بتطبيق طريقة فوريه (فصل المتغيرات) أي بفرض الحل يكتب من الشكل: $u(x,t)=X(x)T(t)$ مع X دالة في المتغير x فقط و T دالة في المتغير t فقط وبالتعويض في المعادلة $(4.2.9)_1$ حصل على ما يلي:

$$\frac{T''}{T}(t)=c^2\frac{X''}{X}(x) \qquad (4.2.12)$$

وبما أن $\frac{X''}{X}$ و $\frac{T'}{T}$ تابعين لمتغيرين مختلفين وهما متساويان فإنه يكون لدينا: $c^2\frac{X''}{X}(x)=\frac{T''}{T}(t)=\lambda$ ونحصل عندئذ على المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

$$\begin{cases} X''(x)-\frac{\lambda}{c^2}X(x)=0 \qquad (4.2.13) \\ T''(t)-\lambda T(t)=0 \qquad (4.2.14) \end{cases}$$

و من الشرطين الحديين $(4.2.9)_3$ لدينا:

$$\begin{cases} u(0,t)=X(0)\times T(t)=0 \\ u(a,t)=X(a)\times T(t)=0 \end{cases}$$

فينتج عنهما أن الدالة X تحقق الشرطين: $X(0)=X(a)=0$، ومنه نحصل على مسألة ستورم ليوفيل أو مسألة القيم الذاتية التالية:

$$(4.2.15)\qquad \begin{cases} X''(x) - \dfrac{\lambda}{c^2}X(x) = 0, & 0 < x < a \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

لنعين قيم الوسيط الحقيقي λ (القيم الذاتية) بحيث المسألة (4.2.15) تقبل حلا غير تافه (أي $X \neq 0$).

القيم الذاتية لـ (4.2.15) هي $\lambda_n = -\left(\dfrac{n\pi c}{a}\right)^2$ مع $n \in IN^*$ والدوال الذاتية المرفقة هي $X_n(x) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{a}x\right)$ مع $n \in \mathbb{N}^*$ ولنبحث من أجل كل قيمة لـ $n \in \mathbb{N}^*$ عن حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$T''(t) - \lambda_n T(t) = 0 \qquad (4.2.16)$$

والتي هي معادلة تفاضلية عادية خطية متجانسة من الرتبة الثانية. من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن الدالة:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{a}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{a}t\right), t \geq 0$$

حيث A_n و B_n دوال إختيارية حلا للمعادلة (4.2.16)، ومنه فإنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$، الدالة:

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left[A_n\cos(\frac{n\pi c}{a}t) + B_n\sin(\frac{n\pi c}{a}t)\right]\sin(\frac{n\pi}{a}x)$$

تحقق المعادلة $(4.2.9)_1$ والشروط الحدية $(4.2.9)_3$ وحيث أن معادلة الموجة $(4.2.9)_1$ معادلة خطية متجانسة فإن:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(\frac{n\pi c}{a}t) + B_n\sin(\frac{n\pi c}{a}t)\right]\sin(\frac{n\pi}{a}x)$$

كذلك حلا للمعادلة $(4.2.9)_1$ وتحقق الشروط الحدية $(4.2.9)_3$. الآن بتطبيق الشروط الإبتدائية $(4.2.9)_2$، نجد:

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi}{a}x) = f(x) \qquad (4.2.17)$$

$$u_t(x,0) = g(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n\pi c}{a}) B_n \sin(\frac{n\pi}{a}x) = g(x) \qquad (4.2.18)$$

السلسلتين (4.2.17) و (4.2.18) هما سلسلتا فوريه للدالتين f و g على الترتيب و من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ المعاملات A_n و B_n تحسب من العلاقتين:

$$B_n = \frac{2}{a}(\frac{a}{n\pi c})\int_0^a g(t)\sin(\frac{n\pi}{a}t)dt \quad \text{و} \quad A_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(t)\sin(\frac{n\pi}{a}t)dt$$

حل المسألة (4.2.9) يحسب إذن من الشكل:

$$u(x,t)=\sum_{n\geq 1}\left[A_n\cos(\frac{n\pi c}{a}t)\sin(\frac{n\pi}{a}x)+B_n\sin(\frac{n\pi c}{a}t)\sin(\frac{n\pi}{a}x)\right]\qquad (4.2.19)$$

باستخدام المتطابقات المثلثية التالية:

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

نحصل على:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\left[A_n(\sin(\frac{n\pi}{a}(x+ct))+\sin(\frac{n\pi}{a}(x-ct))\right]$$
$$+B_n\left[\cos(\frac{n\pi}{a}(x-ct))-\cos(\frac{n\pi}{a}(x+ct))\right]\qquad (4.2.20)$$

وبما أن $\sum_{n\geq 1}A_n\sin\frac{n\pi}{a}y=f(y)$ وهذا إعتمادا على $(4.2.9)_2$، فإنه من جهة يكون لدينا:

$$\sum_{n\geq 1}A_n\left[\sin(\frac{n\pi}{a}(x+ct)+\sin(\frac{n\pi}{a}(x-ct)\right]=f(x+ct)+f(x-ct)\qquad (4.2.21)$$

ومن جهة أخرى، لدينا:

$$\int_{x-ct}^{x+ct}\sin\frac{n\pi}{a}\tau d\tau=\left[-\frac{a}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{a}\tau\right]_{x-ct}^{x+ct}=\frac{a}{n\pi}\left[\cos(\frac{n\pi}{a}(x-ct))-\cos(\frac{n\pi}{a}(x+ct))\right]$$

و بالتالي فإن:

$$\cos(\frac{n\pi}{a}(x-ct))-\cos(\frac{n\pi}{a}(x+ct))=\frac{n\pi}{a}\int_{x-ct}^{x+ct}\sin\frac{n\pi}{a}\tau d\tau$$

ومنه نجد:

$$I=\sum_{n\geq 1}B_n\left[\cos(\frac{n\pi}{a}(x-ct))-\cos(\frac{n\pi}{a}(x+ct))\right]=\sum_{n\geq 1}\frac{n\pi}{a}B_n\int_{x-ct}^{x+ct}\sin(\frac{n\pi}{a}\tau)d\tau$$

$$I=\int_{x-ct}^{x+ct}(\sum_{n\geq 1}\frac{n\pi}{a}B_n\sin(\frac{n\pi}{a}\tau))d\tau$$

ولدينا: $u_t(x,0)=g(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{n\pi}{a}B_n\sin(\frac{n\pi}{a}\tau)=\frac{1}{c}g(\tau)$ وبالتالي نحصل على:

$$I=\frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\tau)d\tau\qquad (4.2.22)$$

بتعويض (4.2.21) و (4.2.22) في (4.2.20)، نجد:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)d\tau \qquad (4.2.23)$$

تسمى العبارة (4.2.23) صيغة دالمبيرت "D'Alembert" لحل المسألة الموجية (4.2.9) .

مثال 2.2.4: لنحسب حل المسألة التالية:

$$(4.2.24) \qquad \begin{cases} u_{tt}=9u_{xx}\,, & (-\infty<x<+\infty)\wedge(t>0) \\ u(x,0)=x(\pi-x)\,, & -\infty<x<\infty \\ u_t(x,0)=x^2\,, & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

لدينا: $f(x)=x(\pi-x)$ و $g(x)=x^2$، ولدينا كذلك:

$$f(x\pm ct)=(x\pm ct)\left(\pi-x\pm ct\right)$$

$$\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]=x(\pi-x)$$

$$\int_{x-ct}^{x+ct}\tau^2 d\tau=\frac{1}{3}\left[(x+ct)^3-(x-ct)^3\right]=2x^2ct+\frac{2}{3}(ct)^3=6tx^2+18t^3$$

ومنه باستخدام صيغة دالمبيرت نجد أن حل المسألة (4.2.24) هو:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)d\tau=x(\pi-x)+tx^2+3t^3 \,.$$

4.2.4 حل مسألة لابلاس مع شروط ديريكلي بإستعمال طريقة فصل المتغيرات

لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 4.2.4: نعتبر المسألة التالية:

$$(4.2.25) \qquad \begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0\,, \quad (0<x<a)\wedge(0<y<b) & (4.2.25)_1 \\ u(0,y)=0\,, \quad u(a,y)=f(y)\,, \quad 0<y<b & (4.2.25)_2 \\ u(x,0)=0\,, \quad u(x,b)=0\,, \quad 0<x<a & (4.2.25)_3 \end{cases}$$

بإستعمال طريقة فوريه يمكننا كتابة حل المسألة (4.2.25) على الشكل التالي:

$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(\frac{n\pi y}{a})sh(\frac{n\pi x}{b})$ حيث: $n\geq 1$ ، $D_n=\dfrac{2}{bsh(\frac{n\pi a}{b})}\displaystyle\int_0^b f(y)\sin(\frac{n\pi y}{b})dy$.

إثبات: كما سبق، بفرض أن: $u(x,y)=X(x)T(y)$ وبالتعويض في المعادلة $(4.2.25)_1$ نجد:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{T''(y)}{T(y)}=\lambda$$

وهكذا نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$(4.2.26)\qquad \begin{cases} X''(x)-\lambda X(x)=0 & (4.2.26)_1 \\ T''(y)+\lambda T(y)=0 & (4.2.26)_2 \end{cases}$$

لنعتبر الشرط الحدي: $u(x,0)=0=X(x)T(0)$. إذا كان $T(0)\neq 0$ فإنه من أجل كل x بحيث $0<x<a$ يكون لدينا: $X(x)=0$ وهذا يعني أن الحل $u(x,y)$ منعدم من أجل كل (x,y) من النطاق $[0,a]\times[0,b]$ إذن $T(0)=0$. نفس الشيء بالنسبة للشرط الحدي: $u(x,b)=0=X(x)T(b)$ ونحصل على: $T(b)=0$ ومنه وباعتبار المعادلة $(4.2.26)_1$، نحصل على المسألة التالية :

$$(4.2.27)\qquad \begin{cases} T''(y)+\lambda T(y)=0 & (4.2.27)_1 \\ T(0)=T(b)=0 & (4.2.27)_2 \end{cases}$$

وهذه المسألة هي لستورم ليوفيل حلولها من الشكل:

$$T_n(y)=A_n\sin(\sqrt{\lambda_n}\,y),\quad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,\quad n\geq 1$$

وبالعودة إلى المعادلة $(4.2.26)_2$ نجد:

$$X''(x)-\lambda_n X(x)=X''(x)-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 X(x)=0$$

وحل هذه المعادلة يكتب على الشكل التالي:

$$X_n(x)=B_n\exp\left(\frac{n\pi}{b}x\right)+C_n\exp\left(-\frac{n\pi}{b}x\right)$$

لكن: $X_n(0)=0$ وذلك لأن $u(0,y)=0$ ومنه فان $B_n=-C_n$ وبالتالي:

$$u_n(x,y)=X_n(x)T_n(y)=A_nB_n sh(\frac{n\pi}{b}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)$$

حل المسألة $(4.2.25)$ يكتب إذن على الشكل التالي:

$$u(x,y)=2\sum_{n=1}^{\infty}A_nB_n sh(\frac{n\pi}{b}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\qquad (4.2.27)$$

لكن بما أن: $u(a,y)=f(y)$ فإنه بالتعويض في (4.2.27) نجد:

$$2sh(\frac{n\pi}{b}a)\sum_{n=1}^{\infty}A_nB_n\sin(\frac{n\pi}{b}y)=f(y)$$

أي أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nB_n\sin(\frac{n\pi}{b}y)=\frac{f(y)}{2sh(\frac{n\pi}{b}a)}$$

فيكون لدينا:

$$A_nB_n=\frac{1}{bsh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)}\int_0^b f(y)\sin(\frac{n\pi}{b}y)dy$$

بوضع: $D_n=A_nB_n$ نجد أن الحل $u(x,y)$ يحسب من العلاقة التالية:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin(\frac{n\pi y}{a})sh(\frac{n\pi x}{b})$$ حيث: $n\geq 1$ ، $$D_n=\frac{2}{bsh(\frac{n\pi a}{b})}\int_0^b f(y)\sin(\frac{n\pi y}{b})dy$$.

لننتقل الآن إلى التعرف على طريقة تحويل لابلاس واستعمالها في حل بعض المسائل التفاضلية بمعادلات جزئية.

3.4 طريقة تحويل لابلاس لحل المعادلات التفاضلية الجزئية

1.3.4 حل مسألة الحرارة بإستعمال تحويل لابلاس

لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 1.3.4: نعتبر مسألة الحرارة التالية:

$$(4.3.1)\quad\begin{cases}u_t(x,t)=u_{xx}(x,t), & (0<x<\pi)\wedge(t>0) \quad (4.3.1)_1\\ u(x,0)=\sin x, & 0\leq x\leq\pi \quad (4.3.1)_2\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & t\geq 0 \quad (4.3.1)_3\end{cases}$$

باستعمال تحويل لابلاس يمكننا كتابة حل المسألة (4.3.1) على الشكل التالي:

$$u(x,t)=L^{-1}(U(x,s))(t)=L^{-1}(\frac{\sin x}{1+s})(t)=e^{-t}\sin x$$

إثبات: بإعتبار x كوسيط و t متغيرا فإن تحويل لابلاس لـ $u(x,t)$ يعطى بالعبارة:

$$U(x,s):=L(u(x,t))(s):=\int_0^{+\infty}u(x,t)e^{-st}dt$$

ومنه بإدخال تحويل لابلاس على طرفي المعادلة $(4.3.1)_1$ نجد:

$$L(u_t(x,t))(s)=L(u_{xx}(x,t))(s)$$

بإستعمال خواص تحويل لابلاس والشرط الإبتدائي $(4.3.1)_2$ نحصل على:

$$L(u_{xx}(x,t))(s)=U_{xx}(x,s) \quad \text{و} \quad L(u_{tt}(x,t))(s)=sU(x,s)-\sin x$$

ومنه بالتعويض في المعادلة $(4.3.1)_1$ نجد:

$$U_{xx}(x,s)-sU(x,s)=-\sin x \qquad (4.3.2)$$

المعادلة $(4.3.2)$ هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة، حلها العام يكتب من الشكل:

$$U(x,s)=c_1e^{x\sqrt{s}}+c_2e^{-x\sqrt{s}}+\frac{\sin x}{1+s}, \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

- حساب الثوابت c_1 و c_2: بإدخال تحويل لابلاس على طرفي $(4.3.1)_3$، يكون لدينا:

$$U(\pi,s)=L(u(\pi,t))(s)=c_1e^{\pi\sqrt{s}}+c_2e^{-\pi\sqrt{s}}=0 \quad \text{و} \quad U(0,s)=L(u(0,t))(s)=c_1+c_2=0$$

ومنه نحصل على: $c_1=0$ و $c_2=0$ أي أن: $U(x,s)=\dfrac{\sin x}{1+s}$، وبإدخال التحويل العكسي للابلاس نجد أن الحل العام للمسألة $(4.3.1)$ يحسب من العبارة التالية:

$$u(x,t)=L^{-1}(U(x,s))(t)=L^{-1}(\frac{\sin x}{1+s})(t)=e^{-t}\sin x$$

2.3.4 حل مسألة الموجة بإستعمال تحويل لابلاس

لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 2.3.4: نعتبر مسألة الموجة التالية:

$$(4.3.3) \qquad \begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}, \quad (0<x)\wedge(t>0) & (4.3.3)_1 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0, \quad 0<x & (4.3.3)_2 \\ u(0,t)=f(t), \quad f(0)=0, \quad 0<t & (4.3.3)_3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}u(x,t)=0, \quad 0<t & (4.3.3)_4 \end{cases}$$

باستعمال تحويل لابلاس يمكننا كتابة حل المسألة $(4.3.3)$ على الشكل التالي:

$$u(x,t)=L^{-1}(L(f(t))(s)e^{-\frac{s}{c}x})=\begin{cases} f(t-\frac{x}{c}), & t\geq\frac{x}{c} \\ 0, & t<\frac{x}{c} \end{cases}$$

إثبات: بإعتبار x كوسيط و t متغير فإن تحويل لابلاس لـ $u(x,t)$ يعطى بالعبارة:

$$U(x,s):=L(u(x,t))(s):=\int_0^{+\infty}u(x,t)e^{-st}dt$$

بإدخال تحويل لابلاس على طرفي المعادلة $(4.3.3)_1$ نجد:

$$L(u_{tt}(x,t))(s)=c^2L(u_{xx}(x,t))(s)$$

بإستعمال خواص تحويل لابلاس والشروط الإبتدائية $(4.3.3)_2$ ، نحصل على:

$$L\left(u_{tt}\left(x,t\right)\right)\left(s\right)=s^2U\left(x,s\right) \text{ و } L(u_{xx}(x,t))(s)=U_{xx}(x,s)$$

ومنه بالتعويض في المعادلة $(4.3.3)_1$ نجد:

$$U_{xx}(x,s)-\frac{s^2}{c^2}U(x,s)=0$$

الحل العام للمعادلة أعلاه هو:

$$U(x,s)=c_1(s)e^{\frac{s}{c}x}+c_2(s)e^{-\frac{s}{c}x}$$

بما أن: $\lim_{x\to+\infty}u(x,t)=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}L(u(x,t))(s)=\lim_{x\to+\infty}U(x,s)=0$ وهذا ينتج عنه أن $c_1=0$. بإدخال تحويل لابلاس على طرفي $(4.3.3)_3$ فإنه يكون لدينا:

$$U(0,t)=L(u(0,t))(s)=L(f(t))(s) \text{ وهذا ينتج عنه أن: } c_2(s)=L\left(f(t)\right)(s)$$

ومنه نجد: $U(x,s)=L(f(t))(s)e^{-\frac{s}{c}x}$. بتطبيق التحويل العكسي للابلاس نحصل على:

$$u(x,t)=L^{-1}(L(f(t))(s)e^{-\frac{s}{c}x})=\begin{cases} f(t-\frac{x}{c}), & t\geq\frac{x}{c} \\ 0, & t<\frac{x}{c} \end{cases}$$

4.4 دراسة وحدانية وإستقرار الحل لبعض المعادلات التفاضلية الجزئية

1.4.4 وحدانية وإستقرار الحل لمسألة القيم الإبتدائية – الحدية للحرارة

لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 1.4.4: مسألة القيم الإبتدائية – الحدية التالية:

$$(4.4.1)\quad \begin{cases} u_t(x,t)=u_{xx}(x,t), & (0<x<1)\wedge(t>0) \quad (4.4.1)_1 \\ u(0,t)=0, \quad u(1,t)+\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=0, & t\geq 0 \quad (4.4.1)_2 \\ u(x,0)=f(x), \quad 0\leq x\leq 1 & (4.4.1)_3 \end{cases}$$

تقبل حلا وحيدا.

إثبات: ليكن u_1 و u_2 حلين للمسألة $(4.4.1)$، نضع: $\omega=u_1-u_2$ ولنبين أنه من أجل كل $t\geq 0$ و $0\leq x\leq 1$ فإن: $\omega(x,t)=0$. نضع: $I(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\omega(x,t)\right]^2dx$ فيكون لدينا: $I'(t)=\int_0^1\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\omega(x,t)dx$

وبما أن:

$$I'(t) = \left[\omega(x,t)\times\frac{\partial\omega}{\partial x}(x,t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}dx$$
$$= \omega(1,t)\frac{\partial\omega}{\partial x}(1,t) - \omega(0,t)\frac{\partial\omega}{\partial x}(0,t) - \int_0^1\left(\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx$$

فإنه بإستعمال الشروط الحدودية $(4.4.1)_2$ نجد:

$$I'(t) = -\left(\omega^2(1,t) + \int_0^1\left(\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx\right)$$

وهذا يعني أن I متناقص على المجال $[0,+\infty[$، ومنه فإنه من أجل كل $t\geq 0$ لدينا: $I(t)\leq I(0)$ ، وبما أن: $I\geq 0$ و $I(0)=\frac{1}{2}\int_0^1[\omega(x,0)]^2 dx = 0$ فإنه من أجل كل $t\geq 0$ يكون لدينا: $I(t)=0$ ومنه من أجل كل $t\geq 0$ و $0\leq x\leq 1$ فإن $\omega(x,t)=0$ أي أن: $u_1\equiv u_2$ ومنه وحدانية حل المسألة $(4.4.1)$.

2.4.4 وحدانية وإستقرار الحل لمسألة القيم الإبتدائية – الحدية للموجة

لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 2.4.4: نعتبر مسألة القيم الإبتدائية – الحدية التالية:

$$(4.4.2)\quad \begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}, & (-\infty<x<+\infty)\wedge(t>0) & (4.4.2)_1\\ u(x,0)=f(x), & -\infty<x<+\infty & (4.4.2)_2\\ u_t(x,0)=g(x), & -\infty<x<+\infty & (4.4.2)_3\\ u(-\infty,t)=u(+\infty,t)=0, & t\geq 0 & (4.4.2)_4\end{cases}$$

إذا كانت $f\in C^2(\mathbb{R})$ و $g\in C^1(\mathbb{R})$ فإن المسألة $(4.4.2)$ تقبل حلا وحيدا يعتمد بصورة مستمرة على المعطيين f و g ويعطى بصيغة دالمبيرت التالية:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x)-ct+f(x+ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\tau)d\tau,\quad (x\in\mathbb{R})\wedge(t\geq 0)$$

إثبات: نطبق طريقة الطاقة لدراسة وحدانية الحل لمسألة القيم الحدية والإبتدائية. بفرض أن u_1 و u_2 حلين للمسألة $(4.4.2)$ فإن الدالة: $\omega=u_1-u_2$ تحقق المسألة المتجانسة التالية:

$$(4.4.3)\quad \begin{cases} \omega_{tt}=c^2\omega_{xx}, & (-\infty<x<+\infty)\wedge(t>0) & (4.4.3)_1\\ \omega(x,0)=0, & -\infty<x<+\infty & (4.4.3)_2\\ \omega_t(x,0)=0, & -\infty<x<+\infty & (4.4.3)_3\\ \omega(-\infty,t)=\omega(+\infty,t)=0, & t\geq 0 & (4.4.3)_4\end{cases}$$

نريد إثبات أنه من أجل كل $t\geq 0$ و $x\in\mathbb{R}$ فإن $\omega(x,t)=0$ أي نريد إثبات أن: $\omega\equiv 0$ ومن أجل ذلك سنستخدم مبدأ تكامل الطاقة. الطاقة الكلية للحبل المهتز أو (الموجة) عند اللحظة t تعطى من الشكل:

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[c^2\left(\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\right)^2\right]dx$$

بما أن ω قابل للإشتقاق باستمرار مرتين فإنه بإمكاننا إشتقاق تكامل الطاقة بالنسبة إلى t، فنحصل على:

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[c^2\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2\omega(x,t)}{\partial x\partial t}+\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\frac{\partial^2\omega(x,t)}{\partial t^2}\right]dx$$

المكاملة بالتجزئة للحد الأول لمشتق تكامل الطاقة، تعطي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}c^2\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2\omega(x,t)}{\partial x\partial t}dx=\left[c^2\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\right]_{-\infty}^{+\infty}-c^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\frac{\partial^2\omega(x,t)}{\partial x^2}dx$$

و باستعمال الشروط الحدية $(4.4.3)_4$ نجد: $\left[c^2\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\right]_{-\infty}^{+\infty}=0$ ، ومنه فإن:

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt}&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-c^2\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\frac{\partial^2\omega(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\frac{\partial^2\omega(x,t)}{\partial t^2}\right]dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\left[\frac{\partial^2\omega(x,t)}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2\omega(x,t)}{\partial x^2}\right]dx\end{aligned}$$

و بما أن: $\frac{\partial^2\omega(x,t)}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2\omega(x,t)}{\partial x^2}=0$ فإن $\frac{dE(t)}{dt}=0$ ، ومنه $E(t)=k$ مع $k\in\mathbb{R}$. باستخدام الشروط الإبتدائية $(4.4.3)_2$ و $(4.4.3)_3$ يمكننا حساب k، فنجد:

$$E(0)=k=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[c^2\left(\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\right)^2\right]_{t=0}dx=0$$

وهذا يستلزم أنه من أجل كل $t\geq 0$ فإن: $E(t)=0$ أي أن: $E\equiv 0$ وهذا محقق فقط في حالة: $\frac{\partial\omega}{\partial t}\equiv 0$ و $\frac{\partial\omega}{\partial t}\equiv 0$ أي أنه يجب أن يكون $\omega\equiv k$ و بما أن $\omega(x,0)=0$ فإن $\omega\equiv 0$ وهو المطلوب إثباته.

مثال 1.4.4: لنثبت باستخدام طريقة تكامل الطاقة أن المسألة (4.4.4) تقبل حلا واحدا على الأكثر.

$$(4.4.4)\quad\begin{cases}v_{tt}(x,t)=9v_{xx}(x,t),\quad (0<x<a)\wedge(t<0) & (4.4.4)_1\\ v(x,0)=f(x),\quad v_t(x,0)=g(x),\quad 0\leq x\leq a & (4.4.4)_2\\ v(0,t)=h(t),\quad v(a,t)=k(t),\quad t\geq 0 & (4.4.4)_3\end{cases}$$

حل: بفرض أن u_1 و u_2 حلين للمسألة (4.4.4) فإن الدالة: $\omega = u_1 - u_2$ تحقق المسألة التالية:

$$(4.4.5)\quad \begin{cases} \omega_{tt}(x,t) = 9\omega_{xx}(x,t), \quad (0 < x < a) \wedge (t > 0) \quad (4.4.5)_1 \\ \omega(x,0) = 0, \quad \omega_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le a \quad (4.4.5)_2 \\ \omega(0,t) = \omega(a,t) = 0 \quad (4.4.5)_3 \end{cases}$$

بضرب المعادلة $(4.4.5)_1$ في ω_t وبالمكاملة على المجال $[0,a]$ نجد:

$$\int_0^a \omega_t(x,t)\omega_{tt}(x,t)dx = 9\int_0^a \omega_t(x,t)\omega_{xx}(x,t)dx$$

ومنه بالمكاملة بالتجزئة نجد:

$$\frac{1}{2}\int_0^a \left(\omega_t(x,t)\right)_t^2 dx = 9\left[\left[\omega_t(x,t)\omega_x(x,t)\right]_0^a - \int_0^a \omega_x(x,t)\left(\omega_t(x,t)\right)_x dx\right]$$

وباستعمال الشروط الحدية $(4.4.5)_3$ نجد:

$$\frac{1}{2}\int_0^a \left(\omega_t(x,t)\right)_t^2 dx = -9\int_0^a \omega_x(x,t)\left(\omega_x(x,t)\right)_t dx = -\frac{9}{2}\int_0^a \left(\omega_x(x,t)\right)_t^2 dx$$

وهذا ينتج عنه: $\frac{1}{2}\int_0^a \left[\left(\omega_t(x,t)\right)_t^2 + 9\left(\omega_x(x,t)\right)_t^2\right]dx = 0$، ومنه $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^a \left[\omega_t^2(x,t) + 9\omega_x^2(x,t)\right]dx\right) = 0$

إذن: $\int_0^a \left[\omega_t^2(x,t) + 9\omega_x^2(x,t)\right]dx = C^{ste}$، وبما أنه لدينا: $\int_0^a \left[\omega_t^2(x,0) + 9\omega_x^2(x,0)\right]dx = 0$ فإن:

$\omega_t^2 + 9\omega_x^2 = 0$، ومنه فإن: $\omega_t = \omega_x = 0$، وبالتالي: $\omega = C^{ste}$ وبما أن: $\omega(0,t) = \omega(a,t) = 0$ فإن

$\omega \equiv 0$ و $u_1 \equiv u_2$، وهو ما يثبت أن المسألة (4.4.4) تقبل حلا واحدا على الأكثر.

تمارين مقترحة على الفصل الرابع

التمرين الأول:

عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة:

$(x,y)\mapsto u(x,y)=f(ax+by)$ – مع f قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ –

حلا لكل معادلة من المعادلتين (E_1) و (E_2)، حيث:

$$(E_1):\quad u_x(x,y)+u_y(x,y)=0$$
$$(E_2):\quad 3u_x(x,y)-5u_y(x,y)=0$$

التمرين الثاني:

1. جد حل المسألة التالية:

$$(P_1):\quad \begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}, & (l<0<x)\wedge(t>0) \\ u(x,0)=f(x), \quad u_t(x,0)=0, & 0\le x\le l \\ u(0,t)=T_1, \quad u(l,t)=T_2, & t\ge 0 \end{cases}$$

على الشكل التالي:

$$\varphi(x,t)=u(x,t)-T_1+\frac{x}{l}(T_1-T_2)$$

2. باستعمال طريقة فصل المتغيرات. جد حل المسألة التالية:

$$(P_2):\quad \begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}, & (l<0<x)\wedge(t>0) \\ u(x,0)=f(x), \quad u_t(x,0)=0, & 0\le x\le l \\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\ge 0 \end{cases}$$

التمرين الثالث:

باستعمال تحويل لابلاس. جد حل كلا من المسألتين التاليتين:

$$(P_3):\quad \begin{cases} u_t+u_x=0, & (0<x)\wedge(t>0) \\ u(0,t)=u(x,0)=0, & (0\le x)\wedge(t\ge 0) \end{cases}$$

$$(P_4):\quad \begin{cases} u_t=u_{xx}, & (0<x<2)\wedge(t>0) \\ u(0,t)=u(2,t)=0, & (t\ge 0) \\ u(x,0)=3\sin(2\pi x), & (0\le x\le 2) \end{cases}$$

الفصل الخامس

طريقة الفروق المنتهية لحل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية

محتوى الفصل

1.5 المبدأ العام لطريقة الفروق المنتهية

1.1.5 المبدأ العام ومخططات الفروق المنتهية من الرتبة الاولى

طريقة الفروق المنتهية تعتمد أساسا على تقريب المشتقات الموجودة في المسائل التفاضلية. في هذه الطريقة نقسم نطاق حل المسألة التفاضلية على شكل شبكة ثم نقوم بتقريب المشتقات التي تظهر في المسألة التفاضلية عند كل نقطة من الشبكة فنحصل على جملة معادلات متقطعة تسمح لنا بتقديم قيم تقريبية لحل المسألة التفاضلية عند كل نقطة. ترتكز إذن طريقة الفروق المنتهية على الخطوتين التاليتين:

الخطوة الأولى: تقسيم نطاق الدراسة (أو الحل) للمسألة التفاضلية.

نفرض أن الدالة $u:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ هي الحل لمسألة تفاضلية ونريد حسابه على المجال $[a,b]$. من أجل ذلك نقسم نطاق الحل $[a,b]$ بتكوين شبكة مكونة من $(n+1)$ نقطة x_i معرفة كمايلي:

$$h=\frac{b-a}{n} \quad \text{و} \quad x_i=a+ih,\quad i=0,1,...,n$$

ونقوم بحساب قيمة $u(x)$ عند كل نقطة x_i حيث $i=0,1,...,n$. النقط x_i تسمى عقد الشبكة.

إذاكان الحل u بمتغيرين أي $u:\ [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$، نقسم نطاق الحل $[a,b]\times[c,d]$ بتكوين شبكة مكونة من $(n+1)(m+1)$ نقطة (x_i,y_j) معرفة كما يلي:

$$x_i=a+ih,\quad i=0,1,...,n \quad \text{و} \quad y_j=c+jk,\quad j=0,1,...,m \quad \text{مع} \quad h=\Delta x=\frac{b-a}{n} \quad \text{و} \quad k=\Delta y=\frac{d-c}{m}.$$

النقط (x_i,y_j) حيث $i=0,1,...,n$ و $j=0,1,...,m$ تسمى عقد الشبكة. بنفس الطريقة يمكننا تقسيم نطاق الحل في حالة البعد الثالث وكذلك في حالة أبعاد أكبر.

الخطوة الثانية: تقريب المشتقات التي تظهر في المعادلات التفاضلية عند كل عقدة.

نقوم بتقريب المشتقات التي تظهر في المعادلات التفاضلية وذلك باستعمال نشر تايلور.

حالة البعد1. من أجل كل $x_i\in[a,b]$ بحيث $(x_i\pm h)\in[a,b]$، فإن نشر تايلور "Taylor" لـ $u(x_i\pm h)$ في جوار x_i ينتج عنه:

$$u(x_i\pm h)=u(x_i)\pm hu'(x_i)+0(h^2) \qquad (5.1.1)$$

باستعمال (5.1.1) نجد:

$$u'(x_i)=\frac{u(x_i\pm h)-u(x_i)}{\pm h}+0(h)$$

نحصل إذن على تقريب من الرتبة الأولى للمشتقة الأولى $u'(x_i)$. هذا التقريب هو من الرتبة الأولى لأن أس الـ h في خطأ الإقتطاع $0(h)$ يساوي الواحد ويؤول إلى الصفر لما h يؤول إلى الصفر.

حالة البعد 2 فما أكبر. من أجل كل $(x_i,y_j)\in[a,b]\times[c,d]$ بحيث $(x_i\pm h,y_j\pm k)\in[a,b]\times[c,d]$، فإن نشر تايلور لـ $u(x_i\pm h,y_j)$ و $u(x_i,y_j\pm k)$ في جوار (x_i,y_j) ينتج عنه:

$$u(x_i \pm h, y_j) = u(x_i, y_j) \pm h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + 0(h^2) \qquad (5.1.2)$$
$$u(x_i, y_j \pm k) = u(x_i, y_j) \pm k\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) + 0(k^2) \qquad (5.1.3)$$

باستعمال (5.1.2) و (5.1.3) نجد:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i \pm h, y_j) - u(x_i, y_j)}{\pm h} + 0(h)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j \pm k) - u(x_i, y_j)}{\pm k} + 0(k)$$

نحصل إذن على تقريب من الرتبة الأولى لكل من المشتقات الأولى $\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)$ و $\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j)$.

بنفس الطريقة يمكننا الحصول على تقريبات للمشتقات من الرتبة الأولى في حالة البعد الثالث وكذلك في حالة أبعاد أكبر.

ترميزات: نرمز بـ u_i للقيمة المتقطعة لـ u في النقطة x_i أي $u_i = u(x_i)$ ونرمز بـ u'_i للقيمة المتقطعة للمشتق u' في النقطة x_i أي $u'_i = u'(x_i)$. نرمز بـ $u_{i,j}$ للقيمة المتقطعة لـ u في النقطة (x_i, y_j) أي $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ ونرمز بـ $\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x}$ للقيمة المتقطعة للمشتق الجزئي $\frac{\partial u}{\partial x}$ في النقطة (x_i, y_j) أي $\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)$ وبالمثل $\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j)$.

لنفرض أن $u \in C^1([a,b])$. من أجل كل $x_i \in [a,b]$ بحيث $(x_i \pm h) \in [a,b]$، لدينا:

$$u_{i+1} = u(x_i + h) = u_i + hu'_i + 0(h^2) \qquad (5.1.4)$$
$$u_{i-1} = u(x_i - h) = u_i - hu'_i + 0(h^2) \qquad (5.1.5)$$

من (5.1.4) نحصل على فرق أمامي من الرتبة الأولى للمشتق الأول معرف كمايلي:

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + 0(h)$$

ومن (5.1.5) نحصل على فرق خلفي من الرتبة الأولى للمشتق الأول معرف كمايلي:

$$u'_i = \frac{u_{i-1} - u_i}{h} + 0(h)$$

- مخطط الفروق المنتهية الأمامية من الرتبة الأولى يكتب إذن من الشكل:

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + 0(h)$$

- مخطط الفروق المنتهية الخلفية من الرتبة الأولى يكتب إذن من الشكل:

$$u_i' = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + 0(h)$$

2.1.5 مخطط الفروق المنتهية من رتب أعلى

لنفرض أن $u \in C^3([a,b])$. من أجل كل $x_i \in [a,b]$ بحيث $(x_i \pm h) \in [a,b]$، لدينا:

$$u_{i+1} = u(x_i+h) = u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2!}u_i'' + \frac{h^3}{3!}u_i''' + 0(h^4) \qquad (5.1.6)$$

$$u_{i-1} = u(x_i-h) = u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2!}u_i'' - \frac{h^3}{3!}u_i''' + 0(h^4) \qquad (5.1.7)$$

بطرح (5.1.6) من (5.1.7) نحصل على فرق مركزي من الرتبة الثانية للمشتق الأول معرف كما يلي:

$$u_i' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + 0(h^2)$$

وبجمع (5.1.6) و (5.1.7) نحصل على فرق مركزي من الرتبة الثانية للمشتق الثاني معرف كما يلي:

$$u_i''(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + 0(h^2)$$

يمكن كذلك تعريف الفروق الأمامية وكذلك الخلفية للمشتق الثاني من الرتبة الأولى، ونكتب:

$$u_i'' = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{h^2} + 0(h) \qquad u_i'' = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_{i-1}}{h^2} + 0(h)$$

2.5 تطبيق طريقة الفروق المنتهية على بعض المسائل بمعادلات تفاضلية عادية

1.2.5 تطبيق الفروق المنتهية على مسألة ديريكلي

نعتبر المسألة التالية:

$$(5.2.1): \quad \begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in]0,1[\\ u(0) = \alpha, & u(1) = \beta \end{cases}$$

حيث f دالة مستمرة على المجال $]0,1[$.

المرحلة 1: نقسم مجال الحل $[0,1]$ بتكوين شبكة مكونة من $(n+1)$ نقطة x_i $(i = 0,1,\ldots,n)$ كمايلي:

$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ مع $x_i = x_0 + ih$ و $h = \frac{1}{n}$.

إذن بدل المسألة (5.2.1)، نعتبر المسألة المتقطعة التالية:

$$(5.2.2):\quad \begin{cases} -u_i'' = f(x_i), & x_i \in]0,1[\\ u_0 = \alpha, & u_n = \beta. \end{cases}$$

المرحلة 2: نبني مخططا عدديا إعتمادا على الفرق المركزي من الرتبة الثانية للمشتق الثاني المعرف كما يلي:

$$u_i'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + 0\left(h^2\right)$$

فنحصل إنطلاقا من المسألة (5.2.2) على المسألة (5.2.3) المعرفة بالشكل التالي:

$$(5.2.3):\quad \begin{cases} -u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} = h^2 f(x_i), & i = 1, 2, \dots, (n-1) \\ u_0 = \alpha, & u_n = \beta. \end{cases}$$

المرحلة 3: لنحاول كتابة المسألة (5.2.3) على شكل مسألة مصفوفاتية:

من أجل $i=1$ لدينا: $-u_2 + 2u_1 - u_0 = h^2 f(x_1)$ أي $-u_2 + 2u_1 = \alpha + h^2 f(x_1)$

من أجل $i=2$ لدينا: $-u_3 + 2u_2 - u_1 = h^2 f(x_2)$

من أجل $i=n-1$ لدينا: $-u_n + 2u_{n-1} - u_{n-2} = h^2 f(x_{n-1})$ أي $2u_{n-1} - u_{n-2} = \beta + h^2 f(x_{n-1})$.

يمكننا إذن كتابة المسألة (5.2.3) على الشكل المصفوفاتي: $AU = B$ حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots \\ \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ و } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{N-1} \end{pmatrix} \text{ ، } B = \begin{pmatrix} \alpha + h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \dots \\ \beta + h^2 f(x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

بحل جملة المعادلات الجبرية $AU = B$ نحصل إذن على حل تقريبي للمسألة التفاضلية (5.2.1) .

2.2.5 تطبيق طريقة الفروق المنتهية على المسألة المختلطة: مسألة ديريكلي– نيومان

نعتبر المسألة التالية:

$$(5.2.4):\quad \begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in]0,1[\\ u(0) = \alpha, & u'(1) = \beta. \end{cases}$$

إعتمادا على الفرق الأمامي من الرتبة الأولى للمشتق الأول نجد:

$$u'(1)=\frac{u_n-u_{n-1}}{h}+0(h)\Leftrightarrow u_n=u_{n-1}+h\beta-0(h)$$

ومنه فإن المسألة (5.2.4) يمكن كتابتها على الشكل المتقطع كما يلي:

$$(5.2.5):\quad \begin{cases}-u_{i+1}+2u_i-u_{i-1}=h^2f(x_i), & i=1,2,...,(n-1)\\ u_0=\alpha, \quad u_n-u_{n-1}=h\beta.\end{cases}$$

لنحاول الآن كتابة المسألة (5.2.5) على شكل مسألة مصفوفاتية:

من أجل $i=1$ لدينا: $-u_2+2u_1-u_0=h^2f(x_1)$ أي $-u_2+2u_1=\alpha+h^2f(x_1)$

من أجل $i=2$ لدينا: $-u_3+2u_2-u_1=h^2f(x_2)$

من أجل $i=n-1$ لدينا: $-u_n+2u_{n-1}-u_{n-2}=h^2f(x_{n-1})$

من أجل $i=n$ لدينا: $u_n-u_{n-1}=h\beta$

يمكننا إذن كتابة المسألة (5.2.5) على الشكل المصفوفاتي: $AU=B$ حيث:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&...&0\\-1&2&-1&...\\...&-1&2&-1\\0&...&-1&1\end{pmatrix} \text{ و } U=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\...\\u_n\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\alpha+h^2f(x_1)\\h^2f(x_2)\\...\\h\beta\end{pmatrix}$$

بحل جملة المعادلات الجبرية $AU=B$ نحصل إذن على حل تقريبي للمسألة التفاضلية (5.2.4).

3.5 تطبيق طريقة الفروق المنتهية على بعض المسائل بمعادلات تفاضلية جزئية

1.3.5 تطبيق طريقة الفروق على مسألة الحرارة في البعد 1

نعتبر المسألة التالية:

$$(5.3.1):\quad \begin{cases}u_t=au_{xx}, & t>0, \quad 0<x<1\\ u(x,0)=\varphi(x), & 0<x<1\\ u(0,t)=0, \quad u(1,t)=0, & t>0\end{cases}$$

نقسم المجال $[0,1]$ الى $(n+1)$ عقدة معرفة كما يلي:

$x_i = ih$ حيث $i = 0,1,...,n$ و h هي خطوة التقسيم المعطاة بـ: $h = \frac{1}{n}$.

ونقسم مجال الزمن إلى مجالات ذات خطوة زمنية ثابتة ولتكن k كالتالي:

نأخذ $t_j = jk$ حيث $j = 0,1,...$ ونرمز بـ $u_{i,n}$ إلى الحرارة في العقدة $x_i = ih$ وفي اللحظة الزمنية $t = nk$. يمكننا إستعمال مقاربتين لكتابة المسألة (5.3.1) في شكلها المتقطع، المقاربة الأولى صريحة حيث تعتمد التقسيم في العقدة x_i وفي اللحظة $t = nk$ أما الثانية فهي ضمنية وتعتمد التقسيم في العقدة x_i وفي اللحظة $t = (n+1)k$.

1.1.3.5 مخطط الفوارق المنتهية الصريح. الفروق المنتهية الأمامية من الرتبة الأولى لـ $u_t(x_i,t_j)$ تكتب على الشكل:

$$u_t(x_i,t_j) = \frac{u_{i,1+j} - u_{i,j}}{k} + 0(k) \qquad (5.3.2)$$

والفرق المركزي من الرتبة الثانية للمشتق الثاني يكتب على الشكل:

$$u_{xx}(x_i,t_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + 0\left(h^2\right) \qquad (5.3.3)$$

بوضع: $\lambda = a\frac{k}{h^2}$ وبتعويض كلا من (5.3.2) و (5.3.3) في المسألة (5.3.1) نحصل على المخطط العددي الصريح التالي:

$$(5.3.4): \quad \begin{cases} u_{i,1+j} = \lambda u_{i-1,j} + (1-2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i+1,j}, \quad (i=1,2,...,n)\wedge(j=0,1,...) \qquad (5.3.4)_1 \\ u(x_i,0) = u_{i,0} = \varphi(x_i) = \varphi_i, \quad i = 0,1,...,n \qquad (5.3.4)_2 \\ u(0,t_j) = u_{0,j} = 0, \quad u(1,t_j) = u_{n+1,j} = 0, \quad j = 0,1,... \qquad (5.3.4)_3 \end{cases}$$

الكتابة المصفوفاتية للمعادلة $(5.3.4)_1$ تكون على النحو التالي:

من أجل $i=1$ لدينا: $u_{1,1+j} = \lambda u_{0,j} + (1-2\lambda)u_{1,j} + \lambda u_{2,j}$

من أجل $i=2$ لدينا: $u_{2,1+j} = \lambda u_{1,j} + (1-2\lambda)u_{2,j} + \lambda u_{3,j}$

من أجل $i=n$ لدينا: $u_{n,1+j} = \lambda u_{n-1,j} + (1-2\lambda)u_{n,j} + \lambda u_{n+1,j}$

ومنه بوضع:

$$A=\begin{pmatrix}1-2\lambda & \lambda & \dots & 0\\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \dots\\ \dots & \lambda & 1-2\lambda & \lambda\\ 0 & \dots & \lambda & 1-2\lambda\end{pmatrix} \text{ و } U^{(j)}=\begin{pmatrix}u_{1,j}\\ u_{2,j}\\ \dots\\ u_{n,j}\end{pmatrix}$$

نحصل على الجملة المصفوفاتية التالية:

$$U^{(j+1)}=AU^{(j)},\quad j=0,1,\dots \quad \text{حيث :}\quad U^{(0)}=\begin{pmatrix}u_{1,0}\\ u_{2,0}\\ \dots\\ u_{n,0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi(x_1)\\ \varphi(x_2)\\ \dots\\ \varphi(x_n)\end{pmatrix}$$

بحل جمل المعادلات الجبرية $U^{(j+1)}=AU^{(j)},\quad j=0,1,\dots$ نحصل إذن على حل تقريبي للمسألة (5.3.1) .

2.1.3.5 مخطط الفوارق المنتهية الضمني. الفروق المنتهية الخلفية من الرتبة الأولى لـ $u_t(x_i,t_{j+1})$ تكتب على الشكل:

$$u_t(x_i,t_{j+1})=\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}+0(k) \qquad (5.3.5)$$

والفرق المركزي من الرتبة الثانية لـ $u_{xx}(x_i,t_{j+1})$ يكتب على الشكل:

$$u_{xx}(x_i,t_{j+1})=\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2}+0(h^2) \qquad (5.3.6)$$

بتعويض كلا من (5.3.5) و (5.3.6) في المسألة (5.3.1) وبوضع $\lambda=a\dfrac{k}{h^2}$ نحصل من المسألة (5.3.1) على المخطط العددي الضمني التالي:

$$(5.3.7):\quad \begin{cases}-\lambda u_{i-1,j+1}+\left(1+2\lambda\right)u_{i,j+1}-\lambda u_{i+1,j+1}=u_{i,j}\,,\quad (i=1,2,\dots,n)\wedge(j=0,1,\dots) \qquad (5.3.7)_1\\ u(x_i,0)=u_{i,0}=\varphi(x_i)=\varphi_i\,,\quad i=1,2,\dots,n \qquad (5.3.7)_2\\ u(0,t_j)=u_{0,j}=0,\quad u(1,t_j)=u_{n+1,j}=0,\quad j=0,1,\dots \qquad (5.3.7)_3\end{cases}$$

الكتابة المصفوفاتية للمعادلة $(5.3.7)_1$ تكون على النحو التالي:

من أجل $i=1$ يكون لدينا: $-\lambda u_{0,j+1}+\left(1+2\lambda\right)u_{1,j+1}-\lambda u_{2,j+2}=u_{1,j}$

من أجل $i=2$ يكون لدينا: $-\lambda u_{1,j+1}+(1+2\lambda)u_{2,j+1}-\lambda u_{3,j+1}=u_{2,j}$

من أجل $i=n-1$ يكون لدينا: $-\lambda u_{n-2,j+1}+(1+2\lambda)u_{n-1,j+1}-\lambda u_{n,j+1}=u_{n-1,j}$

من أجل $i=n$ يكون لدينا: $-\lambda u_{n-1,j+1}+(1+2\lambda)u_{n,j+1}-\lambda u_{n+1,j+1}=u_{n,j}$

ومنه بوضع:

$$A=\begin{pmatrix}1+2\lambda & -\lambda & \dots & 0\\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \dots\\ \dots & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda\\ 0 & \dots & -\lambda & 1+2\lambda\end{pmatrix} \text{ و } U^{(j)}=\begin{pmatrix}u_{1,j}\\ u_{2,j}\\ \dots\\ u_{n,j}\end{pmatrix}$$

نحصل على الجملة المصفوفاتية التالية:

$$U^{(j)}=AU^{(j+1)},\quad j=0,1,2,\dots \quad \text{حيث:} \quad U^{(0)}=\begin{pmatrix}u_{1,0}\\ u_{2,0}\\ \dots\\ u_{n,0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi(x_1)\\ \varphi(x_2)\\ \dots\\ \varphi(x_n)\end{pmatrix}$$

بحل جمل المعادلات الجبرية $U^{(j)}=AU^{(j+1)},\quad j=0,1,\dots$ نحصل إذن على حل تقريبي للمسألة (5.3.1).

مثال 1.3.5: نعتبر المسألة التفاضلية التالية:

$$(5.3.8):\quad \begin{cases}u_t=u_{xx}, & t>0,\quad 0<x<1\\ u(x,0)=\sin\pi x, & 0<x<1\\ u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0, & t>0\end{cases}$$

ولنأخذ $h=\frac{1}{3}$ و $\lambda=\frac{1}{2}$. باستعمال (5.3.4) فإن المخطط العددي الصريح لـ (5.3.8) يكون كالتالي:

$$(5.3.9):\quad \begin{cases}u_{i,1+j}=\lambda u_{i-1,j}+(1-2\lambda)u_{i,j}+\lambda u_{i+1,j}, & (i=1,2,\dots,n)\wedge(j=0,1,\dots) \quad (5.3.9)_1\\ u(x_i,0)=u_{i,0}=\varphi(x_i)=\varphi_i, \quad i=1,2 & (5.3.9)_2\\ u(0,t_j)=u_{0,j}=0,\quad u(1,t_j)=u_{n+1,j}=0,\quad j=0,1,\dots & (5.3.9)_3\end{cases}$$

بما أن $h=\frac{1}{3}$ و $\lambda=\frac{1}{2}$ فإن $n=2$ و $1-2\lambda=0$، ومنه من المعادلة $(5.3.9)_1$ يكون لدينا:

$$u_{i,1+j}=\lambda u_{i-1,j}+\lambda u_{i+1,j},\quad (i=1,2)\wedge(j=0,1,\dots)$$

ومن الشرط الحدودي $(5.3.9)_2$ يكون لدينا: $u(x_i,0)=u_{i,0}=\sin \pi x_i=\sin\frac{i\pi}{3}$

3	2	1	0	i
0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\sin\frac{i\pi}{3}$

ومنه نجد:

من أجل $i=1$ و $j=0$ يكون لدينا: $u_{1,1}=\frac{1}{2}u_{0,0}+\frac{1}{2}u_{2,0}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

من أجل $i=2$ و $j=0$ يكون لدينا: $u_{2,1}=\frac{1}{2}u_{1,0}+\frac{1}{2}u_{3,0}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

فيما يلي نريد حساب كلا من $u(\frac{1}{3},\frac{1}{18})$ و $u(\frac{1}{3},\frac{1}{9})$ باستعمال مخطط الفروق المنتهية الضمني أي المخطط (5.3.7) . لدينا:

$$\lambda=a\frac{k}{h^2}\Leftrightarrow k=\lambda\frac{h^2}{a}\Leftrightarrow k=\frac{1}{18}$$

كذلك

$$h=\frac{1}{3}\Leftrightarrow n=2 \text{ و } \lambda=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\lambda+1=2$$

ومنه نجد:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 2\end{pmatrix} \text{ و } U^{(1)}=\begin{pmatrix}u_{1,1}\\ u_{2,1}\end{pmatrix} \text{ ،} U^{(0)}=\begin{pmatrix}u_{1,0}\\ u_{2,0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

لدينا إذن:

$$U^{(0)}=AU^{(1)}\Leftrightarrow\begin{cases}2u_{1,1}-\frac{1}{2}u_{2,1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}u_{1,1}+2u_{2,1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\left(u_{1,1}=u_{2,1}=\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

بالمثل

$$U^{(1)}=AU^{(2)}\Leftrightarrow\begin{cases}2u_{1,2}-\frac{1}{2}u_{2,2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ -\frac{1}{2}u_{1,2}+2u_{2,2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left(u_{1,2}=u_{2,2}=\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$$

2.3.5 تطبيق طريقة الفروق المنتهية على مسألة لابلاس في البعد 2

على النطاق $\Omega=[0,a]\times[0,b]$، نعتبر المسألة التالية:

$$(5.3.10):\quad \begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & (x,y)\in\,]0,a[\times]0,b[\\ u(x,0)=u_b\,,\quad u(x,b)=u_h\,, & x\in\,]0,a[\\ u(0,y)=u_g\,,\quad u(a,y)=u_d\,, & y\in\,]0,b[\end{cases}$$

نقسم النطاق $\Omega=[0,a]\times[0,b]$ إلى $(n+1)(m+1)$ نقطة (عقدة) كما يلي:

نأخذ: $x_i=ih$ مع $i=0,1,\ldots,(n+1)$ و $y_j=jk$ مع $j=0,1,\ldots,(m+1)$ حيث h و k هما خطوتا التقسيم المعرفين بالعلاقتين التاليتين: $h=\dfrac{a}{n+1}$ و $k=\dfrac{b}{m+1}$. لدينا:

$$u_{yy}(x_i,y_j)=\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{k^2}+0(k^2) \text{ و } u_{xx}(x_i,y_j)=\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+0(h^2)$$

ومنه نحصل على المسألة المتقطعة التالية:

$$(5.3.11):\quad \begin{cases} (1/h^2)\left(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}\right)-\left((2/h^2)+(2/k^2)\right)u_{i,j} \\ \qquad +(1/k^2)\left(u_{i,j+1}+u_{i,j-1}\right)=0, \quad (i=1,\ldots,n)\wedge(j=1,\ldots,m) \\ u_{0,j}=u_g\,,\quad u_{n+1,j}=u_d\,,\quad j=0,1,\ldots,(m+1) \\ u_{i,0}=u_b\,,\quad u_{i,m+1}=u_h\,,\quad i=0,1,\ldots,(n+1) \end{cases}$$

المخطط العددي يكتب على الشكل المصفوفاتي التالي: $AU=F$ حيث A هي المصفوفة من الرتبة $m\times n$ المعرفة بـ:

$$A=\begin{pmatrix} B & C & \ldots & 0 \\ C & B & C & \ldots \\ \ldots & C & B & C \\ 0 & \ldots & C & B \end{pmatrix}$$

حيث C هي المصفوفة المعرفة بـ:

$$C=\begin{pmatrix} (1/k^2) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (1/k^2) & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & (1/k^2) & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & (1/k^2) \end{pmatrix}$$

و B هي المصفوفة المعرفة بـ:

$$B=\begin{pmatrix} -\left((2/h^2)+(2/k^2)\right) & (1/h^2) & \dots & 0 \\ (1/k^2) & -\left((2/h^2)+(2/k^2)\right) & (1/h^2) & \dots \\ \dots & (1/k^2) & -\left((2/h^2)+(2/k^2)\right) & (1/h^2) \\ 0 & \dots & (1/k^2) & -\left((2/h^2)+(2/k^2)\right) \end{pmatrix}$$

و F و U هما الشعاعان المعرفان كمايلي:

$U=\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \\ U_m \end{pmatrix}$ و $F=\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \\ F_m \end{pmatrix}$ حيث من أجل كل $1\leq j\leq m$ لدينا: $U_j=\begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \\ u_{n,j} \end{pmatrix}$ و $F_j=\begin{pmatrix} f_{1,j} \\ f_{2,j} \\ \\ f_{n,j} \end{pmatrix}$.

مثال 2.3.5: في هذا المثال وللتبسيط نأخذ: $a=b=1$ ، $n=m=3$ و $u_g=u_d=u_b=u_h=0$. المسألة المتقطعة (5.3.11) تصبح:

$$(5.3.12):\quad \begin{cases} 4u_{i,j}-u_{i-1,j}-u_{i+1,j}-u_{i,j-1}-u_{i,j+1}=h^2 f_{i,j}, & (i=1,\dots,3)\wedge(j=1,\dots,3) \\ u_{0,j}=0,\quad u_{n+1,j}=0, & j=0,1,\dots,4 \\ u_{i,0}=0,\quad u_{i,m+1}=0, & i=0,1,\dots,4 \end{cases}$$

يمكن كتابة المسألة المتقطعة (5.3.12) على الشكل المصفوفاتي على النحو التالي:

نثبت قيمة i عند 1 أي نضع $i=1$:

من أجل $j=1$ يكون لدينا: $4u_{1,1}-u_{0,1}-u_{2,1}-u_{1,0}-u_{1,2}=h^2 f_{1,1}$

من أجل $j=2$ يكون لدينا: $4u_{1,2}-u_{0,2}-u_{2,2}-u_{1,1}-u_{1,3}=h^2 f_{1,2}$

من أجل $j=3$ يكون لدينا: $4u_{1,3}-u_{0,3}-u_{2,3}-u_{1,2}-u_{1,4}=h^2 f_{1,3}$

نثبت قيمة i عند 2 أي نضع $i=2$:

من أجل $j=1$ يكون لدينا: $4u_{2,1}-u_{1,1}-u_{3,1}-u_{2,0}-u_{2,2}=h^2 f_{2,1}$

من أجل $j=2$ يكون لدينا: $4u_{2,2}-u_{1,2}-u_{3,2}-u_{2,1}-u_{2,3}=h^2 f_{2,2}$

من أجل $j=3$ يكون لدينا: $4u_{2,3}-u_{1,3}-u_{3,3}-u_{2,2}-u_{2,4}=h^2 f_{2,3}$

نثبت قيمة i عند 3 أي نضع $i=3$:

من أجل $j=1$ يكون لدينا: $4u_{3,1}-u_{2,1}-u_{4,1}-u_{3,0}-u_{3,2}=h^2 f_{3,1}$

من أجل $j=2$ يكون لدينا: $4u_{3,2}-u_{2,2}-u_{4,2}-u_{3,1}-u_{3,3}=h^2 f_{3,2}$

من أجل $j=3$ يكون لدينا: $4u_{3,3}-u_{2,3}-u_{4,3}-u_{3,2}-u_{3,4}=h^2 f_{3,3}$

نحصل إذن على الجملة المصفوفاتية التالية: $AU=F$ حيث:

$$A=\begin{pmatrix} B & C & 0 \\ C & B & C \\ 0 & C & B \end{pmatrix}،\quad U=\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \text{ و } U_j=\begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ u_{3,j} \end{pmatrix} \text{ من أجل كل } 1\le j\le 3$$

مع B و C هما المصفوفتان المعرفتان بـ:

$$B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ و } C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ملاحظة: يكون مخطط الفروق المنتهية لمسألة تفاضلية ما متقاربا إذا كان الفرق بين الحل الدقيق لهذه المسألة في شكلها المستمر والحل الدقيق لها في شكلها المتقطع يؤول إلى الصفر لما خطوة (خطوات) التقسيم تؤول الى الصفر.

تمرين تطبيقي: نعتبر المسألة التفاضلية التالية:

$$(5.3.12):\quad \begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0,\quad (x,y)\in]0,1[\times]0,1[& (5.3.12)_1 \\ u(0,y)=-y,\quad u(a,y)=2-y,\quad y\in]0,1[& (5.3.12)_2 \\ (u(x,0)=2x)\wedge(u(x,1)=2x-1),\quad x\in]0,1[& (5.3.12)_3 \end{cases}$$

1. عين العددين الحقيقين a و b بحيث تقبل المسألة (5.3.12) حلا دقيقا من الشكل: $u=u(x,y)=ax+by$.
2. بأخذ $n=3$ و $m=1$. جد حلا تقريبيا للمسألة (5.3.12).
3. قارن بين الحل الدقيق والحل التقريبي للمسألة (5.3.12).

حل التمرين التطبيقي

1) لنبحث عن حل دقيق للمسألة $(5.3.12)$ من الشكل: $u = u(x, y) = ax + by$. واضح أن u يحقق المعادلة $(5.3.12)_1$. يبقى تحديد الثابتين a و b بحيث يحقق الحل u الشروط الحدودية $((5.3.12)_2 - (5.3.12)_3)$. نعلم أن: $u = u(x, y) = ax + by$ حلا دقيقا لـ $(5.3.12)$ إذا حقق ما يلي:

$$\begin{cases} u(x,0) = ax = 2x \\ u(x,1) = ax + b = 2x - 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u(0,y) = by = -y \\ u(1,y) = a + by = 2 - y \end{cases}$$

نجد: $a = 2$ و $b = -1$ فيكون الحل الدقيق للمسألة $(5.3.12)$ من الشكل: $u = u(x, y) = 2x - y$.

2) بأخذ : $n = 3$ و $m = 1$ يكون لدينا: $h = \frac{1}{4}$ و $k = \frac{1}{2}$. نقسم المجال $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ كما يلي:

$x_i = ih$ مع $i \in \{0,1,2,3,4\}$ و $y_j = jk$ مع $j \in \{0,1,2\}$.

– **المسألة المتقطعة.** لدينا:

$$u_{xx}(x_i, y_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + 0(h^2) \quad \text{و} \quad u_{yy}(x_i, y_j) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + 0(k^2)$$

ومنه نحصل على المسألة المتقطعة التالية:

$$(5.3.13): \quad \begin{cases} -10u_{i,j} + 4\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) + \left(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right) = 0, \quad (i = 1,2,3), \quad (j = 1) \quad (5.3.13)_1 \\ u_{0,j} = -\frac{j}{2}, \quad u_{4,j} = 2 - \frac{j}{2}, \quad j = 0,1,2 \quad (5.3.13)_2 \\ u_{i,0} = \frac{i}{2}, \quad u_{i,2} = \frac{i}{2} - 1, \quad i = 0,1,2,3,4 \quad (5.3.13)_3 \end{cases}$$

من أجل $j = 1$ وبإستعمال المعادلة $(5.3.13)_1$ يكون لدينا ما يلي:

من أجل $i = 1$ يكون لدينا: $-10u_{1,1} + 4\left(u_{2,1} + u_{0,1}\right) + \left(u_{1,2} + u_{1,0}\right) = 0$

من أجل $i = 2$ يكون لدينا: $-10u_{2,1} + 4\left(u_{3,1} + u_{1,1}\right) + \left(u_{2,2} + u_{2,0}\right) = 0$

من أجل $i = 3$ يكون لدينا: $-10u_{3,1} + 4\left(u_{4,1} + u_{2,1}\right) + \left(u_{3,2} + u_{3,0}\right) = 0$

ومنه وبإستعمال الشروط الحدية $(5.3.13)_2$ و $(5.3.13)_3$ نحصل من المعادلات أعلاه على الجملة التالية:

$$(5.3.14): \quad \begin{cases} -10u_{1,1} + 4u_{2,1} = 2 \\ -10u_{2,1} + 4u_{1,1} + 4u_{3,1} = -1 \\ -10u_{3,1} + 4u_{2,1} = -8 \end{cases}$$

حل الجملة (5.3.14) يعطي الحل التقريبي للمسألة (5.3.12) والذي هو:

$$(u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}) = (0, \frac{1}{2}, 1)$$

3) المقارنة بين الحلين (الحل الدقيق والحل التقريبي). لدينا:

$$u(x_i, y_j) = 2x_i - y_j = 2ih - jk = \frac{1}{2}(i - j)$$

ومنه

(x_3, y_1)	(x_2, y_1)	(x_1, y_1)	(x_i, y_j)
1	0.5	0	الحل الدقيق
1	0.5	0	الحل التقريبي

تمارين مقترحة على الفصل الخامس

التمرين الأول: نعتبر المسألة التفاضلية التالية:

$$(P_1):\quad \begin{cases} -u''(x)+2u(x)=x, & x\in\left]0,1\right[\\ u'(1)+u(1)=0, & u(0)=1 \end{cases}$$

1. أكتب مخطط الفروق المنتهية للمسألة (P_1) في الحالة العامة (أي الحالة أين $h=\dfrac{1}{n+1}$ مع $n\geq 2$).
2. أكتب الشكل المصفوفاتي لمخطط الفروق المنتهية للمسألة (P_1).
3. بين أن الشكل المصفوفاتي لمخطط الفروق المنتهية للمسألة (P_1) يقبل حلا وحيدا.
4. تطبيق: من أجل $n=2$. أحسب الحل التقريبي للمسألة (P_1).

التمرين الثاني: نعتبر المسألتين التفاضليتين التاليتين:

$$(P_2):\quad \begin{cases} u_t(x,t)+u_x(x,t)-u_{xx}(x,t)=0, & (x,t)\in\left]0,1\right[\times\left]0,1\right[\\ u(x,0)=0, & 0\leq x\leq 1 \\ u(0,t)=u_x(1,t)=0, & 0\leq t\leq 1 \end{cases}$$

1. أكتب كلا من المخطط الصريح والمخطط الضمني للمسألة (P_2) وذلك من أجل:

   $h=\dfrac{1}{n+1}$ و $k=\dfrac{1}{m+1}$.
2. أكتب الشكل المصفوفاتي لكل من المخطط الصريح و المخطط الضمني للمسألة (P_2).
3. أحسب الحل التقريبي في حالة كل من المخطط الصريح و المخطط الضمني وذلك من أجل:

   $h=\dfrac{1}{4}$ و $k=\dfrac{1}{2}$ أي من أجل $n=3$ و $m=1$.

التمرين الثالث: نعتبر المسألة التفاضلية التالية:

$$(P_3):\quad \begin{cases} u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=x+y+1, & (x,y)\in\left]0,1\right[\times\left]0,1\right[\\ u(x,0)=u(x,1)=0, & x\in[0,1] \\ u(0,y)=u(1,y)=0, & y\in[0,1] \end{cases}$$

1. أحسب الحل التقريبي للمسألة (P_3) وذلك من أجل:

   $h=k=\dfrac{1}{3}$ أي من أجل $n=m=2$.

المراجع

I- المراجع باللغة العربية:

[1]. د. زيد الأمير، د. معروف بسوت لليش، د. محمد كردي؛ المعادلات التفاضلية الجزء الأول، كلية العلوم جامعة حلب، 2003.

[2]. د. حسن مصطفى العوضي، د. عبد الوهاب عباس رجب، د. سناء علي زارع؛ المعادلات التفاضلية الجزء الأول، دار الرشد، 2005.

[3]. د. حسن مصطفى العوضي، د. عبد الوهاب عباس رجب، د. سناء علي زارع؛ المعادلات التفاضلية الجزء الثاني، دار الرشد، 2005.

[4]. د. محمد بن عبد الرحمن القويز؛ الطرائق الرياضية في تحليل فوريير، مطابع جامعة الملك سعود، 1998.

[5]. د. عايش الهنادوة، د. إسماعيل بوقفة؛ المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات، جامعة العلوم والتكنولوجيا اليمنية، الطبعة الأولى، 1999.

[6]. د. أس. فارلو، ترجمة د. مها عواد الكبيسي؛ جامعة عمر المختار البيضاء، 2005.

[7]. أ. عبد الحفيظ مقران؛ دروس في المعادلات التفاضلية، قسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة، 1995.

II- المراجع باللغتين الفرنسية والإنجليزية:

[8]. C. Chicone; Ordinary Differential Equations with Applications, Springer, 1999.

[9]. E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner; Solving ordinary differential equations I, Nonstiff problems, Springer- Verlag., 1987.

[10]. P. Hartman; Ordinary differential equations, John Wiley & Sons, 1964.

[11]. R. Herbin; Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Université Aix- Marseille 1, 2012.

[12]. N. Piskounov; Calcul différentiel et intégral, Edition Mir, Moscow, 1972.

[13]. M. D. Raisinghania; Advanced differential equations, S. Chand and Company Ltd, India, 1991.

[14]. J. Massera, J. Schaffer; Linear Differential Equation and Functions spaces, New York, 1966.