الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة - بوسعادة
المجاهد الفريق أحمد قايد صالح
قسم: العلوم الدقيقة

Ecole Normale Supérieure
Bou-Saada
Dép. Sciences Exactes

2021/11/11

2021/10/26

دروس وتمارين في الجبر

المقياس: جبر 1.

المستوى: أولى جذع مشترك علوم دقيقة .

الأستاذ: زيان ابراهيم.

الرتبة: أستاذ محاضر قسم ب.

السنة الجامعية : 2020 - 2021

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة - بوسعادة
المجاهد الفريق أحمد قايد صالح
قسم: العلوم الدقيقة

Ecole Normale Supérieure
Bou-Saada
Dép. Sciences Exactes

دروس وتمارين في الجبر

المقياس: جبر 1.

المستوى: أولى جذع مشترك علوم دقيقة .

الأستاذ: زيان ابراهيم.

الرتبة: أستاذ محاضر قسم ب.

السنة الجامعية : 2020 - 2021

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and
Scientfiic Research

المدرسة العليا للأساتذة ببوسعادة
École normale supérieure de Bousaada

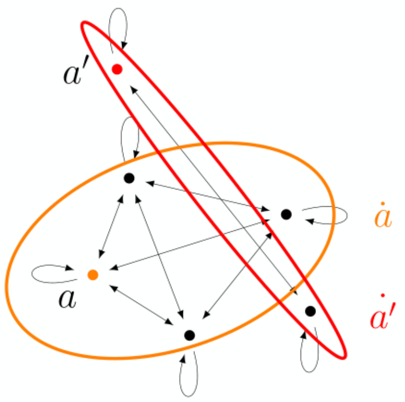
قسم العلوم الدقيقة

Department of
Exact Sciences

دروس وتمارين في الجبر

موجهة لطلبة السنة أولى جذع مشترك علوم دقيقة

من إعداد الأستاذ: زيان ابراهيم



السنة الجامعية : 2021 – 2022

الفهرس

مقدمة 1

الفَصل الأول: المنطق والبرهان الرياضي 3

1.1 القضية المنطقية "Assertions logique" 4

1.1.1 نفي قضية منطقية "Négation de assertions logique" 5

2.1 الروابط المنطقية "Connecteurs logiques" 5

1.2.1 الوصل "∧" "Conjunction" 5

2.2.1 الفصل "∨" "Disjunction" 6

3.2.1 الإستلزام " $\Longrightarrow$ " "L'implication" 6

4.2.1 التكافؤ " $\Longleftrightarrow$ " "L'équivalence" 7

5.2.1 قواعد الأسبقية (الأولوية) 7

3.1 خواص الروابط المنطقية 8

1.3.1 الجملة المفتوحة 10

4.1 البرهان الرياضي "Raisonnements Mathématique" 12

1.4.1 البرهان المباشر "Raisonnement direct" 12

2.4.1 البرهان بفصل الحالات "Raisonnements cas par cas" 13

3.4.1 البرهان بالعكس النقيض للإستلزام "Raisonnements par la contraposée" 13

4.4.1 البرهان بالخلف "Raisonnements par l'bsurde" 14

5.4.1 البرهان بمثال مضاد "Raisonnements par contre-exemple" 15

6.4.1 البرهان بالتراجع (بالتدريج) "Raisonnements par la Récurrence" 15

5.1 تمارين الفصل الأول 18

الفَصل الثاني: أوليات حول المجموعات 20

1.2 مفاهيم عامة 21

1.1.2 مفهوم الإحتواء (المجموعات الجزئية) 22

2.1.2 مفهوم المساواة (المجموعات المتساوية) 23

2.2 عمليات على المجموعات 23

1.2.2 التقاطع (المجموعات المتداخلة) 23

2.2.2 الإتحاد 24

3.2.2 الفرق بين مجموعتين 25

4.2.2 الفرق التناظري 25

5.2.2 العمليات على المجموعات 25

6.2.2 مجموعة أجزاء مجموعة 26
7.2.2 متممة مجموعة 27
8.2.2 خواص متممة مجموعة 27
9.2.2 تجزئة مجموعة 27
3.2 العلاقات 29
1.3.2 الجداء الديكارتي لمجموعتين 29
2.3.2 خواص الجداء الديكارتي لمجموعتين 30
3.3.2 العلاقة في مجموعة 30
4.3.2 العلاقة الثنائية 31
5.3.2 خواص العلاقة الثنائية 31
6.3.2 علاقة التكافؤ 34
7.3.2 أصناف التكافؤ 35
8.3.2 خواص اصناف التكافؤ 36
9.3.2 القسمة الاقليدية في $\mathbb{Z}$ 36
10.3.2 علاقة الترتيب 39
11.3.2 الترتيب الكلي والترتيب الجزئي 39
12.3.2 المجموعة المرتبة 40
13.3.2 مفهوم المجموعة المحدودة 40
14.3.2 الحد الأعلى sup 41
15.3.2 الحد الأدنى inf 42
16.3.2 العنصر الأكبر max 42
17.3.2 العنصر الأصغر min 42
4.2 تمارين الفصل الثاني 44

الفصل الثالث : التطبيقات 46
1.3 مفهوم التطبيق والدالة 47
2.3 تساوي تطبيقين 49
3.3 إقتصار وتمديد تطبيق 49
4.3 تركيب التطبيقات 50
5.3 الصورة المباشرة و الصورة العكسية 51
1.5.3 الصورة المباشرة 51
2.5.3 الصورة العكسية 52
6.3 تباين، غمر وتقابل تطبيق 53
1.6.3 التطبيق المتباين 54
2.6.3 التطبيق الغامر 55

3.6.3 التطبيق التقابلي 56
7.3 التطبيق العكسي لتطبيق تقابلي 58
1.7.3 المجموعات المنتهية 60
8.3 المجموعات المنتهية والتطبيقات 61
1.8.3 عدد التطبيقات 63
9.3 تمارين الفصل الثالث 65

الفصل الرابع: حول البنى الجبرية الأساسية 67
1.4 الزمرة 68
1.1.4 قواعد القوى والحساب في الزمرة 69
2.1.4 الزمرة الجزئية 71
2.4 الحلقة 75
1.2.4 قواعد الحساب في حلقة 77
2.2.4 الحلقة الجزئية 77
3.2.4 الحلقة التامة 78
4.2.4 مميزة حلقة 78
5.2.4 القسمة في حلقة 79
6.2.4 التفكيك في حلقة 79
7.2.4 المضاعفات والقواسم المشتركة 80
3.4 الحقل 81
1.3.4 الحقل الجزئي 82
4.4 تمارين الفصل الرابع 83

الفصل الخامس: حلقة كثيرات الحدود 85
1.5 بنية حلقة كثيرات الحدود والمفاهيم الأساسيّة 86
2.5 الشكل العام لكثيرات الحدود المعرفة في $\mathbb{A}[X]$ 88
3.5 درجة ومرتبة كثير حدود 89
4.5 العمليات على كثيري حدود 92
5.5 القسمة الاقليدية في $\mathbb{A}[X]$ 93
6.5 خوارزمية إقليدس (طريقة إقليدس) لإيجاد القاسم المشترك الأكبر 96
7.5 نظرية بيزوت 97
8.5 نظرية غوص 99
9.5 قسمة كثير حدود وفق القوى المتزايدة 99
10.5 إشتقاق كثيرات الحدود 101
11.5 مشتق كثير حدود 102

12.5 نشر تايلر 102
13.5 تمارين الفصل الخامس 105

الفصل السادس: جذور كثير حدود 107
1.6 جذور كثيرات الحدود 108
2.6 رتبة تضاعف جذر 109
3.6 رتبة تضاعف جذر ومشتقات كثير حدود 110
4.6 الحقل المغلق جبريا 112
5.6 كثيرات الحدود في $\mathbb{C}[X]$ 113
6.6 تمارين الفصل السادس 116

الفصل السابع: تفكيك الكسور الناطقة إلى عوامل بسيطة 117
1.7 بناء حقل الكسور الموافق لحلقة تامة 118
2.7 حقل الكسور $\mathbb{K}[X]$ على حقل تبديلي 118
3.7 تفكيك كسر ناطق إلى مجموع عوامل بسيطة 121
4.7 الجزء الرئيسي التابع لقطب كسر ناطق 122
5.7 التفكيك في $\mathbb{R}[X]$ 123
6.7 التفكيك في $\mathbb{C}(x)$ 126
7.7 تمارين الفصل السابع 129

قائمة المراجع 131

مقدمـــة

إن الفروع الأساسية في الرياضيات والتي من بينها الهندسة الرياضية ، التحليل الرياضي ، نظرية الأعداد التباديل والتوافيق هنالك فرع أخر يهتم بدراسة البنى الجبرية والتماثلات بينها، يسمي الجَبْرُ، وهو مفهوم أوسع وأشمل من الحساب و لا يتعامل مع الأرقام فقط، بل نتعامل مع الرموز والمتغيرات. ويصيغ النظريات والمسلمات والعلاقات التي بواسطتها يمكن تمثيل أي ظاهرة. ولذا يعتبر من الأساسيات التى تنظم طرق البرهان أو أنماط البرهان .

لقد تم إنجاز وإعداد هذه المطبوعة البيداغوجية الخاصة ببعض المفاهيم الأساسية حول الجبر بجمع وخلاصة سنوات من التدريس في مقياس " جبر " عبر مراحل متعاقبة فمن المدرسة التحضيرية للعلوم الاقتصادية بتلمسان الى قسم الرياضيات كلية الإعلام الآلي والرياضيات بالمسيلة مرورا بالمدرسة العليا للأساتذة ببوسعادة مرتكيز على بعض الأعمال السابقة في هذا الميدان من بينها [6, 5, 4, 3, 2, 1, 9, 8, 7].

وهدفنا هو لِنُطلع طالب العلوم الدقيقة بالمدارس العليا على بعض المفاهيم الجبرية اللازمة لدراسته اللاحقة وذلك دون إسراف في التعمق، ودون إجحاف بحقّ المقياس . هذا من ناحية ومن ناحية أخرى، نظمنا المطبوعة في سبع فصول.

فقد خصصنا الفصل الأول للمنطق والإستدلال الرياضي قدمنا من خلاله عرضا للمفاهيم الأساسية حول المنطق ليتسنى للطالب إعطاءه لمحة عنه و إكتسابه مهارات مختلفة في إستعمال أنماط البرهان وتطبيقاتها في باقي الفروع الرياضية.

أما بالنسبة للفصل الثاني فقد تم التطرق إلى أوليات حول المجموعات وعرضنا من خلاله العلاقة الوطيدة بنها وبين المنطق. كما عرجنا في هذا الفصل الى موضوع العلاقات وركزنا على علاقة الترتيب وعلاقة التكافؤ لما لهم منم أهمية في الجبر مدعمين ذلك بأمثلة بسيطة وسهلة تفي بالغرض.

كما قدمنا بعض المفاهيم المرجعية التى تحتاجها كثير من الفروع الرياضية في الفصل الثالث أسميناه التطبيقات.

وتناولنا في الفصل الرابع البنى الجبرية الأساسية منها: الزمرة، الحلقة والجسم .

و كتطبيق للمفاهيم الوارد في الفصل السابق نتناول حلقة كثيرات الحدود $\mathbb{K}[X]$. وتطرقنا فيه إلى إنشاء هذه الحلقة معتبرين أن $\mathbb{K}$ حقل تبديلي ، وعَرَّفنا تابع كثيرات الحدود الذي يعتبر أكثر تداوُلا وأهميةً في الرياضيات، ففي " النظرية الأساسية للجبر " مثلا هي نظرية عن كثيرات الحدود ذات معاملات حقيقية. أما في التحليل الرياضي، فتستعمل في حل العديد من مسائل الجبر كالبحث عن القيم الذاتية للمصفوفات و الحساب التقريبي للتوابع العددية و في نظريات الاستقطاب عن طريق كثيرات الحدود ... ألخ.

و تمهيدا لما سيأتي في الفصل الأخير عرجنا في الفصل السادس إلى جذور كثيرات الحدود في الحقلين $\mathbb{R}[X]$ و $\mathbb{C}[X]$.

وتطرقنا في هذا الفصل إلى تقنية هامة لبناء حقل الكسور الموافق لحلقة تامة. و تطبيقات تفكيك كسر ناطق إلى مجموع عوامل بسيطة من الحقل $\mathbb{K}[X]$ حيث $\mathbb{K}$ حقل تبديلي.

وأخيرًا، سوف تصحب في نهاية كل فصل بالعديد من التمارين التي نرى حلّ الطالب لها أمراً لا غنى عنه لضمان استيعابه للمقياس .

الفَصل الأول

المنطق والبرهان الرياضي

مُحتوى الفَصل

1.1 القضية المنطقية "Assertions logique" 4

2.1 الروابط المنطقية "Connecteurs logiques" 5

3.1 خواص الروابط المنطقية 8

4.1 البرهان الرياضي "Raisonnements Mathématique" 12

5.1 تمارين الفصل الأول 18


تم إعداد هذا الفصل إعتماداً على المراجع التالية: [6, 7, 1]

مقدمة

تدل لغويا كلمة المنطق (Logic) على الكلام أو النطق وهي اشتقاق للكلمة اليونانية لوغوس (Logos) والتي تعني العقل أو الفكر .
والمنطق الرياضي **Mathematical logic** هو العلم الذي يبحث في القواعد السليمة والصحيحة التي يتبعها العقل في التفكير والبرهان.

1.1 القضية المنطقية "Assertions logique"

تعريف 1.1.1:

1. نسمي قضية منطقية (قضية) كل جملة يمكن الحكم عليها بالصحة (الصدق) أو بالخطأ (الكذب) نرمز للقضية المنطقية بالرموز $P, Q, R, \ldots$.
2. وإذا كانت P قضية منطقية، فإننا نرفق كل قضية منطقية بقيمة إما **1** إذا كانت صادقة أو **0** إذا كانت خاطئة تسمى هذه القيمة المرفقة للقضية المنطقية بـ حقيقة القضية المنطقية، ونرمز لذلك بالرمز $V(P)$ أو P فقط يعني: $V(P) \in \{0,1\}$
ونلخص ذلك في جدول التالي نسميه **جدول الحقيقة للقضية المنطقية** P .

P
1
0

مثال 1.1.1

1. " الجزائر دولة إفريقية" ، قضية صحيحة.
2. " $x^2 \geqslant 0$ " ، ليست قضية، لأننا لا نسطيع الحكم عليها بالصح أوالخطأ.
3. " $7-5=2$ " ، قضية صحيحة.

1.1.1 نفي قضية منطقية "Négation de assertions logique"

تعريف 2.1.1:
لتكن P قضية. تسمي نفي القضية P القضيةالتي نرمز لها بالرمز $\rceil P$ أو $\overline{P}$ وحقيقتها تلخص في الجدول التالي:

P	$\overline{P}$
0	1
1	0

مثال 2.1.1

P	$V(P)$	$\overline{P}$	$V(\overline{P})$
الجزائر دولة افريقية	1	الجزائر ليست دولة افريقية	0
$22+1=5$	0	$22+1\neq 5$	1
2021 ليس مضاعف 5	1	2021 مضاعف 5	0

ويتم إنشاء قضايا جديدة بواسطة روابط منطقية نتناولها في مايلي:

2.1 الروابط المنطقية "Connecteurs logiques"

1.2.1 الوصل "$\wedge$" "Conjunction"

تعريف 1.2.1:
لتكن P و Q قضيتين. نسمي الوصل بين القضيتين P و Q القضية الجديدة التي نرمز لها بالرمز $P\wedge Q$ ونقرأ P و Q ، والتي تكون صادقة في حالة واحدة، هي: P و Q صادقتين معا.
ولدينا جدول الحقيقة للوصل "$\wedge$" كمايلي:

P	Q	$P\wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

2.2.1 الفصل "∨" "Disjunction"

تعريف 2.2.1:
لتكن P و Q قضيتين. نسمي الفصل بين القضيتين P و Q القضيةالجديدة التي نرمز لها بالرمز $P \vee Q$ ونقرأ P أو Q ، والتي تكون خاطئة إلا في حالة واحدة وهي: P و Q خاطئتين معا.
ولدينا جدول الحقيقة للفصل "∨" كمايلي:

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3.2.1 الإستلزام " $\Longrightarrow$ " "L'implication"

تعريف 3.2.1: لتكن P و Q قضيتين. نسمي إستلزاما القضية "$\overline{P} \vee Q$" التي نرمز لها بالرمز" $P \Longrightarrow Q$"
نسمي P مقدمة الإستلزام ونسمي Q تالي الإستلزام.
ولدينا جدول الحقيقة للاستلزام " $\Longrightarrow$ " كمايلي:

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- و حقيقة الإستلزام أن يكون خاطئة في حالة واحدة و ذلك عندما تكون P صحيحة و Q خاطئة.

ويسمي أيضا تكافؤ رياضي شرطي.

مثال 1.2.1

1. $4 \leqslant x \leqslant 9 \Longrightarrow -3 \leqslant x \leqslant -2$ (قضية صحيحة).
2. كل عدد فردي هو عدد أولي (قضية خاطئة).

4.2.1 التكافؤ " $\Longleftrightarrow$ " "L'équivalence"

تعريف 4.2.1:
لتكن P و Q قضيتين. نقول أن القضيتين P و Q متكافئتين إذا كانت P يستلزم Q و Q ستلزم P و نكتب $Q \Longleftrightarrow P$ ، و نقرأ P يكافئ Q أو نقرأ P إذا وفقط إذا Q .
و منه يكون التكافؤ صادقا إذا كانت القضيتان P و Q صادقتين معا أو خاطئتين معا.
و لدينا جدول الحقيقة للتكافؤ " $\Longleftrightarrow$ " كمايلي:

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$(Q \Longrightarrow P) \wedge (P \Longrightarrow Q)$	$P \Longleftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

ويسمي أيضا تكافؤ رياضي ثنائي الشرطية.

ملاحظة 1.2.1

للتعبير عن أن $Q \Longleftrightarrow P$ صادق نقول:

1. P شرط لازم وكاف لـ Q .
2. P صادقا إذا وفقط إذا كان Q صادقا.
3. ليكون P صادقا يلزم ويكفي أن يكون Q صادقا.

5.2.1 قواعد الأسبقية (الأولوية)

إن كثرة استخدام الأقواس تؤدي في بعض الأحيان إلى ثقل في كتابة الجمل المنطقية وتجعلها مملة، لذا فإن حذف البعض منها يساعد في توضيحها إذا ما احترمت القواعد التالية وهي قواعد الأولوية أو الأسبقية ونعني بذلك التسلسل في الأهمية عند كتابة الرموز المنطقية وهي كما يلي في:

1. المرتبة الأولى الرمز $\rceil$ ،
2. في المرتبة الثانية: الرمزان $\wedge$ و $\vee$ ،
3. في الثالثة الرمز $\Longrightarrow$ ،
4. وفي المرتبة الأخيرة الرمز $\Longleftrightarrow$.

مثال 2.2.1

- تُعبر القضية: $A \vee \rceil B \implies \rceil B \wedge C$ على القضية: $(\rceil B \wedge C) \implies (A \vee \rceil B)$.
- يمكن كتابة عبارة القضية التالية:

$$\Big(((A \vee B) \wedge C) \implies \big(C \wedge \overline{A}\big)\Big) \iff \Big(((C \vee B) \implies \big((B \wedge C) \vee \overline{A}\big)\Big)$$

على الشكل المبسط التالي:

$$(A \vee B) \wedge C \implies C \wedge \overline{A} \iff C \vee B \implies (B \wedge C) \vee \overline{A}$$

مصطلحات 2.1.1. إذا كانت قضية ما صحيحة دوما نرمز لها بالرمز **1** وإذا كانت خاطئة دوما نرمز لها بالرمز **0** .

3.1 خواص الروابط المنطقية

خواص 1.3.1. لتكن القضايا التالية P, Q و R، لدينا:

1. $\overline{1} = 0$ و $\overline{0} = 1$ ، قانون النفي الطبيعي.
2. $P \iff P \vee P$ و $P \iff P \wedge P$ ، قانون التطابق.
3. $1 \iff P \vee 1$ و $0 \iff P \wedge 0$ و $P \iff P \vee 0$ و $P \iff P \wedge 1$ ، قانون الهيمنة أو العنصر الحيادي.
4. $1 \iff P \vee \overline{P}$ ، مبدأ الثالث المرفوع.
5. $0 \iff P \wedge \overline{P}$ ، مبدأ عدم التناقض.
6. $P \iff \overline{\overline{P}}$، القانون النفي المزدوج.
7. $(Q \wedge P) \iff (P \wedge Q)$ و $(Q \vee P) \iff (P \vee Q)$، القانون التبديل.
8. $[P \wedge (Q \wedge R)] \iff [(P \wedge Q) \wedge R]$ و $[P \vee (Q \vee R)] \iff [(P \vee Q) \vee R]$، القانون التجميع
9. $\left(\overline{P} \vee \overline{Q}\right) \iff \overline{(P \wedge Q)}$، القانون الأول لـ De Morgan.
10. $\left(\overline{P} \wedge \overline{Q}\right) \iff \overline{(P \vee Q)}$، القانون الثاني لـ De Morgan.
11. $[(P \vee R) \wedge (Q \vee R)] \iff [(P \wedge Q) \vee R]$ و $[(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)] \iff [(P \vee Q) \wedge R]$ ، القانون التوزيع.

وهناك خواص أخرى خاصة بتكافؤ رياضي شرطي " $\Longrightarrow$ " و بتكافؤ رياضي ثنائي الشرطية " $\Longleftrightarrow$ " نتناولها فيمايلي:

خواص 2.3.1.

1. تكافؤ رياضي شرطي " $\Longrightarrow$ " : (القراءة من اليسار إلى اليمين)

(ا) $\neg(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q)$

(ب) $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg p)$ (قانون العكس النقيض)

(ج) $(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg(p \Longrightarrow \neg q)$

(د) $[(p \Longrightarrow q) \wedge (p \Longrightarrow r)] \Longleftrightarrow [p \Longrightarrow (q \wedge r)]$

(ه) $[(p \Longrightarrow q) \vee (p \Longrightarrow r)] \Longleftrightarrow [p \Longrightarrow (q \vee r)]$

(و) $[(p \Longrightarrow r) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \Longrightarrow r]$

(ز) $[(p \Longrightarrow r) \vee (q \Longrightarrow r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \Longrightarrow r]$

2. تكافؤ رياضي ثنائي الشرطية " $\Longleftrightarrow$ ":(القراءة من اليسار إلى اليمين)

(ا) $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)]$

(ب) $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \Longleftrightarrow \neg q)$

(ج) $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$

(د) $\neg(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \Longleftrightarrow \neg q)$

برهان.
نثبت الخواص السابقة بإستعمال جدول الحقيقة. أو بإستعمال الروابط المنطيقة مثلا نبرهن (أ) ثم قانون العكس النقيض للإستلزام. فلدينا:

(أ)

$$\overline{(P \Longrightarrow Q)} \Longleftrightarrow \overline{\left(\overline{P} \vee Q\right)} \Longleftrightarrow \left(P \wedge \overline{Q}\right)$$

(ب)

$$\begin{aligned}(P \Longrightarrow Q) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\overline{P} \vee Q\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \overline{\overline{\left(\overline{P} \vee Q\right)}} \\ &\Longleftrightarrow \quad \overline{\left(P \wedge \overline{Q}\right)} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\overline{\overline{Q}} \vee \overline{P}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}\right)\end{aligned}$$

(ج) والباقي يبقى للطالب.

□

1.3.1 الجملة المفتوحة

تعريف 1.3.1: لتكن E مجموعة مرجعية.
نسمي جملة مفتوحة كل عبارة تحوي على متغير (أو متغيرات) بحيث تصبح قضية منطقية إذا أعطينا لهذا المتغير قيمة من المجموعة المرجعية E و نرمز للدالة قضية بـ $P(x)$ ، $P(x,y)$ ...
- نسمي أحيانا الجملة $P(x)$ بـ خاصية.

مثال 1.3.1

1. $x^3+1=0$ خاصية للمتغير واحد x نرمز لها مثلا بـ $P(x)$.
2. $x^2+y^2 \geqslant 0$ خاصية للمتغيرين x و y نرمز لها مثلا بـ $P(x,y)$.

المكمم الكلي $\forall$

تعريف 2.3.1: لتكن $P(x)$ جملة مفتوحة أو خاصية مجموعتها المرجعية E .
إذا كانت $P(x)$ صحيحة من أجل جميع عناصر E، نكتب

$$\forall x \in E : P(x)$$

ونقرأ مهما يكن x من E لدينا $P(x)$. يسمى $\forall$ المكمم الكلي أو المكمم العام.

مثال 2.3.1

1. $\forall x \in \mathbb{R} : x^3+1=0$ (قضية خاطئة).
2. $\forall x,y \in \mathbb{R} : x^2+y^2 \geqslant 0$ (قضية صحيحة).

المكمم الوجودي $\exists$

تعريف 3.3.1: لتكن $P(x)$ خاصية مجموعتها المرجعية E.

1. إذا كانت $P(x)$ صحيحة من أجل عنصر على الأقل من E نكتب:

$$\exists x \in E : P(x)$$

ونقرأ يوجد على الأقل x من E حيث: $P(x)$ محققة. يسمى $\exists$ المكمم الوجودي.

2. وإذا كانت $P(x)$ صحيحة من أجل عنصر واحد ووحيد من E نكتب:

$$\exists! x \in E : P(x)$$

ونقرأ يوجد عنصر واحد ووحيد من x من E حيث: $P(x)$ محققة. يسمى $\exists!$ المكمم الوجودي الوحداني.

مثال 3.3.1

1. $\exists x \in \mathbb{R} : x \leq x^2$ (قضية صحيحة).
2. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 = 0$ (قضية خاطئة).

قواعد نفي قضايا تحتوي مكممات

نلاحظ أن المكممات تحول الخاصية إلى قضايا منطقية. لدينا القواعد التالية:

1. $\overline{\forall x \in E : P(x)} \iff \exists x \in E : \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x \in E : P(x)} \iff \forall x \in E : \overline{P(x)}$.
3. $\overline{\exists! x \in E : P(x)} \implies \forall x \in E : \overline{P(x)}$.

ملاحظة 1.3.1

الإستلزام التالي $\exists x \in E : P(x) \implies \exists! x \in E : P(x)$. دوما صحيح. ولكن عكسه غير صحيح سنرى ذالك في المثال التالي:

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 0 \Longrightarrow \exists! x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 0$$

مثال 4.3.1

1. القضية $\exists x \in \mathbb{R} : x \leq 0$، نفيها $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0$.
2. القضية $\forall x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 2x + 1 = 0$، نفيها $\exists x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 2x + 1 \neq 0$.
3. $\exists x > 0 : \log x \leq 1 \iff \overline{\forall x > 0 : \log x > 1}$
4. $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}) : x > y \iff \overline{(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) : x \leq y}$

ملاحظة 2.3.1

إن ترتيب المكممات مهم. فالقضيتان:

1. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x \leq y$ و
2. $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N} : x \leq y$

مختلفتان. لأن الأولى صادقة والثانية خاطئة.

4.1 البرهان الرياضي "Raisonnements Mathématique"

لتكن P و Q قضيتين.

1.4.1 البرهان المباشر "Raisonnement direct"

لبرهان أن القضية "$P \Longrightarrow Q$" صحيحة، نفرض صحة القضية P ونبرهن أن Q صحيحة.

تطبيق محلول 1.4.1

برهن أنه إذا كان x و y عددين ناطقين فإن $x + y \in \mathbb{Q}$.

نستعمل البرهان المباشر.
نفرض أن x و y عددين ناطقين،
وبتالي فإنه يوجد a و a' من $\mathbb{Z}$ و b و b' من $\mathbb{Z}^*$ بحيث: $x = \frac{a}{b}$ و $y = \frac{a'}{b'}$.
إذن:

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'}$$

ومنه: $x + y \in \mathbb{Q}$ لأن: $ab' + a'b \in \mathbb{Z}$ و $bb' \in \mathbb{Z}^*$.

2.4.1 البرهان بفصل الحالات "Raisonnements cas par cas"

مبدأ البرهان هو صحة القضية التالية:

$$P \vee \overline{P} \implies Q$$

وبالتالي لبرهان صحة القضية $P(x)$ من كل قيم من المجموعة المرجعية E.

1- نبرهن صحة القضية من أجل قيم التي تنتمي A حيث أن: ($A \subseteq E$) ثم

2- نبرهن صحة القضية من أجل قيم التي تنتمي $\overline{A}$ ($\overline{A}$ متممة A بالنسبة E) .

تطبيق محلول 2.4.1

برهن أن من أجل كل عدد حقيقي x أن:

$$|x-1| \leqslant x^2 - x + 1 \qquad (*)$$

ليكن $x \in \mathbb{R}$ نميز حالتين.

الحالة الأولى: $x \geqslant 1$

لدينا: $|x-1| = x-1$ و بالتالي:

$$\begin{aligned}|x-1| \leqslant x^2-x+1 &\iff x-1 \leqslant x^2-x+1\\ &\iff x^2-x+1-x+1 \geqslant 0\\ &\iff x^2-2x+2 \geqslant 0\\ &\iff (x-1)^2+1 \geqslant 0\end{aligned}$$

إذن المتراجحة $(*)$ محققة.

الحالة الثانية: $x < 1$

لدينا: $|x-1| = -x+1$ وبالتالي:

$$\begin{aligned}|x-1| \leqslant x^2-x+1 &\iff -x+1 \leqslant x^2-x+1\\ &\iff x^2-x+1+x-1 \geqslant 0\\ &\iff x^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

إذن المتراجحة $(*)$ محققة.

إذن في كلتا الحالتين لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \leqslant x^2 - x + 1$$

3.4.1 البرهان بالعكس النقيض للإستلزام "Raisonnements par la contraposée"

البرهان بالعكس النقيض يعتمد على القاعدة التالية:

$$(P \implies Q) \iff \left(\overline{Q} \implies \overline{P}\right)$$

إذن لبرهان قضية $Q \Longrightarrow P$ يكفي ويلزم أن نبرهن صحة القضية $\overline{P} \Longrightarrow \overline{Q}$.

تطبيق محلول 3.4.1

برهن أن:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \neq 1 \wedge y \neq 1 \Longrightarrow x + y \neq xy + 1$$

في هذه الحالة يكفي أن نبرهن أن:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = xy + 1 \Longrightarrow x = 1 \vee y = 1$$

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ ، حيث: $x + y = xy + 1$ ، وبالتالي:

$$\begin{aligned} x + y = xy + 1 &\Longleftrightarrow x + y - xy - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x(1-y) + y - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (1-y)(x-1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (1-y) = 0 \ \vee \ (x-1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow y = 1 \ \vee \ x = 1 \end{aligned}$$

4.4.1 البرهان بالخلف "Raisonnements par l'bsurde"

لبرهان صحة قضية P نفرض أنها خاطئة (أي أن نفيها $\overline{P}$ صحيح) و نحاول الحصول على تناقض.

تطبيق محلول 4.4.1

برهن مايلي:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ : \ \sqrt{n^2 + n} \notin \mathbb{N}$$

نبرهن بالخلف:

نفرض أن:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ : \ \sqrt{n^2 + n} \in \mathbb{N}$$

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا:

$$\sqrt{n^2 + n} \in \mathbb{N} \Longrightarrow \sqrt{n^2 + n} = m \text{ مع } m \in \mathbb{N}^*$$

و بتالي:

$$\sqrt{n^2 + n} = m \Longrightarrow n^2 + n = m^2$$

هذا من جهة ومن جهة أخرى لدينا:

$$\begin{aligned} 0<n<2n+1 &\iff n^2<n^2+n<n^2+2n+1 \\ &\iff n^2<m^2<(n+1)^2 \\ &\iff n<m<(n+1) \end{aligned}$$

وهذا تناقض كون أنه لايوجد عدد طبيعي بين عددين طبيعين متتالين. إذن ما فرضناه خاطئ وبتالي:

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \ : \ \sqrt{n^2+n}\notin\mathbb{N}$$

5.4.1 البرهان بمثال مضاد "Raisonnements par contre-exemple"

لبرهان أن قضية من الشكل $\forall x\in E : P(x)$ خاطئة، يكفي أن نجد عنصرا $x_0\in E$ حيث: $P(x_0)$ خاطئة.

تطبيق محلول 5.4.1

برهن عدم صحة القضية التالية: $\forall x,y\in\mathbb{R} : x+y>0$

في هذه الحالة يكفي أخذ: $(x_0,y_0)=(0,0)$ فنجد $x_0+y_0>0$ قضية خاطئة.

6.4.1 البرهان بالتراجع (بالتدريج) "Raisonnements par la Récurrence"

القضايا المراد إثباتها بهذا النمط من البرهان هي التي تتعلق بوسيط طبيعي واحد أو اكثر.
فيما يلي نورد المبرهنتين الأساسيتين لهذا النمط من البرهان.

نظرية 1.4.1: كل مجموعة جزئية X من $\mathbb{N}$ تحقق:

$$(0\in X)\wedge[\forall x\in\mathbb{N} : (x\in X)\implies(x+1\in X)] \tag{1.1}$$

هي نفسها المجموعة $\mathbb{N}$.

برهان.
نفرض أنه توجد مجموعة جزئية X من $\mathbb{N}$ تحقق العلاقة (1.1) . ونبرهن هنا بالخلف.
نفرض جدلا أن: $X\neq\mathbb{N}$، يعني أنه توجد مجموعة غير خالية معرفة كمايلي: $Y=\mathbb{N}-X$.
إذن حسب تعريف Y فلا بد أن تكون فيها أصغر عنصر وليكن y_0 ، ولدينا حسب الفرض أن: $0\in X$. وبتالي: $0\notin Y$ إذن: $y_0\in\mathbb{N}^*$ $\implies$ $y_0\neq 0$.
هذا من جهة ومن جهة أخرى لو نضع: $x=y_0-1$ إذن:

$$x=y_0-1\in A \overset{\text{حسب العلاقة } (1.1)}{\implies} x+1=y_0\in A$$

وبتالي: $y_0 \notin B$ وهذا تناقض. وبالتالي: $X = \mathbb{N}$. □

نظريـة 2.4.1: إذا كانت $P(n)$ خاصية معرفة على $\mathbb{N}$ وتحقق:

$$P(0) \wedge [\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \implies P(n+1)]$$

فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل قيمة n من $\mathbb{N}$.

برهان. نضع:

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \text{صحيحة } P(n)\}$$

ونتحقق بسهولة من النظرية 6.4.1 السابقة. وهذا ما يثبت صحة هته النظرية. □

نتيجة 1.4.1

إذا كانت الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل القيمة الأولى أو الرتبة الأولى، وكانت صحتها من أجل الرتبة n حيث $(n \geqslant 1)$ تؤدي إلى صحتها من أجل الرتبة الموالية، فإن الخاصة $P(n)$ محقق من أجل كل الأعداد الطبيعية.

ملاحظة 1.4.1

عند فرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة أو محقق حتى القيمة n يعني أن $P(n)$ صحيحة عند كل قيم التي هي أصغر من n .

ملاحظة 2.4.1

وتبقى النظرية 6.4.1 صحيحة إذا إبتدئنا من القيمة n_0 حيث $(n_0 > 0)$ $n_0 \in \mathbb{N},$.

طريقة البرهان بالتراجع

لبرهان صحة القضية

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0) : P(n)$$

بالبرهان بالتراجع نتبع مايلي:

1. نبرهن صحة القضية من أجل $n = n_0$ أي $p(n_0)$ صحيحة.
2. نبرهن الإستلزام: $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ بالطرق المذكورة سابقا.

5.1 تمارين الفصل الأول

التمريـــن 1.1. برهن أن:

$$(2=5) \implies (7=6)$$

التمريـــن 1.2.
أدرس حقيقة القضية التالية حسب قيم العدد الحقيقي x:

$$\forall y \in [0,1],\ x \geq y \implies x \geq 2y$$

التمريـــن 1.3.
نعرف الرابطة $\triangledown$ ونسميها الفصل المانع (الإقصائي) والمعرفة كمايلي: ا نطلاقا من قضيتين p و q نعرف القضية $p \triangledown q$ وتقرا إما p أو إما q وحقيقتها أنها صحيحة إذا وفقط إذا كان القضيتين p و q مختلفين في الحقيقة فقط وخاطئة في ما عدى ذلك.

1. أكتب جدول الحقيقة للرابطة $\triangledown$.
2. أثبت أن: $p \triangledown q \iff \overline{(p \iff q)}$.
3. أثبت أنه إذا كان p, q و r قضايا فإن:

(ا) $(p \triangledown q) \triangledown r \iff p \triangledown (q \triangledown r)$

(ب) $p \wedge (q \triangledown r) \iff (p \wedge q) \triangledown (p \wedge r)$

التمريـــن 1.4.
إملأ الفراغات التالية بإستعمال أحد الروابط التالية:
$\Longrightarrow, \Leftarrow, \Longleftrightarrow$:

1)	$x \in \mathbb{R}:$	$x^2 = 4$	......	$x = 2$
2)	$x \in \mathbb{R}:$	$x^2 \leqslant 1$	......	$-1 \leqslant x \leqslant +1$
3)	$n \in \mathbb{N}:$	$n \geqslant 3$	......	$n^2 + 1 \geqslant 10$
4)	$p, q \in \mathbb{Q}$		......	$p + q \in \mathbb{Q}$
5)	$z \in \mathbb{R}:$	$z = \overline{z}$	......	$z \in \mathbb{R}$

التمريـــن 1.5.
لتكن لدينا القضايا الأربعة التالية:

(a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x - y > 0$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x - y > 0$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x - y > 0$

(d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$

- القضايا a، b، c، d هل هي قضايا صحيح أم خاطئة ؟

التمريـــن 1.6.
أكتب نفي القضايا التالية.

1) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \implies (\exists z \in \mathbb{R} : x < z < y)$

2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 : \left| x - \dfrac{7}{5} \right| < \alpha \implies |5x - 7| < \varepsilon$

3) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^* : \dfrac{1}{N} < \varepsilon < N$

التمريـــن 1.7.
ليكن I مجال من $\mathbb{R}$ و $f : I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على I وتأخذ قيمها في$\mathbb{R}$.
أكتب القضايا التالية باستعمال المكممات.

1. الدالة f تنعدم.
2. الدالة f هي الدالة المعدومة .
3. الدالة f ليست الدالة الثابتة.
4. الدالة f محدودة من الأعلى.
5. الدالة f محدودة.
6. الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى على I.
7. f لا تنعدم سوى مرة واحدة على I.

التمريـــن 1.8.
برهن أن:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} :\ 3 - \varepsilon < \frac{3n+1}{n+1} < 3 + \varepsilon$$

التمرين 1.9.

n عدد طبيعي. بين أن

1. n و n^2 لهما نفس الشفاعة يعني زوجيين معا أو فرديين معا.
2. $n(n+1)$ هو عدد زوجي.

التمرين 1.10.

ليكن $a, b \in \mathbb{R}_+$ برهن (البرهان المباشر) أن:

1. $a \leqslant b \implies a \leqslant \dfrac{a+b}{2} \leqslant b$
2. $a \leqslant b \implies a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b$

التمرين 1.11.

ليكن $a \in \mathbb{R}$ اثبت (البرهان بالعكس النقيض) أن:

$$\forall \epsilon > 0, |a| < \epsilon \implies a = 0$$

التمرين 1.12.

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نبرهن (بالخلف) أن:

$$\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}^*$$

أو بعبارة أخرى:
((n^2+1) ليس مربع عدد طبيعي)

التمرين 1.13.

هل من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$x \leqslant 2 \implies x^2 \leqslant 4$$

(بمثال مضاد).

التمرين 1.14.

لتكن $x, y \in \mathbb{Q}$ برهن (الخلف) أن:

1. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ، $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ ، $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ و $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$ مع a عدد أولي.
2. $x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
3. $y \neq 0 \implies x + y\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

التمرين 1.15.

برهن بالتراجع أن:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* :$
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. من أجل كل عدد طبيعي n :

$(4^n - 1)$ يقبل القسمة على 3.

4. من أجل عدد حقيقي ثابت x حيث $x > 0$

برهن أن:

- $\forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geqslant 1 + nx$
- $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2^n \geqslant n$

الفَصل الثاني

أوليات حول المجموعات

مُحتوى الفَصل

1.2 مفاهيم عامة 21

2.2 عمليات على المجموعات 23

3.2 العلاقات 29

4.2 تمارين الفصل الثاني 44

تم إعداد هذا الفصل إعتماداً على المراجع التالية: [6, 7, 1, 5, 3]

1.2 مفاهيم عامة

في أواخر القرن التاسع عشر وبدايات القرن العشرين قام علماء الرياضيات ببناء نظرية جديدة وهامة وهي نظرية المجموعات. ومن أشهر العلماء الذين اشتغلوا بهذه النظرية جورج كانتور (1845-1918) وبرتراند راسل (1872-1970) و ألفريد نورث وايتهيد (1861-1947) وإرنست زيرميلو (1871-1953).
و مفهوم المجموعة هو مفهوم حدسي، يمكن تصورها على أنها لَم طائفة من الأشياء تشترك في صفة أو صفات عديدة، ونعبر عنها إما بذكر جميع عناصرها مثلا:

المجموعة الشمسية= { عطارد، الزهرة، الأرض، المريخ، المشتري، زحل، أورانوس، نبتون }

أو بذكر خاصية مميزة لها مثلا:

$$\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\} =]-1, +1[$$

كما لا يمكن للمجموعة أن تحتوي على نفس العنصر أكثر من مرة.
وبغرض تصنيف المجموعات فهناك أنواع نذكر منها:

1. المجموعات المنتهية: وهي التي لها عدد محدود من العناصر.
2. المجموعات غير المنتهية: وهي التي يكون عدد عناصرها غير محدود.
3. المجموعات الخالية: وهي التي لاتحتوي على أي عناصر. ونعبر عنها إما بـ { } أو $\emptyset$.
4. المجموعات وحيدة العنصر: و هي التي تحوي عنصرًا واحداً فقط.
5. المجموعات المتكافئة: وهي المجموعات التي لها نفس العدد من العناصر، بمعنى أن كل مجموعتين تكونان متكافئتين إذا أمكن مقابلة عناصرهما عنصراً لعنصر.
6. المجموعات الشاملة (المرجعية): و هي المجموعات التي تحتوي على جميع العناصر. فمثلا: فإذا فرضنا في مسألة ما أننا نتعامل فقط مع الأعداد الطبيعية من 1 إلى 10، تكون المجموعة الشاملة هي: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

وسنتطرق في هذا الفصل إلى أنواع أخرى من بينها: المجموعات الجزئية، المجموعات المتساوية، المجموعات المتداخلة (المجموعات المنفصلة)، العمليات، العلاقات على مجموعات وبعض الخواص.

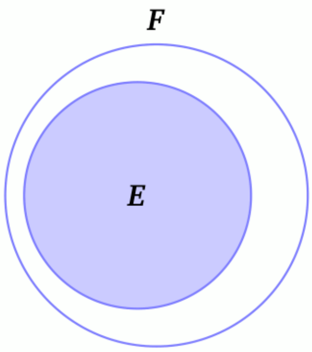
لتكن X مجموعة مرجعية.

1.1.2 مفهوم الإحتواء (المجموعات الجزئية)

تعريف 1.1.2:
لتكن E و F مجموعتين. نقول أن المجموعة E محتواة في المجموعة F إذا وفقط إذا تحقق الإستلزام التالي:

$$(\forall x \in X)(x \in E \Rightarrow x \in F)$$

ونكتب: $E \subseteq F$.
ونقول أيضا أن المجموعة E مجموعة جزئية من المجموعة F.



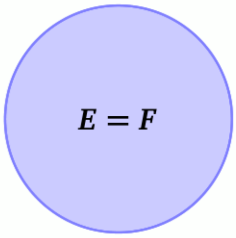
شكل تمثيل المجموعات الجزئية

2.1.2 مفهوم المساواة (المجموعات المتساوية)

تعريف 2.1.2:
لتكن E و F مجموعتين. نقول أن المجموعة E تساوي المجموعة F إذا وفقط إذا كان: $F \subseteq E$ و $E \subseteq F$، وبعبارة أخرى

$$(\forall x \in X)(x \in E \iff x \in F)$$

ونكتب: $E = F$
ونقول أيضا أن المجموعتين E و F متساويتان أو متطابقتان.



شكل تمثيل المجموعات المتساوية

ملاحظة 1.1.2

إذا كانت E، F و G ثلاث مجموعات فإنه لدينا:

$$(E \subseteq F \wedge F \subseteq G) \Rightarrow E \subseteq G$$

نقول أن علاقة الإحتواء هي علاقة متعدية.

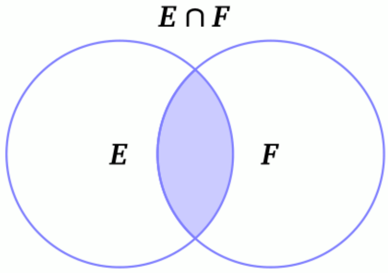
2.2 عمليات على المجموعات

1.2.2 التقاطع (المجموعات المتداخلة)

تعريف 1.2.2:
لتكن E و F مجموعتين. نسمي تقاطع المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التي نرمز لها بالرمز $E \cap F$ والمعرفة كما يلي:

$$E \cap F = \{x : x \in E \wedge x \in F\}$$

كما نقول أن المجموعتين E و F متداخلتان. وتكون منفصلتان إذا كان: $E \cap F = \emptyset$

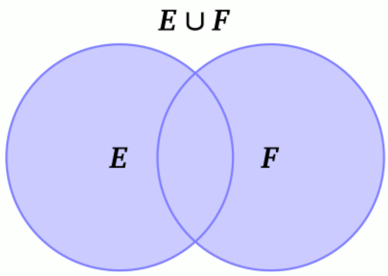


شكل تمثيل المجموعات المتداخلة

2.2.2 الإتحاد

تعريف 2.2.2:
لتكن E و F مجموعتين. نسمي إتحاد المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التي نرمز لها بالرمز $E \cup F$ والمعرفة كما يلي:

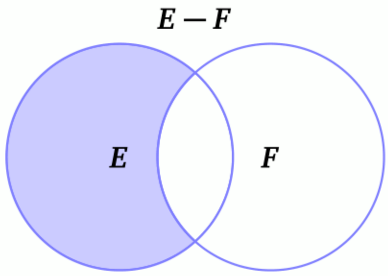
$$E \cup F = \{x : x \in E \vee x \in F\}.$$



3.2.2 الفرق بين مجموعتين

تعريف 3.2.2:
لتكن E وF مجموعتين. نسمي الفرق بين المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التي نرمز لها بالرمز $E-F$ والمعرفة كما يلي:

$$E-F=\{x : x \in E \wedge x \notin F\}.$$



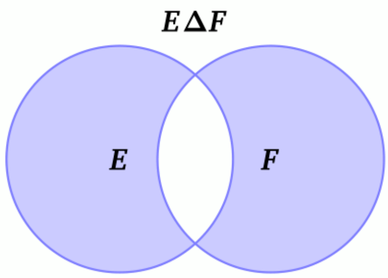
4.2.2 الفرق التناظري

تعريف 4.2.2:
لتكن E وF مجموعتين. نسمي الفرق التناظري بين المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التي نرمز لها بالرمز $E\Delta F$ والمعرفة كما يلي:

$$E\Delta F=(E\cup F)-(E\cap F).$$

أو

$$E\Delta F=(E-F)\cup(F-E).$$



5.2.2 العمليات على المجموعات

خواص 1.2.2. لتكن A, B, C ثلاث مجموعات. لدينا الخواص التالية:

1. خاصية العنصر الحيادي:
$$A\cap\emptyset=\emptyset,\quad A\cup\emptyset=A$$

2. خاصية التطابق:
$$A\cap A=A,\quad A\cup A=A.$$

3. خاصية التبديل:
$$A\cap B=B\cap A,\quad A\cup B=B\cup A.$$

4. خاصية التجميع:
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$

5. خاصية التوزيع:
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C),\ (A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C).$$

برهان. بإستعمال الخواص 1.3.1 المدرج في الفصل الأول. □

6.2.2 مجموعة أجزاء مجموعة

تعريف 5.2.2:
نسمي مجموعة أجزاء مجموعة E المجموعة التي عناصرها أجزاء E و نرمزلها بالرمز $\mathscr{P}(E)$. أي أن:
$$\mathscr{P}(E)=\{A|\ A\subseteq E\}$$

خواص 2.2.2.

1. $A\in\mathscr{P}(E)\iff A\subseteq E$ ،
2. $\emptyset\in P(E)$ و $E\in P(E)$.

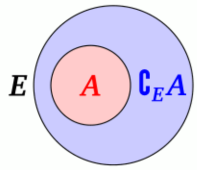
قضية 1.2.2. إذا كان عدد عناصر E هو n $(n\in\mathbb{N}^*)$ فإن عدد عناصر $\mathscr{P}(E)$ هو 2^n.

برهان. يكفي أن نبرهن بالتراجع. ويترك للطالب. □

7.2.2 متممة مجموعة

تعريف 6.2.2:
لتكن E مجموعة و A مجموعة جزئية منها. نسمي متممة المجموعة A في E المجموعة التي نرمز لها بالرمز $\complement_E A$ أو $E-A$ والمعرفة كما يلي:

$$\complement_E A = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}$$



8.2.2 خواص متممة مجموعة

لتكن E مجموعة و $A,\ B$ مجموعتين جزئيتين منها لدينا:

1. $\complement_E \emptyset = E$ و $\complement_E E = \emptyset$
2. $\complement_E(\complement_E A) = A$
3. $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$ و $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$

ملاحظة 1.2.2

يمكن أن نرمز لمتممة المجموعة A في E بالرمز $\overline{A}$ أو بالرمز $\rceil A$.

9.2.2 تجزئة مجموعة

تعريف 7.2.2:
لتكن E مجموعة و $\{A_i : i \in I\}$ عائلة من أجزاء E. نقول أن العائلة $\{A_i : i \in I\}$ تجزئة للمجموعة E إذا تحقق:

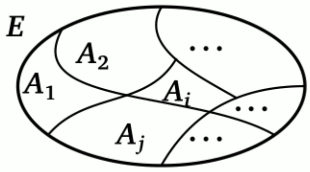
1. كل عنصر من العائلة ليس خالي يعني:

$$\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$$

2. الأجزاء منفصلة مثنى مثنى وهو ما يعني أن:

$$\forall i, j \in I\,(i \neq j) : A_i \cap A_j = \emptyset$$

3. إتحاد كل عناصر العائلة يشكل المجموعة يعني: $\bigcup_{i \in I} A_i = E$



مثال 1.2.2

لتكن المجموعة $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. $\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$ تشكل تجزئة للمجموعة E.
2. $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ تشكل تجزئة للمجموعة E.
3. $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{4\}\}$ ليست تجزئة للمجموعة E.

3.2 العلاقات

قبل الشروع في موضوع العلاقات نبدأ بمعرفة مجموعة جديدة وهي الجداء الديكارتي للمجموعتين على النحو التالي:

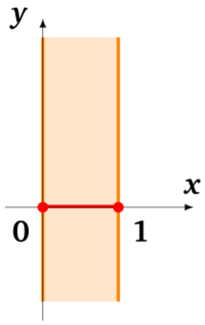
1.3.2 الجداء الديكارتي لمجموعتين

تعريف 1.3.2: تعريف: لتكن E و F مجموعتين. نسمي الجداء الديكارتي للمجموعتين E و F المجموعة التي نرمز لها بالرمز $E \times F$ و المعرفة كما يلي:

$$E \times F = \{(a,b) \mid a \in E, b \in F\}$$

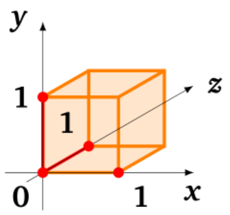
مثال 1.3.2

1. المستوى (π)، ماهو إلا جداء ديكارتي المعرف كمايلي: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.
2. وكذلك نعتبر مثلا: $[0,1] \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, y \in \mathbb{R}\}$



تمثيل الجداء الديكارتي $[0,1] \times \mathbb{R}$ باللون البرتقالي.

3. $[0,1] \times [0,1] \times [0,1] = \{(x,y,z) \mid 0 \le x, y, z \le 1\}$



تمثيل الجداء الديكارتي $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ باللون البرتقالي.

مثال 2.3.2

لتكن المجموعتين $E=\{a,b,c\}$ و $F=\{x,y\}$ لدينا:

$$E\times F=\{(a,x),\ (a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$$

$$F\times E=\{(x,a),(x,b),(x,c),(y,a),(y,b),(y,c)\}$$

نلاحظ أن $E\times F\neq F\times E$.

2.3.2 خواص الجداء الديكارتي لمجموعتين

خواص 1.3.2. لتكن $A,\ B,\ C$ ثلاث مجموعات لدينا:

1. $A\times\emptyset=\emptyset$ و $\emptyset\times A=\emptyset$.
2. $A=B \iff A\times B=B\times A$ أو $A=\emptyset$ أو $B=\emptyset$
3. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.
4. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.
5. $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$.
6. $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$.

برهان. يترك للطالب. □

3.3.2 العلاقة في مجموعة

إذا إستطعنا مقارنة عناصر مجموعتين غير خاليتين نكون بذلك قد أنشأنا علاقة بين المجموعتين.
إن الاهمية التي تكتسيها العلاقة بين المجموعات بصفة عامة وبين المجموعة في نفسها بصفة خاصة في تصنيف عناصرها وترتيبها وينتج عن ذلك ما يسمي بـ بعلاقة الترتيب و علاقة التكافؤ وهم تقريبا هم نحو دراستنا في هذه الفقرة.

تعريف 2.3.2: نعتبر المجموعتين غير الخاليتين E و F. نسمي $\mathscr{R}$ علاقة بين المجموعتين E و F كل مجموعة جزئية من $E\times F$.
ونكتب: $(\mathscr{R},E,F)$ أو نكتب: $\mathscr{R}\subseteq E\times F$

مثال 3.3.2

لتكن $E = \{2,3,5,11\}$ و $F = \{2,7,12,15,17,20\}$ نعرف $\mathscr{R}$ العلاقة "يقسم" بين عناصر المجموعة E و F بهذا الترتيب، فتعين لنا العلاقة $\mathscr{R}$ كمايلي:

$$\mathscr{R} = \{(2,2),(2,12),(2,20),(3,12),(3,15),(5,15),(5,20)\} \subseteq E \times F$$

تعريف 3.3.2: [تعريف أخر للعلاقة بين مجموعتين] نعتبر المجموعتين غير الخاليتين E و F. نسمي علاقة بين المجموعتين E و F كل خاصية تسمح بأن نرفق عناصر من المجموعة E بعناصر من المجموعة F.
إذا كان عنصر $x \in E$ مرتبطا مع عنصر $y \in F$ بعلاقة $\mathscr{R}$ نكتب $x\mathscr{R}y$ أي أن:

$$(x,y) \in \mathscr{R} \subseteq E \times F$$

مثال 4.3.2

من المثال السابق نجد أن: $(2,2) \in \mathscr{R}$ و $(3,17) \notin \mathscr{R}$.

ملاحظة 1.3.2

نلاحظ أن المجموعة الخالية تحقق: $\emptyset \subset E \times F$، إذن فهي علاقة تسمى العلاقة المستحيلة.

4.3.2 العلاقة الثنائية

تعريف 4.3.2:
E مجموعة غير خالية. نسمي علاقة ثنائية على E كل جزء من $E \times E$.

5.3.2 خواص العلاقة الثنائية

لتكن $\mathscr{R}$ علاقة ثنائية معرفة على مجموعة E.

5.3.2.1 العلاقة الإنعكاسية Réflexivité

تعريف 5.3.2:
نقول عن العلاقة $\mathscr{R}$ أنها إنعكاسية إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall x \in E \quad x\mathscr{R}x$$

$$x \bullet \circlearrowleft$$

مثال 5.3.2

$\mathscr{R}$ علاقة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\mathscr{R}y \iff x^3 - y^3 = 3(x-y)$$

لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^3 - x^3 = 3(x-x) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R} : x\mathscr{R}x)$$

ومنه $\mathscr{R}$ إنعكاسية.

5.3.2.2 العلاقة التناظرية Symétrie

تعريف 6.3.2:
نقول عن العلاقة $\mathscr{R}$ أنها تناظرية إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall (x,y) \in E^2 : x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$$

$$x \bullet \longleftrightarrow \bullet\, y$$

مثال 6.3.2

نأخذ المثال 5.3.2.1 السابق. لدينا:

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\mathscr{R}y \quad &\Rightarrow x^3 - y^3 = 3(x-y)\\ &\Rightarrow y^3 - x^3 = 3(y-x)\\ &\Rightarrow y\mathscr{R}x\end{aligned}$$

ومنه $\mathscr{R}$ تناظرية.

5.3.2.3 العلاقة ضد تناظرية Anti symétrie

تعريف 7.3.2:
نقول عن العلاقة $\mathscr{R}$ أنها ضد تناظرية إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall (x,y) \in E^2 : (x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}x) \Rightarrow x = y$$

مثال 7.3.2

$\mathscr{S}$ علاقة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\mathscr{S}y \iff x \leqslant y$$

لدينا:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\mathscr{S}y \wedge y\mathscr{S}x \iff x \leqslant y \wedge x \leqslant y \Rightarrow x = y$$

ومنه: $\mathscr{S}$ علاقة تناظرية.

مثال 8.3.2

نأخذ المثال 5.3.2.1 السابق. لدينا: $1\mathscr{R}0$ و $0\mathscr{R}1$ لكن $0 \neq 1$. ومنه $\mathscr{R}$ ليست ضد تناظرية.

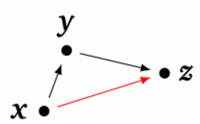
ملاحظة 2.3.2

إن خاصيتي التناظر و ضد التناظر ليستا متعاكستين ويمكن أن يجتمعا في نفس العلاقة مثال ذلك علاقة المساواة في مجموعة غير خالية.

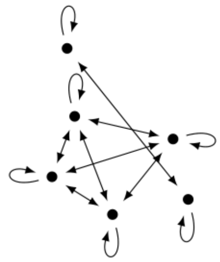
5.3.2.4 العلاقة المتعدية Transitivité

تعريف 8.3.2:
نقول عن العلاقة $\mathscr{R}$ أنها متعدية إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall (x,y,z) \in E^3 \ (x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}z) \Rightarrow x\mathscr{R}z$$



مثال 9.3.2



تطبيق للطالب 1.3.2

$\mathcal{R}$ و $\mathcal{S}$ المعرفتين في المثالين السابقين المثال 1.2.3.5 و المثال 3.2.3.5 على الترتيب. برهن أنهما متعديتان.

6.3.2 علاقة التكافؤ

تعريف 9.3.2: نقول عن علاقة ثنائية أنها علاقة تكافؤ إذا وفقط إذا كانت إنعكاسية، تناظرية و متعدية.

تطبيق محلول 1.3.2

$\mathcal{R}$ علاقة معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^{*2} : x\mathcal{R}y \iff x+\frac{1}{x}=y+\frac{1}{y}$$

1. لدينا:

$$\forall x\in\mathbb{R}^* : x+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x} \Rightarrow (\forall x\in\mathbb{R}^* : x\mathcal{R}x)$$

ومنه $\mathcal{R}$ إنعكاسية.

2. لدينا:

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in\mathbb{R}^{*2} : x\mathcal{R}y \quad &\Rightarrow x+\frac{1}{x}=y+\frac{1}{y}\\ &\Rightarrow y+\frac{1}{y}=x+\frac{1}{x}\\ &\Rightarrow y\mathcal{R}x\end{aligned}$$

ومنه $\mathcal{R}$ تناظرية.

3. ليكن $x,y,z\in\mathbb{R}^*$ لدينا:

$$\begin{cases} x\mathscr{R}y \\ y\mathscr{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{x}=y+\frac{1}{y} \\ y+\frac{1}{y}=z+\frac{1}{z} \end{cases} \Rightarrow x+\frac{1}{x}=z+\frac{1}{z} \Rightarrow x\mathscr{R}z$$

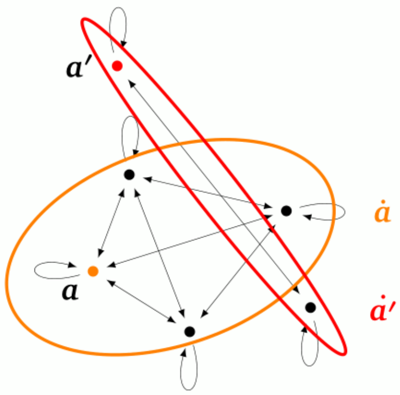
ومنه $\mathscr{R}$ متعدية.

ومنه $\mathscr{R}$ هي علاقة تكافؤ.

7.3.2 أصناف التكافؤ

تعريف 10.3.2:
لتكن المجموعة E المزودة بالعلاقة التكافؤ$\mathscr{R}$ وليكن $a \in E$. نسمي صنف تكافؤ العنصر a المجموعة الجزئية من Eالتي نرمز لها بالرمز $\dot{a}$ (أو $\overline{a}$) والمعرفة كما يلي:

$$\dot{a} = \{x \in E : x\mathscr{R}a\}$$



مثال 10.3.2

العلاقة $\mathscr{R}$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{*2} : x\mathscr{R}y \iff x+\frac{1}{x}=y+\frac{1}{y}$$

علاقة تكافؤ. ولدينا أيضا:

$$
\begin{aligned}
\dot{1} =& \ \{x \in \mathbb{R}^* : x\mathscr{R}1\}\\
\dot{1} =& \ \left\{x \in \mathbb{R}^* : x+\frac{1}{x} = 2\right\}\\
\dot{1} =& \ \{x \in \mathbb{R}^* : x^2 - 2x + 1 = 0\}\\
\dot{1} =& \ \{x \in \mathbb{R}^* : (x-1)^2 = 0\}\\
\dot{1} =& \ \{1\}
\end{aligned}
$$

8.3.2 خواص اصناف التكافؤ

خواص 2.3.2. لتكن $\mathscr{R}$ علاقة تكافؤ في مجموعة E و $a, b \in E$، فيكون لدينا:

1. $\dot{a} \neq \emptyset$
2. $\dot{a} = \dot{b} \iff a\mathscr{R}b$
3. $\dot{a} \cap \dot{b} = \emptyset \iff (a,b) \notin \mathscr{R}$
4. $\underset{a\in E}{\cup} \dot{a} = E$

برهان. يترك للطالب. □

تعريف 11.3.2:
نسمي مجموعة كل صفوف التكافؤ وفق علاقة تكافؤ $\mathscr{R}$ بمجموعة حاصل القسمة لـ E وفق $\mathscr{R}$ ونكتب:

$$E/\mathscr{R} = \{\dot{a} : a \in E\}$$

قضية 1.3.2. لتكن $\mathscr{R}$ معرفة على E علاقة تكافؤ .
فإن صفوف التكافؤ وفق علاقة التكافؤ $\mathscr{R}$ تشكل تجزئة لـ E .

برهان. يترك للطالب. □

9.3.2 القسمة الاقليدية في $\mathbb{Z}$

نظريــة 1.3.2: من أجل كل ثنائية $(a,b)(b\neq 0)$ من الأعداد الصحيحة، توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث:

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r \leq |b|. \end{cases}$$

يسمى العددان الصحيحان q و r على الترتيب حاصلاً وباقيا القسمة الاقليدية لـ a على b.

برهان.
الوجود: هناك حالتان حسب إشارة a.

1. إذا كان $a \geq 0$، نضع $q_0 = max\{k \in \mathbb{N} : k|b| \leq a\}$، $r = a - q_0|b|$ و
   (ا) إذا كان $b \geq 0$ فإن $q = q_0$.
   (ب) إذا كان $b < 0$ فإن $q = -q_0$.
2. إذا كان $a < 0$، نضع $q_1 = min\{k \in \mathbb{N} : k|b| \geq -a\}$، $r = a + q_1|b|$ و
   (ا) إذا كان $b \leq 0$ فإن $q = q_1$.
   (ب) إذا كان $b > 0$ فإن $q = -q_1$.

الوحدانية: لنفرض أن:

$$\begin{cases} a = bq + r, \\ 0 \leq r \leq |b|. \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} a = bq' + r', \\ 0 \leq r' \leq |b|. \end{cases}$$

لدينا

$$r' - r = b(q - q')$$

وبما أن: $-|b| < r' - r < |b|$ فإن:

$$-|b| < b(q - q') < |b|$$

ومنه:

$$0 \leq |b||q - q'| < |b|$$

و بالتالي:

$$|q-q'|<1$$

ومنه:

$$q=q' \text{ و } r=r'.$$

□

9.3.2.1 المجموعة $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$

ليكن $n \geqslant 2$ عدد طبيعي. نعرف على مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$ العلاقة $\mathscr{R}$ كمايلي:

$$\forall x,y \in \mathbb{Z} : x\mathscr{R}y \iff x \equiv y[n]$$

وتقرأ: x يوافق y بالترديد n.
أو أن:

$$\forall x,y \in \mathbb{Z} : x\mathscr{R}y \iff n \text{ مضاعف لـ } (x-y)$$

أو بعبارة أخري:

$$\forall x,y \in \mathbb{Z} : x\mathscr{R}y \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = y+nk$$

نتأكد وبسهولة أن $\mathscr{R}$ علاقة تكافؤ.
نرمز بـ $\dot{a}$ لعنصر التكافؤ للعنصر a ، المعرف كمايلي:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \{b,\ b\mathscr{R}a\}\\ &= \{b,\ \exists k \in \mathbb{Z} : b = a+nk\}\\ &= \{a+nk \mid k \in \mathbb{Z}\}\\ &= a+n\mathbb{Z}\end{aligned}$$

ولدينا:

$$n \equiv 0[n],\ n+1 \equiv 1[n],\ n+2 \equiv 2[n],\ \dots$$

وبتالي:

$$\dot{0}=\dot{n}, \dot{1}=\widehat{\dot{n+1}}, \dot{2}=\widehat{\dot{n+2}}, \dots$$

إذن مجموعة أصناف التكافؤ هي:

$$\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dots, \widehat{\dot{n-1}}\}$$

التي نرمز لها بالرمز $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$. نأخذ مثلا $n = 7$.

$$\begin{aligned}
\dot{0} &= \{\ldots,-21,-14,-7,0,7,14,21,\ldots\} = 7\mathbb{Z} \\
\dot{1} &= \{\ldots,-20,-13,-6,1,8,15,22,\ldots\} = 1+7\mathbb{Z} \\
&\vdots \\
\dot{6} &= \{\ldots,-14,-8,-1,6,13,20,27,\ldots\} = 6+7\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}} = \{\dot{0},\dot{1},\dot{2},\dot{3},\dot{4},\dot{5},\dot{6}\}$$

10.3.2 علاقة الترتيب

تعريف 12.3.2:
لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية في مجموعة E.
نقول عن العلاقة $\mathcal{R}$ أنها علاقة ترتيب إذا وفقط إذا كانت إنعكاسية، ضد تناظرية و متعدية.

مثال 11.3.2

نعتبر المجموعة $E = \{a,b,c,d\}$. نعرف العلاقة $\mathcal{R}$ على المجموعة $\mathcal{P}(E)$ كما يلي:

$$\forall X,Y \in \mathcal{P}(E): \qquad X\mathcal{R}Y \iff X \subseteq Y$$

يمكن أن نتحقق بسهولة أن $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب.

11.3.2 الترتيب الكلي والترتيب الجزئي

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب في مجموعة E.

تعريف 13.3.2:
نقول عن العلاقة $\mathcal{R}$ أنها علاقة ترتيب كلي إذا وفقط إذا كان كل عنصرين a,b من E قابلين للمقارنة وفق العلاقة $\mathcal{R}$ أي:

$$.\forall a,b \in E: a\mathcal{R}b \ \vee \ b\mathcal{R}a$$

ملاحظة 3.3.2

إذا لم يكن الترتيب كلي فهو جزئي.

مثال 12.3.2

1. نعتبر المجموعة $E = \{a,b,c,d\}$. نعرف العلاقة $\mathscr{R}$ على المجموعة $\mathscr{P}(E)$ كما يلي:

$$\forall X,Y \in \mathscr{P}(E) \;\; X\mathscr{R}Y \iff X \subseteq Y$$

يمكن أن نتحقق بسهولة أن $\mathscr{R}$ علاقة ترتيب جزئي، ذلك لأن من أجل $X = \{a,b\}$ و $Y = \{a,c\}$ $(Y,X) \notin \mathscr{R}$ و $(X,Y) \notin \mathscr{R}$.

مثال 13.3.2

العلاقة $\mathscr{R}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\forall x,y \in \mathbb{R} : x\mathscr{R}y \iff x \leq y$$

يمكن أن نتحقق بسهولة أن $\mathscr{R}$ علاقة ترتيب. و بما أن $\forall x,y \in \mathbb{R} : x \leq y \vee y \leq x$ فإن:

$$\forall x,y \in \mathbb{R} : x\mathscr{R} \vee y\mathscr{R}x$$

ومنه $\mathscr{R}$ علاقة ترتيب كلي.

12.3.2 المجموعة المرتبة

تعريف 14.3.2: المجموعة المرتبة هي الزوج $P = (E,\mathscr{R})$ أين E مجموعة غير خالية و $\mathscr{R}$ علاقة ترتيب معرف عليها.

1. وإذا كان العلاقة $\mathscr{R}$ ترتيب كلي تسمى المجموعة مرتبة كليا.
2. وإذا كان العلاقة $\mathscr{R}$ ترتيب جزئي تسمى المجموعة مرتبة.

13.3.2 مفهوم المجموعة المحدودة

الحواد العليا والحواد السفلى للمجموعة غير خالية

في كل مايأتي نعتبر $P = (E,\mathscr{R})$ مجموعة مرتبة و $A \subseteq E$ جزء غير خال. فيكون لدينا التعاريف التالية:

تعريف 15.3.2:

1. نقول أن الجزء A محدود من الأعلى (Majorée) إذا تحقق مايلي:

$$\exists a \in E,\ \forall x \in A : x\mathscr{R}a$$

2. نقول أن الجزء A محدود من الأسفل (Minorée) إذا تحقق مايلي:

$$\exists b \in E,\ \forall x \in A : b\mathscr{R}x$$

3. نقول عن الجزء A أنه محدود إذا كان محدود من الأعلى والأسفل.

مثال 14.3.2

ليكن $E=\mathbb{R}$ ، $A=]-\infty,+1[$ ، $B=]-1,+\infty[$ و $\mathscr{R}\equiv\leqslant$.

1. A محدودة من الأعلى لأن:

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-\infty,+1[: x \leqslant a$$

2. B محدودة من الأسفل لأن:

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1,+\infty[: a \leqslant x$$

14.3.2 الحد الأعلى sup

تعريف 16.3.2:
نقول عن عنصر u من E أنه حاد أعلى لـ A إذا كان من أجل كل حاد أعلى a لـ A فإن: $u\mathscr{R}a$. ونكتب $supA=a$.
إذن هو أصغر الحواد العليا.

مثال 15.3.2

لتكن $(\mathbb{R},\leqslant)$ مجموعة مرتبة.
وليكن $A=]-\infty,+1[$ ، $B=]-1,+\infty[$ لدينا:

$$\sup A=\sup]-\infty,+1[=1 \text{ و } \sup B=\sup]-1,+\infty[\in\emptyset$$

.

15.3.2 الحد الأدنى inf

تعريف 17.3.2:
نقول عن عنصر l من E أنه حاد أعلى لـ A إذا كان من أجل كل حاد أدنى b لـ A فإن: $b\mathscr{R}l$. ونكتب $\inf A = b$.
إذن هو أكبر الحواد السفلى.

مثال 16.3.2

لتكن $(\mathbb{R}, \leqslant)$ مجموعة مرتبة.
وليكن $A =]-\infty, +1[$ ، $B =]-1, +\infty[$ لدينا:

$$\inf A = \inf]-\infty, +1[\in \emptyset \quad \text{و} \quad \inf B = \inf]-1, +\infty[= -1$$

.

16.3.2 العنصر الأكبر max

تعريف 18.3.2: نقول عن $a \in A$ أنه عنصر أكبر لـ A إذا تحقق:

$$\forall x \in A : x\mathscr{R}a$$

ونكتب $\max A = a$.

مثال 17.3.2

لتكن $(\mathbb{R}, \leqslant)$ مجموعة مرتبة.
وليكن $A =]-\infty, +1[$ ، $B =]-1, +\infty[$ لدينا:

$$\max A = \max]-\infty, +1[\in \emptyset \quad \text{و} \quad \max B = \max]-1, +\infty[\in \emptyset$$

ولكن:

$$\max]-\infty, +1] = 1$$

17.3.2 العنصر الأصغر min

تعريف 19.3.2: نقول عن $b \in A$ أنه عنصر أصغر لـ A إذا تحقق:

$$\forall x \in A : b\mathscr{R}x$$

ونكتب: $\min A = b$.

مثال 18.3.2

لتكن $(\mathbb{R}, \leqslant)$ مجموعة مرتبة.
وليكن $A =]-\infty, +1[$ ، $B =]-1, +\infty[$ لدينا:

$$\min A = \min]-\infty, +1[\in \emptyset \text{ و } \min B = \min]-1, +\infty[\in \emptyset$$

ولكن:

$$\min[-1, +\infty[= -1$$

4.2 تمارين الفصل الثاني

التمرين 2.1.
برهن مايلي:

1. $\emptyset \subseteq \emptyset$
2. $\emptyset \subseteq E$

التمرين 2.2.
لتكن E مجموعة.
برهن بإستعمال العكس النقيض القضايا التالية:

1. $\forall A, B \in \mathscr{P}(E):$
$(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$
2. $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E):$
$((A \cap B) = (A \cap C)$ و $(A \cup B) = (A \cup C)) \Rightarrow$
$B = C$

التمرين 2.3.
لتكن A, B مجموعتين من $E \neq \emptyset$ برهن أن:
$\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$ و $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$.

التمرين 2.4.
عبر عن المجموعات التالية بمجالات:

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3, 3 + \frac{1}{n^2}\right[\text{ و } I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-2 - \frac{1}{n}, 4 + n^2\right].$$

التمرين 2.5.
عبر عن المجموعات التالية بمجالات:

$$I = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right[\text{ و } J = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n\right]$$

التمرين 2.6.
ليكن $A, B \subset E$. حل المعادلات التالية ذات المجهول $X \subset E$

1. $A \cup X = B$.
2. $A \cap X = B$.

التمرين 2.7.
A و B مجموعتين جزئيتين من E. برهن أن:

1. $(A \Delta B = A \cap B) \iff (A = B = \emptyset)$.
2. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
3. $A \Delta B = B \Delta A$.
4. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
5. $A \Delta B = \emptyset \iff A = B$.
6. $A \Delta C = B \Delta C \iff A = B$.

التمرين 2.8.
في $\mathbb{C}$ نعرف العلاقة $\mathscr{R}$ كمايلي:

$$z \mathscr{R} z' \iff |z| = |z'|.$$

1. برهن أن: $\mathscr{R}$ هي علاقة تكافؤ.
2. أوجد صنف تكافؤ كل عنصر $z \in \mathbb{C}$.

التمرين 2.9.

لتكن $\mathscr{R}$ علاقة ثنائية معرفة على E , تناظرية و متعدية
ما رأيك في الإستدلال التالي؟

$x \mathscr{R} y \Rightarrow y \mathscr{R} x$ لأن $\mathscr{R}$ تناظرية ،

ولدينا أيضا:

$(x \mathscr{R} y$ و $y \mathscr{R} x) \Rightarrow x \mathscr{R} x$ لأن $\mathscr{R}$ متعدية ،

إذن: $\mathscr{R}$ إنعكاسية."

التمرين 2.10.

برهن أن العلاقة $\mathscr{R}$ المعرفة في $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$x \mathscr{R} y \iff x e^y = y e^x$$

هي علاقة تكافؤ. أوجد مجموعة أصناف التكافؤ.

التمريــن 2.11.

نعتبر $(E,\leq)$ مجموعة مرتبة. ونعرف في $\mathscr{P}(E)\setminus\{\emptyset\}$ العلاقة $\prec$ كمايلي:

إذا وفقط إذا كان $X \prec Y$
$(X = Y$ أو $\forall x \in X \ \forall y \in Y: \ x \leq y)$

- تحقق من أنها علاقة ترتيب.

التمريــن 2.12.

نعرف على $\mathbb{R}^2$ العلاقة التالية:

$$(x,y) \ll (x',y') \iff |x'-x| \leq y'-y$$

1. برهن أنها علاقة ترتيب.
2. هل هذا الترتيب كلي؟
3. لتكن

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

أوجد $\sup(A)$.

التمريــن 2.13.

ليكن $\leq$ علاقة ترتيب معرفة على المجموعة E ، و $<$ علاقة ترتيب (تماما) المرفقة للعلاقة الترتيب السابقة ومعرفة كمايلي:

$$x < y \iff x \leq y \text{ و } x \neq y$$

هل العكس $x \leq y$ هو $y < x$ ؟

الفَصل الثالث

التطبيقات

مُحتوى الفَصل

1.3 مفهوم التطبيق والدالة 47

2.3 تساوي تطبيقين 49

3.3 إقتصار وتمديد تطبيق 49

4.3 تركيب التطبيقات 50

5.3 الصورة المباشرة و الصورة العكسية 51

6.3 تباين، غمر وتقابل تطبيق 53

7.3 التطبيق العكسي لتطبيق تقابلي 58

8.3 المجموعات المنتهية والتطبيقات 61

9.3 تمارين الفصل الثالث 65

تم إعداد هذا الفصل إعتماداً على المراجع التالية: [6, 7, 9, 1]

1.3 مفهوم التطبيق والدالة

تعريف 1.1.3:
لتكن E و F مجموعتين غير خاليتين و A جزء غير خال من $E \times F$.
نسمي تطبيق من E نحو F ، كل علاقة ترفق بكل عنصر x من E يوجد عنصرًا وحيدًا y من F حيث الثنائية (x,y) تنتمي إلى A بعبارة اخري:

$$\forall x \in E, \exists! y \in F : (x,y) \in A \subseteq E \times F$$

تعريف 2.1.3:
وإذا كان f تطبيقا معرف على E يأخذ قيمه في F. فإننا نكتب:

$$f = (E,\ F, A) \quad \text{أو} \quad f : x \mapsto f(x) \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} f :\ & E \to F \\ & x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

ونسمي $f(x)$ صورة العنصر x بالتطبيق f.
وإذا كان f ليس تطبيقا يعني توجد صورتين مختلفتين بحيث لهما نفس السابقة. وبعبارة أخرى:

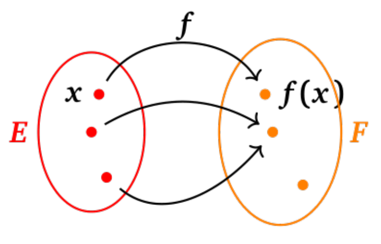
$$f \text{ ليس تطبيق} \Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in E : (x_1 = x_2) \wedge (f(x_1) \neq f(x_2))$$

وبتطبيق تعريف الإستلزام و قانون مورغان نجد التعريف التالي:

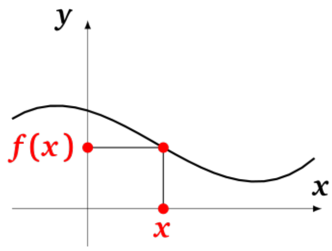
$$\boxed{f \text{ تطبيق} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in E : \quad x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)}$$

∴ سنقوم بتمثيل التطبيقات بنوعين من الرسوم التوضيحية التالية:

1. يتم تخطيط مجموعة البداية (ووصول واحد) بواسطة شكل بيضاوي من عناصرها نقاط. العبارة $x \mapsto f(x)$ ممثلة بسهم. مثلاً



2. التمثيل الآخر هو تمثيل الدوال المستمرة من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ (أو مجموعات جزئية من $\mathbb{R}$). يتم تمثيل مجموعة البداية $\mathbb{R}$ بمحور الإحداثي (xx') ومحور الوصول بواسطة المحور (yy') . العبارة $x \mapsto f(x)$ ممثلة بالنقطة $(x, f(x))$



مثال 1.1.3

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x+1$$

f تطبيق .

ترميز 1.3.1.

1. نرمز بـ $\mathscr{F}(E,F)$ لمجموعة التطبيقات من E في F.

$$\mathscr{F}(E,F) = \{f: E \to F \text{ تطبيق} f\}$$

2. نرمز بـ Id_E للتطبيق الحيادي في E والمعرف كما يلي:

$$\mathrm{Id}_E: E \to E$$
$$x \mapsto \mathrm{Id}_E(x) = x$$

الدالة

تعريف 3.1.3:
نسمي دالة من E نحو F ، كل علاقة ترفق بكل عنصر x من E عنصرا واحدًا على الأكثر y من F حيث الثنائية (x,y) تنتمي إلى A.

ملاحظة 1.1.3

1. كل تطبيق هو دالة والعكس غير صحيح مثلا:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

هذه العلاقة ليست تطبيق لأن 0 ليس له صورة بالدالة f.

2. كل دالة معرفة على مجموعة تعريفها هي تطبيق.

2.3 تساوي تطبيقين

تعريف 1.2.3:
ليكن $f : E \to F$ و $g : E' \to F'$ تطبيقين. نقول عن التطبيقين f و g أنهما متساويان إذا وفقط إذا كان تحقق:

$$\begin{cases} (E = E') \wedge (F = F') \\ \wedge \\ \forall x \in E\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

3.3 إقتصار وتمديد تطبيق

تعريف 1.3.3:
ليكن f تطبيق من E في F، و A جزء غير خال من المجموعة E. نسمي اقتصار التطبيق f على المجموعة A التطبيق الذي نرمز له بالرمز $f_{/A}$ المعرف كما يلي:

$$\begin{aligned} f_{/A} :\ & A \to F \\ & x \mapsto f_{/A}(x) = f(x) \end{aligned}$$

ونقول عندئذ إن التطبيق f تمديد التطبيق $f_{/A}$ على المجموعة E.

مثال 1.3.3

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x} & ,\ x \neq 0 \\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} f_{/\mathbb{R}^*} :\ & \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f_{/\mathbb{R}^*}(x) = \frac{\cos x - 1}{x} \end{aligned}$$

التطبيق $f_{/\mathbb{R}^*}$ هو اقتصار التطبيق f على $\mathbb{R}^*$.
التطبيق f هو تمديد التطبيق $f_{/\mathbb{R}^*}$ على $\mathbb{R}$.

4.3 تركيب التطبيقات

تعريف 1.4.3:
ليكن $f : E \to F$ و $g : F \to G$ تطبيقين. نسمي تركيب التطبيقين f و g التطبيق الذي نرمز له بالرمز $g \circ f$ والمعرف كما يلي:

$$\begin{aligned} gof :\ & E \to G \\ & x \mapsto g \circ f(x) \end{aligned}$$

حيث:

$$\forall x \in E : g \circ f(x) = g[f(x)]$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r] \arrow[r, bend left, "g"] & G \end{tikzcd}$$

وتقرأ: f تركيب g أو تقرأ g رو f.

ملاحظة 1.4.3

إن تركيب $g \circ f$ لا يكون معرفا إلا إذا كانت مجموعة وصول f هي نفسها أوجزء من مجموعة البدأ التطبيق g لاحظ الشكل السابق .

تطبيق محلول 1.4.3

ليكن التطبيقين f, g كمايلي:

$$\begin{array}{cccc} f &]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}, \qquad \begin{array}{cccc} g &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}.$$

إذن $g \circ f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ و من أجل $x \in]0,+\infty[$ لدينا:

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{1-x}{1+x} = -g(x).$$

ملاحظة 2.4.3

ليكن $f : E \to F$ تطبيق. لدينا:

$$\forall x \in E : f \circ \mathrm{Id}_E(x) = \mathrm{Id}_F \circ f(x) = f(x)$$

مثال 1.4.3

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث: $f(x) = 2x + 1$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث: $g(x) = x^2 + 1$

لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R} : fog(x) = f[g(x)] = f(x^2+1) = 2(x^2+1)+1 = 2x^2+3$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : gof(x) = g[f(x)] = g(2x+1) = (2x+1)^2+1 = 4x^2+4x+2$$

ومنه $f \circ g \neq g \circ f$. وبالتالي تركيب التطبيقات ليس تبديلي.

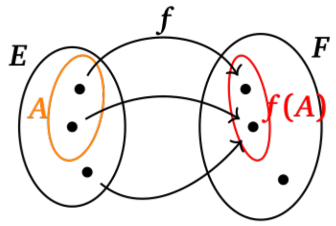
5.3 الصورة المباشرة و الصورة العكسية

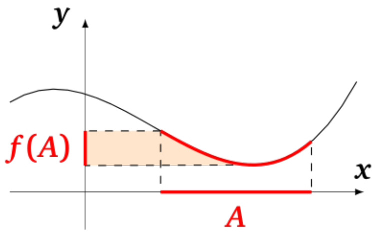
1.5.3 الصورة المباشرة

لتكن E و F مجموعتين غير خالتين.

تعريف 1.5.3: ليكن $f : E \to F$ تطبيق. و A مجموعة جزئية من E. نسمي الصورة المباشرة للجزء A بالتطبيق f المجموعة الجزئية من F و المعرفة كما يلي:

$$f(A) = \{f(x) \,/ x \in A\}.$$





ملاحظة 1.5.3

1. $f(E) \subseteq F$
2. $f(\{x\}) = \{f(x)\} \subseteq F$

خواص 1.5.3.
ليكن $f : E \to F$ تطبيق. و A و B مجموعتين جزئيتين من E.

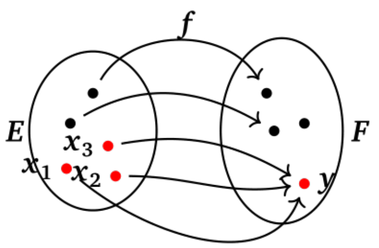
1. $f(\emptyset) = \emptyset$.
2. $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$.
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
4. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

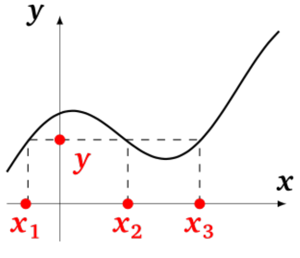
برهان.
يترك للطالب. □

2.5.3 الصورة العكسية

تعريف 2.5.3: ليكن $f : E \to F$ تطبيق. و B مجموعة جزئية من F. نسمي الصورة العكسية للجزء B بالتطبيق f المجموعة الجزئية من E و المعرفة كما يلي:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$





ملاحظة 2.5.3

1. $f^{-1}(F) \subseteq E$

خواص 2.5.3.

ليكن $f : E \to F$ تطبيق. و A و B مجموعتين جزئيتين من F.

1. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
2. $f^{-1}(F) = E$.
3. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
4. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

برهان.
يترك للطالب. □

تطبيق للطالب 1.5.3

أجزاء التطبيق منفصلة.

1. من أجل التطبيقين
$f, g : E \to F$، ماهو نفي القضية $f = g$ ؟
2. أرسم منحى الدالة $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ المعرفة كمايلي: $n \mapsto \dfrac{4n+1}{n+1}$.
3. ليكن $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرف كمايلي: $f(x) = x^2$، $g(x) = x$، $h(x) = x^3$.
أحسب $f \circ (g \circ h)$ و $(f \circ g) \circ h$.
4. من أجل الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة كمايلي: $x \mapsto x^2$.
أوجد المجموعات التالية: $f([0,1[)$, $f(\mathbb{R})$، $f(]-1,2[)$، $f^{-1}([1,2[)$، $f^{-1}([-1,1])$، $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$.

6.3 تباين، غمر وتقابل تطبيق

ليكن $f : E \to F$ تطبيقا.

1.6.3 التطبيق المتباين

تعريف 1.6.3: نقول عن التطبيق f أنه متباين إذا وفقط إذا كان لكل صورة سابقة واحدة على الأكثر. وأنه ليس متباين إذا وفقط إذا وجدت سابقتين مختلفتين لهما نفس الصورة وبعبارة أخرى:

$$\exists x_1, x_2 \in E : (x_1 \neq x_2) \wedge (f(x_1) = f(x_2)) \Leftrightarrow \text{ليس تطبيق متباين } f$$

وبتطبيق قانون النفي، تعريف الإستلزام و قانون مورغان نجد التعريف التالي:

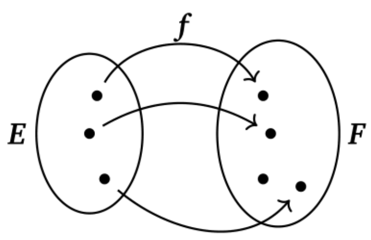
$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in E : \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow \text{تطبيق متباين } f}$$

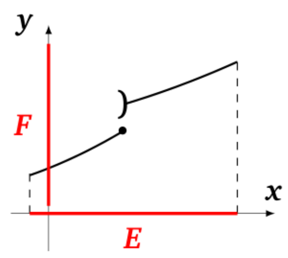
ملاحظة 1.6.3

نقول عن التطبيق f أنه متباين إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(F) = E$

مثال 1.6.3

هذا تمثيل وعرض لتطبيق متباين





مثال 2.6.3

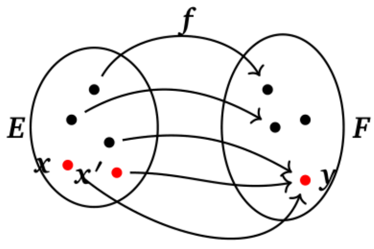
1. التطبيق $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ ، حيث : $f(x) = \log x$ تطبيق متباين لأن

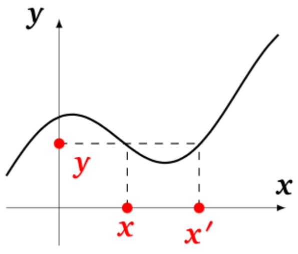
$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \quad &\Rightarrow \quad \log x_1 = \log x_2 \\ &\Rightarrow \quad e^{\log x_1} = e^{\log x_2} \\ &\Rightarrow \quad x_1 = x_2 \end{aligned}$$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث: $f(x) = |x|$ تطبيق ليس متباين لأن $f(1) = f(-1)$ و $1 \neq -1$.

مثال 3.6.3

هذه الدالة ليست تطبيق متباين لأن توجد صورة لها أكثر من سابقة.





2.6.3 التطبيق الغامر

تعريف 2.6.3: نقول عن التطبيق f أنه غامر إذا وفقط إذا كان لكل صورة سابقة واحدة على الأقل. وبعبارة أخرى:

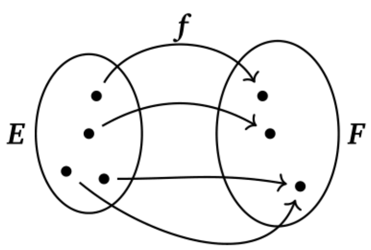
$$f \text{ تطبيق غامر } \Leftrightarrow \forall y \in F : \exists x \in E : y = f(x)$$

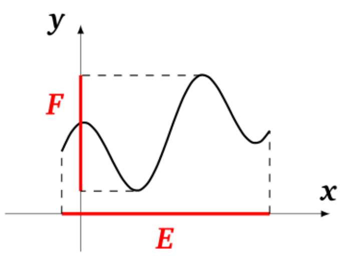
ملاحظة 2.6.3

نقول عن التطبيق f أنه غامر إذا وفقط إذا كان $f(E) = F$

مثال 4.6.3

عرض وتمثيل تطبيق غامر.





مثال 5.6.3

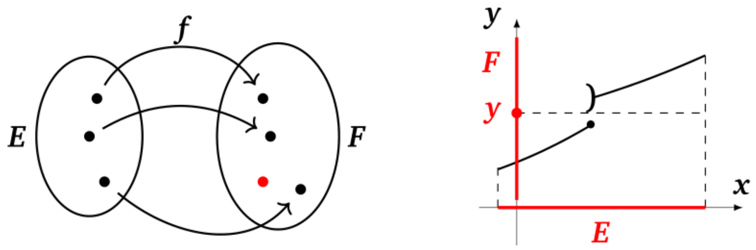
1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$، حيث:$f_1(x) = x^2$ تطبيق غامر لأن

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R} \left(x = \sqrt{y} \text{ أو } x = -\sqrt{y}\right) : y = x^2$$

2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث: $f_2(x) = |x|$ تطبيق ليس غامر لأنه من أجل $y = -1$ ليس للمعادلة $y = f_2(x)$ حل في $\mathbb{R}$.
(ليس للعنصر $y = -1$ سابقة في $\mathbb{R}$ بالتطبيق f_2).

مثال 6.6.3

هذة التطبيق ليست تطبيق غامر.



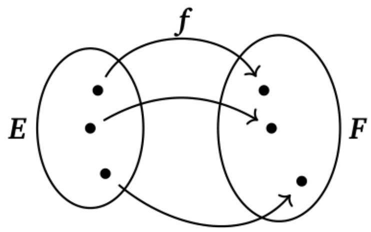
3.6.3 التطبيق التقابلي

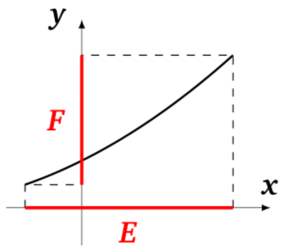
تعريف 3.6.3: نقول عن التطبيق f أنه تقابلي إذا وفقط إذا كان لكل صورة سابقة واحدة ووحيدة.
أو نقول عن التطبيق f أنه تقابلي إذا وفقط إذا كان متبايناًو غامراً
وبعبارة أخرى:

$$f \text{ تطبيق تقابلي } \Leftrightarrow \forall y \in F : \exists! x \in E : y = f(x)$$

مثال 7.6.3

عرض وتمثيل تطبيق تقابلي:





مثال 8.6.3

ليكن التطبيق $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ ، حيث: $f(x)=\frac{1}{x}$ تطبيق تقابلي لأن من أجل $x_1,x_2\in\mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} f(x_1)=f(x_2) &\Rightarrow \frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}\\ &\Rightarrow x_1=x_2 \end{aligned}$$

ومنه f متباين. هذا من جهة ومن جهة أخرى ندرس غمر التطبيق.

من أجل $y\in\mathbb{R}^*$ لدينا:

$$y=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}$$

ومنه f غامر ، وبالتالي: f تقابلي .

نتائج 1.6.3.

لدراسة تباين وغمر وتقابل تطبيق $f:E\to F$ ندرس حلول المعادلة $y=f(x)$ كمايلي:

1. إذا كانت المعادلة $y=f(x)$ تقبل حل على الأقل في E فالتطبيق f غامر.
2. إذا كانت المعادلة $y=f(x)$ تقبل حل على الأكثر في E فالتطبيق f متباين.
3. إذا كانت المعادلة $y=f(x)$ تقبل حل وحيد في E فالتطبيق f تقابلي.

تطبيق للطالب 1.6.3

أدرس غمر وتباين مايلي:

$$f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = |x^2 + x - 1|$$

ملاحظة 3.6.3

كل تطبيق مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$ أو جزء منه فهو تقابل.

7.3 التطبيق العكسي لتطبيق تقابلي

نظرية 1.7.3: ليكن $f : E \to F$ تطبيق.

1. التطبيق f تقابلي إذا وفقط إذا كان وجد تطبيق $g : F \to E$ حيث:

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \text{ و } f \circ g = \mathrm{Id}_F.$$

2. إذا كان f تطبيق تقابلي فإن g وحيد وتقابلي أيضا. التطبيق g يسمى التطبيق العكسي لـ f و نرمز له بـ f^{-1} بالإضافة إلى ذلك لدينا: $(f^{-1})^{-1} = f$.

برهان.

1. (ا) لنفرض أن f تطبيق تقابلي و لننشئ تطبيقا $g : F \to E$. بما أن f تقابل إذن من أجل كل عنصر $y \in F$ يوجد عنصر وحيد $x \in E$ حيث: $y = f(x)$ نضع إذن $g(y) = x$، لدينا:

$$\forall y \in F : f(g(y)) = f(x) = y$$

ومنه $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. ثم نركب من اليمين بـ f فنجد:

$$f \circ g \circ f = \mathrm{Id}_F o f$$

ومنه $\forall x \in E$ لدينا:

$$f(g \circ f(x)) = f(x)$$

وبما أن f متباين نجد:

$$g \circ f(x) = x$$

ومنه $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

(ب) عكسيا نفرض أن g موجود ويحقق $g : F \to E$ حيث:

$$f \circ g = \mathrm{Id}_F \text{ و } g \circ f = \mathrm{Id}_E$$

ولنبرهن أن f تقابل. من أجل ذلك ليكن $y \in$، نضع $x = g(y)$ ومنه

$$f(x) = f(g(y)) = fog(y) = \mathrm{Id}_F(y) = y$$

ومنه f غامر. هذا من جهة و من جهة ثانية.
ليكن $x, x' \in E$ حيث: $f(x) = f(x')$، لنركب بـ g فنجد:

$$g \circ f(x) = gof(x')$$

ومنه

$$\mathrm{Id}_F(x) = \mathrm{Id}_F(x')$$

ومنه $x = x'$ وبالتالي f تطبيق متباين.

2. إذا كان f تقابل فان g كذلك تقابل حسب (1.) لنبرهن وحدانية g من أجل ذلك نفرض وجود تطبيق اخر $h : F \to E$ يحقق :

$$f \circ h = \mathrm{Id}_F \text{ و } h \circ f = \mathrm{Id}_E$$

ومنه من أجل $y \in F$، وبما أن:

$$f \circ h = f \circ g = \mathrm{Id}_F$$

فإن

$$f(h(y)) = (g(y))$$

و لكون f متباين فإن:

$$h(y) = g(y)$$

ومنه $h = g$.

□

نظريــة 2.7.3:
ليكن $f : E \to F$ و $g : F \to G$ تطبيقين تقابليين. التطبيق $g \circ f$ تقابلي و تطبيقه العكسي:
$$(g o f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

برهان.
بما أن f تقابل حسب النظرية السابقة يوجد تطبيق $u : F \to E$ حيث:
$$f \circ u = \mathrm{Id}_F \text{ و } u \circ f = \mathrm{Id}_E$$
و يوجد تطبيق $v : G \to F$ حيث:
$$g \circ v = \mathrm{Id}_G \text{ و } v \circ g = \mathrm{Id}_F$$
لدينا إذا:
$$(g \circ f) \circ (u \circ v) = g \circ (f \circ u) \circ v = g \circ \mathrm{Id}_F \circ v = g \circ v = \mathrm{Id}_G$$
و
$$(u \circ v) \circ (g \circ f) = u \circ (v \circ g) \circ f = u \circ f = \mathrm{Id}_E$$
ومنه $g \circ f$ تقابل وتطبيقه العكسي $u \circ v$ وبما أن u التطبيق العكسي لـ f و v التطبيق العكسي لـ g فإن:
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$
□

1.7.3 المجموعات المنتهية

تعريف 1.7.3: تكون المجموعة E مجموعة منتهية إذا وجد عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ و تطبيق تقابلي f من E في المجموعة $\{1, 2, \ldots, n\}$ ويسمي n أصلي المجموعة E. ونرمز لذلك: $|E| = n$ أو $\mathrm{Card}(E) = n$.

مثال 1.7.3

1. $E = \{$أحمر, أزرق, أخضر$\}$ مجموعة متقابلة مع المجموعة $\{1, 2, 3\}$، إذن $\mathrm{Card}(E) = 3$.
2. $\mathbb{N}$ مجموعة غير منتهية.
3. $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$

خواص 1.7.3.

1. إذا كان A مجموعة منتهية و $B \subseteq A$ فإن B منتهية و

$$\mathrm{Card}(B) \leqslant \mathrm{Card}(A)$$

.

2. إذا كان A و B مجموعتين منهيتين ومنفصلتين $(A \cap B = \emptyset)$ فإن:

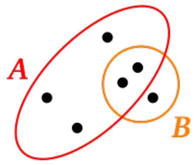
$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$$

.

3. إذا كان A مجموعة منتهية و $B \subseteq A$ فإن $\mathrm{Card}(A-B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(B)$، وإذا كان $B \subseteq A$ و $B = A$ فإن $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$.

4. وفي الحالة العامة:

$$\boxed{\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)}$$



برهان.
للبرهان على الخاصية الأخير لدينا: $A \cup B = A \cup (B - (A \cap B))$ وحسب الخاصية 2 و 3 نجد:

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(A \cup B) &= \mathrm{Card}(A \cup (B - (A \cap B))) \\ &= \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}((B - (A \cap B))) \\ &= \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B) \end{aligned}$$

□

8.3 المجموعات المنتهية والتطبيقات

قضية 1.8.3. لتكن E و F مجموعتين منتهيتين و $f : E \to F$ تطبيق. عندئذ لدينا:

1. إذا كان f متباين فإن $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.
2. إذا كان f غامر فإن $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.
3. إذا كان f تقابلي فإن $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

برهان.

1. ليكن f متباين.

نضع: $F' = f(E) \subseteq F$ إذن التطبيق $g : E \to F'$ حيث $g(x) = f(x)$ تقابلي. إذن لكل صورة y من F' سابقة وحيدة x من E ، $y = g(x) = f(x)$ إذن:

$$\text{Card}(E) = \text{Card}(F') \leqslant \text{Card}(F)$$

لأن: $F' \subseteq F$ وبالتالي:

$$\text{Card}(E) \leqslant \text{Card}(F)$$

2. ليكن f غامر.
إذن لكل صورة y من F سابقة على الأقل x من E ، إذن:

$$\text{Card}(E) \geqslant \text{Card}(F)$$

3. بتطبيق النتيجة 1 و النتيجة 2 ينتج القضية 3.

□

قضية 2.8.3. لتكن E مجموعة منتهية و $f : E \to E$ تطبيق. عندئذ لدينا القضايا التالية متكافئة:

i. f متباين.

ii. f غامر.

iii. f تقابلي.

برهان. نبرهن الإستلزامات التالية:

$$i \Rightarrow ii \Rightarrow iii \Rightarrow i$$

1. $i \Rightarrow ii$
نفرض أن f متباين. لدينا $E \subseteq f(E)$ ولدينا من تعريف التطبيق أن: $f(E) \subseteq F = E$ ومنه: $f(E) = E$ إذن f غامر.

2. $ii \Rightarrow iii$
نفرض أن f غامر. لبرهان أن f تقابلي يكفي أن نبرهن أن f متباين. (نبرهن بالخلف.)
نفرض أن f ليس متباين يعني: $\text{Card}(f(E)) < \text{Card}(E)$ ، (توجد سابقتين لهم نفس الصورة). ولكن f غامر يعني: $f(E) = E$ وبالتالي: $\text{Card}(E) < \text{Card}(E)$ وهذ تناقض.

3. $iii \Rightarrow i$
بنفس الطريقة.

□

1.8.3 عدد التطبيقات

لتكن E و F مجموعتين غير خاليتين ومنتهيتين حيث: $\mathrm{Card}(E) = n$ و $\mathrm{Card}(F) = m$ عندئذ لدينا:

قضية 3.8.3. عدد التطبيقات المختلفة من E نحو F يساوي: m^n .

برهان. نعتبر أن $\mathrm{Card}(F) = m$ مثبت. ونبرهن بالتراجع من أجل $\mathrm{Card}(E) = n$.
نعتبر القضية التالية:

$$P(n): \text{ عدد التطبيقات المختلفة من } E \text{ نحو } F \text{ يساوي } m^n$$

1. من أجل: $n = 1$،
فهناك m تطبيق من E نحو F، يعني عدد التطبيقات المختلفة من E نحو F يساوي $m^1 = m$،
وبالتالي $P(1)$ صحيحة.

2. نفرض أن الخاصية صحيحة حتى الرتبة n، أي أن:

$$P(n): \text{ عدد التطبيقات المختلفة من } E \text{ نحو } F \text{ يساوي } m^n$$

ونبرهن صحتها من أجل $n+1$: أي نبرهن:

$$P(n+1): \text{ عدد التطبيقات المختلفة من } E \text{ نحو } F \text{ يساوي } m^{n+1}$$

مع أن: $\mathrm{Card}(E) = n+1$.
$\therefore$ نضع: $E' = E - \{a\}$.
إذن حسب فرضية التراجع ف عدد التطبيقات المختلفة من E' نحو F يساوي m^n.
يمكن لكل تطبيق $f: E' \to F$ تمديده $f: E \to F$ عن طريق اختيار صورة لـ a. إذن عدد الصور المشكلة من العنصر a من E يساوي m. وبالتالي عدد التطبيقات المختلفة من E نحو F يساوي $m^n \times m$، يعني m^{n+1}، وأخيراً: $P(n+1)$ صحيحة.

□

تطبيق للطالب 1.8.3

لتكن E و F مجموعتين غير خاليتين ومنتهيتين حيث: $\mathrm{Card}(E) = n$ و $\mathrm{Card}(F) = m$. برهن مايلي:

1. عدد التطبيقات المتباينة يساوي:

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))$$

2. إذا كان $E = F$، فإن عدد التطبيقات الغامرة في E يساوي: $n!$

3. توجد 2^n مجموعة جزئية للمجموعة E.

$$\mathrm{Card}\mathscr{P}(E) = 2^n$$

9.3 تمارين الفصل الثالث

التمريــن 3.1.
ليكن E و F مجموعتين، ونعرف التطبيق

$$f : E \to F$$

برهن أن:

1. $\forall A, B \in \mathscr{P}(E) :$
$(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$
2. $\forall A, B \in \mathscr{P}(E) : f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
3. $\forall A, B \in \mathscr{P}(E) : f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
4. $\forall A, B \in \mathscr{P}(E) :$
$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
5. $\forall A, B \in \mathscr{P}(E) : f^{-1}(F \backslash A) = E \backslash f^{-1}(A)$

التمريــن 3.2.
ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث:
$f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2 - 3$.
هل $f \circ g = g \circ f$ ؟

التمريــن 3.3.
ليكن التطبيق التالي المعرف من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$،
$f : x \mapsto x^2 + 1$.

1. أوجد المجموعات التالية:
$f([-3,-1])$، $f([-2,1])$،
$f([-3,-1] \cup [-2,1])$
و $f([-3,-1] \cap [-2,1])$. وقارن بينهما.
2. نفس السؤال بالنسبة للمجموعات التالية:
$f^{-1}(]-\infty, 2])$، $f^{-1}([1, +\infty[)$،
$f^{-1}(]-\infty, 2] \cup [1, +\infty[)$
و $f^{-1}(]-\infty, 2] \cap [1, +\infty[)$.

التمريــن 3.4.
ليكن $f : E \to F$ تطبيق، $A, A' \subset E$ و $B, B' \subset F$.

1. بسط مايلي:
$f(f^{-1}(f(A)))$ و $f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.
2. برهن أن:
$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
3. قارن بين:
$f(A \Delta A')$ و $f(A) \Delta f(A')$.
4. قارن بين:
$f^{-1}(B \Delta B')$ و $f^{-1}(B) \Delta f^{-1}(B')$.
5. تحت أي شرط على f يكون لدينا :
$\forall A \subset E, \ f(E \backslash A) = F \backslash f(A)$ ؟

التمريــن 3.5.
أعط أمثلة عن تطبيقات معرفة من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ (ثم من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}$) متباين وليس غامر، ثم غامر وليس متباين.

التمريــن 3.6.
ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرف كمايلي $f(x) = x^3 - x$.
f هل متباين ؟ غامر؟ أوجد $f^{-1}([-1,1])$ ثم $f(\mathbb{R}_+)$.

التمريــن 3.7.
ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرف كمايلي:

$$f(x) = \frac{2x}{(1 + x^2)}$$

1. هل f متباين؟ غامر؟
2. برهن أن: $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
3. برهن على أن الإقتصار $g : [-1,1] \to [-1,1]$ $g(x) = f(x)$ هو تطبيق متباين.

التمريــن 3.8.
لتكن لدينا المجموعات A, B, C و D والتطبيقات:
$f : A \to B$ ، $g : B \to C$ و $h : C \to D$.
برهن أن:

.1

$$f \text{ متباين } \Rightarrow g\circ f \text{ متباين}$$

.2

$$g\text{غامر } \Rightarrow g\circ f \text{ غامر}$$

.3

$$\left(g,f \text{ و } h \text{ تقابلي}\right) \Leftrightarrow \left(h\circ g \text{ و } g\circ f \text{ تقابلي}\right)$$

التمريـــن 3.9.

ليكن التطبيق: $f: X\to Y$. برهن مايلي:

.1

$$\forall B\subset Y:\ f(f^{-1}(B))=B\cap f(X)$$

.2 f غامر إذا وفقط إذا كان

$$\forall B\subset Y:\ f(f^{-1}(B))=B$$

.3 f متباين إذا وفقط إذا كان

$$\forall A\subset X:\ f^{-1}(f(A))=A$$

.4 f تقابلي إذا وفقط إذا كان

$$\forall A\subset X:\ f(\complement A)=\complement f(A)$$

التمريـــن 3.10.

ليكن $f: X\to Y$. برهن أن القضايا التالية متكافئة :

.i f متباين.

.ii $\forall A,B\subset X:$

$$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$$

.iii $\forall A,B\subset X:$

$$A\cap B=\emptyset\Rightarrow f(A)\cap f(B)=\emptyset$$

التمريـــن 3.11.

ليكن $f:[0,1]\to[0,1]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x & ,\ x\in[0,1]\cap\mathbb{Q},\\ 1-x & ,\ x\notin[0,1]\cap\mathbb{Q}.\end{cases}$$

برهن أن: $f\circ f=\mathrm{Id}$.

التمريـــن 3.12.

من أجل $z\neq i$ ، نضع: $f(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$.

برهن أن f تطبيق تقابلي من المجموعة $D=\{z\in\mathbb{C}/\ |z|<1\}$ في المجموعة $P=\{z\in\mathbb{C}/\ \Re(z)<0\}$.

أوجد: f^{-1}.

التمريـــن 3.13.

ليكن A,B مجموعتين من المجموعة E.

نرمز لـ $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

من أجل E مجموعة منتهية برهن أن:

$$\mathrm{Card}\,A\Delta B=\mathrm{Card}\,A+\mathrm{Card}\,B-2\mathrm{Card}\,A\cap B.$$

الفَصل الرابع

حول البنى الجبرية الأساسية

مُحتوى الفَصل

1.4 الزمرة 68

2.4 الحلقة 75

3.4 الحقل 81

4.4 تمارين الفصل الرابع 83

تم إعداد هذا الفصل إعتماداً على المراجع التالية: [6, 7, 9, 1]

تمهيد

G مجموعة غير خالية، إذا زودنا المجموعة G بعدد منتهي من العمليات الداخلية أوالخارجية التي تحقق خواص معينة نكون بذلك قد أنشأنا أو كوّنا بنية جبريّة على مجموعة G.
كما نسمي (عملية داخلية) قانون تركيب داخلي $*$ على G كل تطبيق من $G\times G$ في G ونكتب:

$$\begin{aligned} *:\ G\times G &\to G\\ (a,b) &\mapsto a*b \end{aligned}$$

فمثلا العملية $+$ داخلي في $\mathbb{N}$، ولكن العملية $-$ ليس داخلي في $\mathbb{N}$، ونسمي $(G,*)$ بنية جبرية.

1.4 الزمرة

تعريف 1.1.4: تكون البنية الجبرية $(G,*)$ زمرة إذا وفقط إذا كان تحقق مايلي:

1. ($*$ تجميعية) $\iff \forall(x,y,z)\in E^3:(x*y)*z=x*(y*z)$
2. (العملية $*$ تقبل e عنصر حيادي) $\iff \exists e\in G:\forall x\in G:x*e=e*x=x$
3. (العملية $*$ تقبل لكل عنصر x نظيره x') $\iff \forall x\in G:\exists x'\in G:x*x'=x'*x=e$

- وأكثر من ذلك إذا كانت العميلية $*$ تحقق خاصية التبديل

$$\forall x,y\in G:x*y=y*x$$

نقول أن $(G,*)$ زمرة تبديلية (أبيلية). كما يمكن أن نعبر عن الزمرة بدون عملية بـ G.

ملاحظة 1.1.4

1. العنصر الحيادي e وحيد: وفعلا، نفرض أنه يوجد عنصر حيادي أخر وليكن e'، إذن لدينا:

لأن e' عنصر حيادي	:	$e'*e=e$
لأن e عنصر حيادي	:	$e'=e'*e$
نعوض قيمة e من المعادلة السابقة	:	$\Leftrightarrow\ e'=e'*(e'*e)$
* تجميعية	:	$\Leftrightarrow\ e'=(e'*e')*e$
e' عنصر حيادي	:	$\Leftrightarrow\ e'=e'*e$
		$\Leftrightarrow\ e'=e$

2. العنصر $x\in G$ يملك عنصر نظير $x'\in G$ واحد وحيد، وفعلا، نفرض أنه يوجد نظير أخر لـ x

وهو x''. إذن لدينا:

$$\begin{aligned} x * x'' = e &\Leftrightarrow x' * (x * x'') = x' \\ &\Leftrightarrow (x' * x) * x'' = x' \quad \text{تجميعية } * \\ &\Leftrightarrow e * x'' = x' \quad \text{عنصر حيادي } e \\ &\Leftrightarrow x'' = x' \end{aligned}$$

أمثلة 1.1.4

1. $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{Q}^*, \times)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ زمر تبديلية.
2. $(\mathbb{Z}, \times)$ ليست زمرة لأن 3 مثلا ليس له نظير في $\mathbb{Z}$.
3. $(\mathbb{N}, +)$ ليست زمرة لأن 5 مثلا ليس له نظير في $\mathbb{N}$.

1.1.4 قواعد القوى والحساب في الزمرة

نعتبر $(G, *)$ زمرة.
من أجل $x \in G$ نرمز لـ $x * x$ بالرمز x^2. وأكثر من ذلك لدينا:

.1

$$x^n = \underbrace{x * x * x * \cdots * x}_{\text{n مرة}}$$

.2

$$x^0 = e$$

.3

$$x^{-n} = \underbrace{x^{-1} * x^{-1} * x^{-1} * \cdots * x^{-1}}_{\text{n مرة}}$$

x^{-1} نظير x

قواعد الحساب في الزمرة هي نفسها قواعد حساب لقوى الأعداد الحقيقية. فـ من أجل $x, y \in G$ و $n, m \in \mathbb{Z}$ فإنه لدينا الخواص التالية:

خواص 1.1.4.

.1

$$x^{n+m} = x^n * x^m$$

.2
$$(x^n)^m = x^{n\times m}$$

.3
$$(x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}$$

ننتبه لترتيب العناصر.

4. بصفة عامة:
$$(x*y)^n \neq x^n*y^n$$
نستثني من ذلك الحالة التي يكون فيه قانون التركيب الداخلي $*$ تبديلي. أي إذا كانت $(G,*)$ تبديلية فإن:
$$(x*y)^n = x^n*y^n$$

5. قانون الإختزال من اليمين واليسار محققين، أي أنه:
$$a*x = a*y \Rightarrow x = y$$
و
$$x*a = y*a \Rightarrow x = y$$

برهان. يترك للطالب. □

تطبيق للطالب 1.1.4

1. برهن البنية الجبرية التالية $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ هي زمرة تبديلية.
2. ليكن $*$ تطبيق معرف على $]-1,1[$ كمايلي:
$$\forall x,y\in\,]-1,1[\,: x*y = \frac{x+y}{1+xy}$$
(ا) بين أن $*$ قانون تركيب داخلي و تبديلي.
(ب) بين أن $(]-1,1[,*)$ زمرة تبديلية.
3. نعتبر $(G,*)$ زمرة وليكن $x,y,z\in G$. برهن مايلي:
(ا) $x*y = x*z \Rightarrow y = z$.
(ب) أوجد $(x^{-1})^{-1}$.
(ج) إذا كان $x^n = e$ أوجد نظير x.

ترميز 1.4.1.

إذا رمزنا لقانون التركيب الداخلي بـ $+$ فإننا:

- نعتمد الترميز $-x$ للإشارة لنظير عنصر x.
- نرمز للعنصر $x+x+\cdots+x$ (n مرة) بـnx.
- إذا كان للعنصر x نظير نضع $-nx=n(-x)=-(nx)$.

2.1.4 الزمرة الجزئية

تعريف 2.1.4: لتكن $(G,*)$ زمرة. نقول عن مجموعة جزئية H من G أنها زمرة جزئية من G إذا تحقق:

1. العنصر الحيادي ينتمي إلى H،
2. المجموعة H مستقرة بالنسبة للقانون $*$، يعني: $\forall x,y\in H:\ x*y\in H$،
3. لكل عنصر من H نظير في H، يعني: $\forall h\in H,\ h^{-1}\in H$.

مثال 1.1.4

1. إذا كانت $(G,*)$ زمرة فإن $\{e\}$ و G زمر جزئية من G.
2. $(\mathbb{Z},+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Q},+)$.
3. $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{C}^*,\times)$.

مصطلحات 1.4.1. نكتب $H\leq G$ للدلالة على أن $(H,*)$ زمرة جزئية من زمرة $(G,*)$.

نظرية 1.1.4: إذا كانت $(H,*)$ زمرة جزئية من زمرة $(G,*)$ فإن $(H,*)$ لها بنية زمرة.

برهان. يترك للطالب. □

ملاحظة 2.1.4

بناء على النظرية السابقة

فإذا

نظريــة 2.1.4: الزمرة الجزئية الوحيدة في الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ هي من الشكل: $(n\mathbb{Z},+)$ مع n عدد طبيعي.

برهان.
المجموعة:

$$n\mathbb{Z}=\{\quad \dots,-2n,-n,0,n,2n,\dots\quad\}$$

هي مضاعفات العدد n.

1. أولا نثبت أن $n\mathbb{Z}$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z},+)$.

(ا) لدينا: $0=n\times 0$ وبالتالي: $0\in n\mathbb{Z}$.

(ب) ليكن $x,y\in n\mathbb{Z}$، لدينا:

$$\begin{aligned} x\in n\mathbb{Z} &\Leftrightarrow \exists k_1\in\mathbb{Z}: x=nk_1\\ y\in n\mathbb{Z} &\Leftrightarrow \exists k_2\in\mathbb{Z}: x=nk_2\end{aligned}$$

وبالتالي:

$$x+y=nk_1+nk_2=n(k_1+k_2)=nk \quad\Leftrightarrow\quad \exists(k=k_1+k_2)\in\mathbb{Z}: x+y=nk$$

ومنه: $x+y\in n\mathbb{Z}$

(ج) ليكن $x\in n\mathbb{Z}$ لدينا:

$$\begin{aligned} x\in n\mathbb{Z} &\Leftrightarrow \exists h\in\mathbb{Z}: x=nh\\ &\Leftrightarrow \exists h\in\mathbb{Z}: -x=n(-h)\end{aligned}$$

ومنه:

$$\exists k\in\mathbb{Z}: -x=nk \quad\Leftrightarrow\quad -x\in n\mathbb{Z}$$

إذن $n\mathbb{Z}$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z},+)$

2. ثانيا نبرهن أن الزمرة الجزئية الوحيدة في الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ هي من الشكل: $(n\mathbb{Z},+)$.
لتكن H زمرة جزئية من $(\mathbb{Z},+)$ نبرهن أن: $H=n\mathbb{Z}$.
نميز حالتين:

(ا) الحالة الأولى: $n=0$ يعني $H=\{0\}=0\mathbb{Z}$ ومن ثم في هذه الحالة نستطيع أن نكتب: $H=n\mathbb{Z}$.

(ب) الحالة الثانية: $n\neq 0$ يعني $H\neq\{0\}$ وعندها يوجد عنصر $a\in H-\{0\}$ عندئذ. ولكن $-a\in H$ أيضاً . نأخذ في هذه الحالة:

$$n = \min\{h > 0 : h \in H\}$$

إذن: $n > 0$ و $n \in H$ وبالتالي: $-n \in H$ و $2n = n + n \in H$ وأكثر تعميم من أجل $k \in \mathbb{Z}$ لدينا: $nk \in H$. إذن، $n\mathbb{Z} \subseteq H$ هذا من جهة، ومن جهة أخرى نفرض أن: $m \in H$ نجد بالقسمة الإقليديّة زوجاً (q, r) يحقق: $m = nq + r$ بحيث $0 \leqslant r < n$ ، لكن $r = m - nq \in H \cup \mathbb{N}$ ومن تعريف n نستنتج أن: $r = 0$ وبتالي: $m = nq \in n\mathbb{Z}$.
إذن: $H = n\mathbb{Z}$.

□

قضية 1.1.4. إذا كانت $(G, *)$ زمرة و H زمرة جزئية من G فإن $(H, *)$ بنية زمرة وأكثر من ذلك لدينا:

1. العنصر الحيادي في $(H, *)$ هو العنصر الحيادي في $(G, *)$.
2. العنصر النظير لـ h في $(H, *)$ يساوي للعنصر النظير لـ h في $(G, *)$.

خاصية 1.1.4

لتكن $(H, *), (K, *), (L, *)$ زمر جزئية من زمرة $(G, *)$. لدينا الخواص التالية:

1. $(H, *) \leq (H, *)$ يعني أن: $\leq$ إنعكاسية.
2. $(H, *) \leq (K, *) \Rightarrow (H, *) = (K, *)$ و $(K, *) \leq (H, *)$ يعني أن: $\leq$ ضد تناظرية.
3. $(H, *) \leq (L, *) \Rightarrow (K, *) \leq (L, *)$ و $(K, *) \leq (H, *)$ يعني أن: $\leq$ متعدية.

نتيجة 1.1.4

نستنتج من الخاصية السابقة أن $\leq$ هي علاقة تكافؤ.

نظريـة 3.1.4:
لتكن $(G,*)$ زمرة عنصرها الحيادي e. نقول عن مجموعة جزئية H من G أنها زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا كان تحقق:
1. $e \in H$
2. $\forall x, y \in H: \ x * y^{-1} \in H$.

برهان.

1. الشرط اللازم (لزوم الشرط): نفرض أن زمرة جزئية من G فإن الشرطين محققين (يترك للطالب).
2. الشرط الكافي (كفاية الشرط): عندما الشرطين النظرية محققين لتثبت أن H مجموعة جزئية من G .
لدينا e و y من H عندئذٍ حسب الشرط الثاني لدينا:

$$e.y^{-1} \in H$$

وبالتالي

$$y^{-1} \in H$$

إذن نستنتج أن:

$$\forall y \in H : y^{1} \in H$$

هذا من جهة، ومن جهة أخرى لدينا:

$$x * (y^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow x * y \in H$$

ومنه H زمرة جزئية $(G,*)$.

□

قضية 2.1.4. إذا كانت H و K زمرتين جزئيتين من زمرة $(G,*)$ فإن $H \cap K$ زمرة جزئية من G .

قضية 3.1.4. لتكن G زمرة و $(H_i)_{i\in I}$ جماعة من الزمر الجزئية من G عندئذ يكون $\bigcap_{i\in I}(H_i)$ زمرة جزئية من G.

ملاحظة 3.1.4

بصفة عامة إذا كانت H وK زمرتين جزئيتين من زمرة $(G,*)$ فإن $H\cup K$ ليس بالضرورة زمرة جزئية من G. ولكن هناك شرط لكي يكون ذلك صحيح نعرضه في القضية الموالية.

قضية 4.1.4. إذا كانت H وK زمرتين جزئيتين من زمرة $(G,*)$ فإن:
$H\cup K$ زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا كان $H\subseteq K$ أو $K\subseteq H$.

2.4 الحلقة

نتناول فيما يلي بنية جبرية أخرى تشمل دراسة جملة واسعة من المجموعات وتمثل في الحلقة. وقبل هذا نتعرف على خاصية التوزيع

0.2.4.1 خاصية التوزيع

تعريف 1.2.4: لتكن E مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ و T. نقول أن القانون $*$ توزيعي على القانون T إذا تحقق:

$$\forall (x,y,z)\in E^3 : \begin{cases} x*(yTz)=(x*y)T(x*z) \\ \wedge \\ (yTz)*x=(y*x)T(z*x) \end{cases}$$

تعريف 2.2.4:
لتكن A مجموعة غير خالية مزودة بعمليتين داخليتين الأولى نرمز لهما بالجمع $(+)$ و الثانية نرمز لها بالضرب $(\cdot)$. نقول عن $(A,+,\cdot)$ إنها حلقة إذا كان:

1. $(A,+)$ زمرة تبديلية،
2. العملية $(\cdot)$ تجميعية،
3. العملية $(\cdot)$ توزيعية على $(+)$: يعني مهما كان x,y,z من A:

(ا) من اليمين

$$(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$$

(ب) ومن اليسار

$$z\cdot(x+y) = z\cdot x + z\cdot y$$

- كما نقول عن حلقة A إنها تبديلية إذا كانت العملية $(\cdot)$ كذلك.
- نرمز بـ 0 للعنصر الحيادي بالنسبة للجمع $(+)$ ونسميه صفر الحلقة،
- نرمز بـ 1 للعنصر الحيادي بالنسبة للضرب $(\cdot)$ ، ونسميه عنصر الوحدة في الحلقة، وهو ضمن عناصر الحلقة إلا إذا ورد العكس.

1.4.2. مصطلحات

1. إذا كان $1\in A$ نقول إن الحلقة A **واحدية**،
2. نقول عن $0\neq x\in A, x$ إنه **قابل للقلب** إذا كان يقبل نظير بالنسبة للعملية $(\cdot)$،
3. نكتب $x\cdot y = xy$ أي بحذف $(\cdot)$.

أمثلة 1.2.4

1. $\mathbb{Z}$ حلقة تبديلية بالنسبة للجمع والضرب العاديين.
2. من أجل كل عدد طبيعي n ، $n\geq 2$ ، $n\mathbb{Z}$ مجموعة مضاعفات n في $\mathbb{Z}$ هي حلقة تبديلية، لكنها ليست واحدية لأن 1 ليس مضاعفا لـ n.
3. مجموعة حاصل القسمة $\frac{Z}{nZ}$ (مجموعة صفوف التكافؤ ترديد n) التي ممثلات صفوفها هي $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \ldots, \dot{n-1}$ مزودة بالعمليتين: من أجل $x, y\in Z$،
جمع الصفوف $\dot{x}\dot{+}\dot{y} = \dot{k}$ حيث $k = x+y$

ضرب الصفوف $\dot{x} \times \dot{y} = \dot{k}$ حيث $k = x \cdot y$
لدينا $\left(\frac{Z}{nZ}, +, \times\right)$ حلقة تبديلية، صفرها هو $\dot{n}$ (مجموعة مضاعفات n) ولما $n \geq 2$ فهي واحدية عنصر الوحدة فيها هو $\dot{1}$.

1.2.4 قواعد الحساب في حلقة

من أجل كل a, b من حلقة $(A, +, .)$ لدينا:
1. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$،
لأن $a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ ومنه $a \cdot 0 = 0$، بالمثل نحصل على $0 \cdot a = 0$.
2. $a.(-b) = (-a).b = -(a.b)$،
لأن $a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b-b) = a \cdot 0 = 0$ ومنه $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.
بالمثل نحصل على $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

2.2.4 الحلقة الجزئية

تعريف 3.2.4:
نقول عن B جزء غير خال من حلقة $(A, +, .)$ إنه **حلقة جزئية** من A إذا كان :

1. B زمرة جزئية من $(A, +)$،
2. B مستقرة بعملية الضرب : $\forall x, y \in B: \ xy \in B$.

B حلقة جزئية من الحلقة A يعني أن مقصور عمليتي A على B يجعلان من هذه الأخيرة حلقة.

أمثلة 2.2.4

1. $\mathbb{Z}$ حلقة جزئية من $\mathbb{Q}$ حلقة الكسور، $\mathbb{Q}$ حلقة جزئية من حلقة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وذلك بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديين.
2. $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ حلقتان. وبما أن $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ نقول أيضا إن $\mathbb{Q}$ حقل جزئي من $\mathbb{R}$.
3. كما تم توضيحه من قبل، لدينا $A = \frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \cdots, \dot{7}\}$ هي حلقة. هذه الحلقة ليست حقلا، لأن العناصر $\dot{2}, \dot{4}, \dot{6}$ غير معدومة لكنها ليست قابلة للقلب في A. هذا من جهة، من جهة أخرى يمكن التأكد من أن $B = \{\dot{0}, \dot{2}, \dot{4}, \dot{6}\}$ مجموعة الصفوف التي ممثلاتها مضاعفة لـ 2 هي حلقة جزئية من A.

3.2.4 الحلقة التامة

تعريف 4.2.4:
لتكن A حلقة، $A \neq \{0\}$. نقول عن عنصر $a \in A$ مع $a \neq 0$ إنه:

1. قاسم للصفر من اليمين إذا وجد $b \in A$ مع $b \neq 0$ بحيث $ba = 0$
2. قاسم للصفر من اليسار إذا وجد $b \in A$ مع $b \neq 0$ بحيث $ab = 0$
3. قاسم للصفر إذا كان قاسما من اليمين ومن اليسار.

مثال 1.2.4

في الحلقة $\frac{Z}{4Z}$ العنصر $\dot{0} \neq \dot{2}$ قاسم للصفر لأن $\dot{2} \cdot \dot{2} = \dot{0}$.

تعريف 5.2.4:
نقول عن حلقة تبديلية A، $A \neq \{0\}$ إنها تامة إذا كانت لا تحوي قواسم الصفر.

مثال 2.2.4

كما لوحظ سابقا، الحلقة $\frac{Z}{4Z}$ ليست تامة لكن الحلقة $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ تامة. وبصفة عامة كل حقل هو حلقة تامة.

4.2.4 مميزة حلقة

تعريف 6.2.4:
مميزة حلقة تبديلية $\mathbb{A}$ هو أصغر عدد طبيعي m يحقق: $m \cdot 1 = 0$ حيث $m \cdot 1$ هو مجموع 1 ، العنصر الحيادي بالنسبة للضرب، m مرة.

ملاحظة 1.2.4

إذا كانت مميزة الحلقة $\mathbb{A}$ هي q فإن:

$$\forall x \in \mathbb{A} : qx = (q \cdot 1)x = 0x = 0$$

مثال 3.2.4

مميزة الحلقات $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ معدومة أما مميزة الحلقة $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ $(n \geq 2)$ فهي n .

تطبيق محلول 1.2.4

إذا كانت $\mathbb{A}$ حلقة تبديلية ذات مميزة 3 فإن :

$$\forall x, y \in \mathbb{A} : \qquad (x+y)^3 = x^3 + y^3.$$

بما أن $\mathbb{A}$ حلقة تبديلية فإنه يمكن تطبيق قاعدة ثنائي الحد لنيوتن فنحصل على:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

ومن كون المميزة تساوي 3 فإن

$$3x^2y = (3 \cdot 1)x^2y = 0 \cdot x^2y = 0 = 0 \cdot xy^2 = (3 \cdot 1)xy^2 = 3xy^2$$

وبالتالي النتيجة المطلوبة.

5.2.4 القسمة في حلقة

تعريف 7.2.4:
لتكن $\mathbb{A}$ حلقة تبديلية وتامة، a و b عنصرين من $\mathbb{A}$. نقول عن a إنه **يقسم** b إذا وُجد q من $\mathbb{A}$ بحيث $b = qa$.

6.2.4 التفكيك في حلقة

تعريف 8.2.4:
لتكن $\mathbb{A}$ حلقة تبديلية وتامة و $a \neq 0, a \in \mathbb{A}$.
نقول عن a إنه **غير قابل للتفكيك** (أو غير قابل للاختزال) في $\mathbb{A}$ إذا كان:

1. a غير قابل للقلب في $\mathbb{A}$ ،
2. قواسم a هي فقط من الشكل ud ، مع u عنصر قابل للقلب من الحلقة.

إذا كان a لا يحقق أحد الشرطين السابقين نقول إنه **قابل للتفكيك**.

مثال 4.2.4

مجموعة العناصر القابلة للقلب في $\mathbb{Z}$ هي $\{-1,1\}$. أما العناصر غير القابلة للتفكيك في $\mathbb{Z}$ هي $\pm p$ مع $p \in \mathbb{N}^*$ و p أولي.

7.2.4 المضاعفات والقواسم المشتركة

تعريف 9.2.4:
لتكن $\mathbb{A}$ حلقة تبديلية والعناصر $a, b, c, d \in \mathbb{A}$.

1. نقول عن c إنه **مضاعف مشترك أصغر** لـ a و b إذا كان:
   (ا) a يقسم c و b يقسم c (حينئذ نقول إن c مضاعف مشترك لـ a و b).
   (ب) c يقسم كل مضاعف مشترك لـ a و b. حينئذ نكتب $c = \mathrm{ppcm}(a,b)$.
   (c الأصغر لأنه أصغر المضاعفات المشتركة وفق علاقة الترتيب "القسمة" في الحلقة).
2. نقول عن d إنه **قاسم مشترك أعظم** لـ a و b إذا كان:
   (ا) d يقسم a و يقسم b (حينئذ نقول إن d قاسم مشترك لـ a و b).
   (ب) كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم d . حينئذ نكتب $d = \mathrm{pgcd}(a,b)$. (نقول عن d إنه قاسم أعظم لأنه الأكبر بالنظر لعلاقة الترتيب "القسمة" في الحلقة).

خواص 1.2.4.
لتكن الحلقة $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ و $a, b, d \in \mathbb{A}$. و كان $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$ أي أن a و b أوليان فيما بينهما فإن:

1. أي قاسم مشترك لـ a و b هو قابل للقلب.
2. إذا كان a يقسم bx فإن a يقسم x، (هذه الخاصية تعرف بنظرية "غوص").
3. $ppcm(a,b) = ab$.
4. $\exists u, v \in \mathbb{A} : ua + vb = 1$ هذه الخاصية تعرف بنظرية "بيزوت".
5. إذا كان a أوليا مع كل من $b_1, b_2, \cdots, b_n$ ، في $\mathbb{A}$ ، فإن a أوليا مع الجداء $b_1 b_2 \cdots b_n$.
6. إذا كان a يقسم الجداء $b_1 b_2 \cdots b_n$ وأوليا مع كل من $b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}$ ، في $\mathbb{A}$ فإن a يقسم b_n.

ملاحظة 2.2.4

إذا كان d قاسما مشتركا لـ a و b في حلقة $\mathbb{A}$ فإن ud هو قاسما مشتركا لهما، مع u كل عنصر قابل للقلب من الحلقة، هو أيضا قاسم مشترك، لأن

$$a = \alpha d = u^{-1}\alpha(ud),\ \ b = \beta d = u^{-1}\beta(ud) \text{ حيث } \alpha, \beta \in \mathbb{A}$$

وهذا ينطبق على المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأعظم لعنصرين من الحلقة.

3.4 الحقل

تعريف 1.3.4:
نسمي حقل كل مجموعة $\mathbb{K}$ مزودة بقانونين داخليين الجمع $+$ و الضرب . يحققان:

1. $(K,+)$ زمرة تبديلية عنصرها الحيادي 0،
2. $(K-\{0\},.)$زمرة ضربية،
3. القانون . توزيعي على القانون $+$ أي:

$$\forall a,b,c \in K : a.(b+c) = a.b + a.c \ \ (b+c).a = b.a + c.a.$$

ونرمز له بـ $(\mathbb{K},+,.)$.

- إذا كان الضرب . تبديلي نقول أن الحقل $(\mathbb{K},+,.)$ تبديلي.

مثال 1.3.4

1. $(\mathbb{C},+,.)$ حقل تبديلي.
2. $(\mathbb{Z},+,.)$ ليس حقل.
3. من أجل p عدد أولي $(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}},+,.)$ حقل تبديلي منته .

تعريف 2.3.4:
نقول عن حلقة، واحدية ، $\mathbb{A}$ إنها **حقل** إذا كان كل عنصر من $\mathbb{A}-\{0\}$ قابلا للقلب.

مثال 2.3.4

$\mathbb{Z}$ حلقة تبديلية بالنسبة للجمع والضرب العاديين. لكنها ليست حقلا لأن $\frac{1}{2}$ ، نظير 2، مثلا، غير موجود في $\mathbb{Z}$.

1.3.4 الحقل الجزئي

تعريف 3.3.4:
الحقل الجزئي من حقل $(\mathbb{K},+,.)$ هو الحلقة الجزئية $\mathbb{K}'$ حيث: لكل عنصر x $(x\neq 0)$ من $\mathbb{K}'$ نظير x^{-1} في $\mathbb{K}'$ بالنسبة للقانون .

مثال 3.3.4

1. $(\mathbb{R},+,.)$ حقل جزئي من الحقل $(\mathbb{C},+,.)$.
2. $(\mathbb{Q},+,.)$ حقل جزئي من الحقل التبديلي $(\mathbb{R},+,.)$.

4.4 تمارين الفصل الرابع

التمريـــن 4.1.

برهن في مجموعة الأعداد الصحيحة التكافؤ التالي:

$$n \text{ يقسم } m \Leftrightarrow m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$$

التمريـــن 4.2.

نعرف في مجموعة الأعداد الحقيقة الغير معدومة العملية الداخلية التالية:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^* : x * y = x \times y$$

1. هل $*$ تبديلية؟
2. بين أن $(\mathbb{R}^*, *)$ لها بنية زمرة.

التمريـــن 4.3.

نعرف في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ العملية الداخلية $*$ المعرفة كمايلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x * y = x - y$$

1. هل العملية $*$ تبديلية؟
2. بين أنه في $(\mathbb{Z}, *)$ يوجد e بحيث $\forall x \in \mathbb{Z} : x * e = x$ (e حيادي من اليمين)
3. هل e حيادي؟
4. هل يوجد، من اجل كل عنصر $x \in \mathbb{Z}$ عنصر $x' \in \mathbb{Z}$ بحيث $x * x' = e$ (x' نظير من اليمين)؟

التمريـــن 4.4.

نعرف في $\mathbb{R} - \{1\}$ قانون التركيب التالي:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{1\} : x * y = x + y - xy$$

1. بين أن $(\mathbb{R} - \{1\}, *)$ زمرة.
2. من أجل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ و $n \in \mathbb{N}$ أحسب:

$$x^n = \underbrace{x * x * \cdots * x}_{(\text{n مرة})}$$

التمريـــن 4.5.

بين أن البنية $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$ حيث

$$(a, b) * (\alpha, \beta) = \left(a\alpha, \frac{\beta}{a} + b\alpha\right)$$

زمرة.

التمريـــن 4.6.

لتكن G زمرة تحقق $\forall x \in G : x^2 = 1$

- بين أن G زمرة تبديلية.

التمريـــن 4.7.

لتكن $(G, .)$ زمرة و

$$\forall x, y \in G : \ (xy)^2 = x^2 y^2$$

- أثبت أن $(G, .)$ زمرة تبديلية.

التمريـــن 4.8.

لتكن G زمرة عنصرها الحيادي e نضع المجموعة

$$C(x) = \{g \in G : xg = gx\}$$

- أثبت أن $C(x) \leqslant G$.

التمريـــن 4.9.

بين أن المجموعة المعرفة كمايلي:

$$G = \{z \in \mathbb{C} : \exists a \in \mathbb{N}^* : z^n = 1\}$$

هي زمرة جزئية من $\mathbb{C}^*$.

التمريـــن 4.10.

لتكن $(G, .)$ زمرة نعرف مركز G كمايلي:

$$Z(G) = \{a \in G : \forall x \in G : ax = xa\}$$

- أثبت أن $Z(G)$ زمرة جزئية من G .

التمريـــن 4.11.

- بين أن كل جزء منته و غير خال من زمرة $(G,*)$ مستقر بالنسبة للعملية $*$ هو زمرة جزئية.
- هات مثال يبين عدم صحة هذه الخاصية وذلك من اجل جزء غير منته.

التمريـــن 4.12.

لتكن H و K زمرتان جزئيتان من زمرة G.

- بين أن:

$H \cup K$ زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا كان $H \subset G$ أو $K \subset G$.

التمريـــن 4.13.

لتكن $\mathbb{A},\mathbb{B}$ حلقتان نعرف القانونين التاليين:

$$\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{A}\times\mathbb{B}:$$

$$\begin{cases} (a,b)+(a',b')=(a+a',b+b'), \\ (a,b)\times(a',b')=(aa',bb'). \end{cases}$$

- أثبت أن: $(\mathbb{A}\times\mathbb{B},+,\times)$ حلقة.

التمريـــن 4.14.

ليكن p عددا طبيعيا أوليا $p \geqslant 2$ ، نعتبر $\mathbb{A}$ مجموعة كل العناصر $x=\dfrac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ بحيث $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{Z}^*$ و b ليس مضاعفا لـ p

1. أثبت أن $\mathbb{A}$ حلقة.
2. أثبت أن: $\forall x\in\mathbb{Q}: x\in\mathbb{A} \vee x^{-1}\in\mathbb{A}$.

التمريـــن 4.15.

لتكن $\mathbb{A}$ حلقة حيث: $\forall x\in\mathbb{A}:\ x^2=x$.

1. أثبت أن: $\forall x\in\mathbb{A}: 2x=0$.
2. أثبت أن: $\mathbb{A}$ حلقة تبديلية.

التمريـــن 4.16.

لتكن المجموعة

$$\mathbb{Z}[i]=\{a+ib\in\mathbb{C} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$$

(حيث $i^2=-1$).

1. أثبت أن $\mathbb{Z}[i]$ هي حلقة تبديلية واحدية.
2. عين عناصر القابلة للقلب في $\mathbb{Z}[i]$.
3. استنتج أن $\mathbb{Z}[i]$ ليست حقلا.

الفَصل الخامس

حلقة كثيرات الحدود

مُحتوى الفَصل

1.5 بنية حلقة كثيرات الحدود والمفاهيم الأساسيّة 86

2.5 الشكل العام لكثيرات الحدود المعرفة في $\mathbb{A}[X]$ 88

3.5 درجة ومرتبة كثير حدود 89

4.5 العمليات على كثيري حدود 92

5.5 القسمة الاقليدية في $\mathbb{A}[X]$ 93

6.5 خوارزمية إقليدس (طريقة إقليدس) لإيجاد القاسم المشترك الأكبر . 96

7.5 نظرية بيزوت 97

8.5 نظرية غوص 99

9.5 قسمة كثير حدود وفق القوى المتزايدة 99

10.5 إشتقاق كثيرات الحدود 101

11.5 مشتق كثير حدود 102

12.5 نشر تايلر 102

13.5 تمارين الفصل الخامس 105

تم إعداد هذا الفصل إعتماداً على المراجع التالية: [6, 7, 9, 1]

تستعمل كثيرات الحدود ذات معاملات حقيقية في حل العديد من مسائل الجبر كالمسائل الحسابية و البحث عن القيم الذاتية للمصفوفات....الخ. كما تُستخدم في الحساب التقريبي للتوابع العددية و في نظريات الاستقطاب. ولهذه الأهمية نريد في هذا الفصل أن نعرج على هذا الموضوع ونبدأ ببنية حلقة كثيرات الحدود.

1.5 بنية حلقة كثيرات الحدود والمفاهيم الأساسيّة

لتكن $\mathbb{A} \neq \emptyset$ حلقة تبديلية. ولنرمز إلى مجموعة المتتاليات $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي حدودها من $\mathbb{A}$ و تكون عدد حدودها غير معدومة منتهيا بالرمز $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$. فإذا كان $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حدودها من $\mathbb{A}$ فإن:

$$\begin{aligned}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} &\Leftrightarrow \operatorname{Card}\{n\in\mathbb{N} : a_n \neq 0\} < +\infty \\ &\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 : a_n = 0\end{aligned}$$

عندئذ نكتب:

$$\mathbb{A}^{\mathbb{N}} = \{(a_0, a_1, a_2, ..., a_n, 0, 0, 0, ...), a_i \in A, \forall i \in \mathbb{I}\}$$

وللتبسيط، عنصر من $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ نكتبه على الشكل:

$$p = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, 0, 0, 0, ...) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)$$

نعرف في $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ عمليتي الجمع والضرب، كما يلي:

من أجل $p = (a_n), q = (b_n) \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$

الجمع:

$p + q = (c)$ حيث: $c_n = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ..., a_n + b_n, ..., 0, 0, 0, ...)$

والضرب:

$pq = c$ حيث: $c_n = \sum_{i+j=n} p_i q_j$.

نظريـة 1.1.5:
لتكن $\mathbb{A} \neq \emptyset$ حلقة تبديلية، $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ مزودة بعمليتي الجمع والضرب المعرفين أعلاه لها بنية حلقة تبديلية. ونسمي $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ حلقة كثيرات الحدود ذات المعاملات في $\mathbb{A}$.

برهان.
للبرهان على $(\mathbb{A}^{\mathbb{N}}, +, .)$ لها بنية حلقة تبديلية نبرهن مايلي:

(i). الضرب والجمع داخليتين في $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$.

(ii). $(A^{\mathbb{N}}, +)$ زمرة تبديلية.

(iii). الضرب تبديلي في $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$.

(v). الضرب تجميعي $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$.

(iv). الضرب توزيعي على الجمع في $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$.

$\therefore$ (i) . بما أن حدود $p=(a_n)$ و $q=(b_n)$ تنعدم إبتداءا من دليل ما منته وليكن s و t على التوالي فإن حدود $p+q$ تنعدم إبتداءا من الدليل $m=max\{s,t\}$ (m منته) ولهذا $c_n=0$ ، $\forall n\geq 2m$ لذلك $p+q$ و pq هما عنصران من $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$.
$\therefore$ (ii) . بما أن $(A,+)$ حلقة تبديلية فإنه من أجل كل $p=(a_n)$ ، $q=(b_m)$ و $r=(c_t)$ عناصر من $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$. ولنفرض مثلا أن $n\leq m\leq t$ لدينا:

$$\begin{aligned} p+q &= (a_0,a_1,a_2,...,a_n,0,...)+(b_0,b_1,b_2,...,b_m,0,...)\\ &= (a_0+b_0,a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n,...,b_m,0,...)\\ &= (b_0+a_0,b_1+a_1,b_2+a_2,...,b_n+a_n,...,b_m,0,...)\\ &= q+p \end{aligned}$$

ومنه:

$$\forall p,q\in\mathbb{A}^{\mathbb{N}}: p+q=q+p$$

يعني أن الضرب تبديلي في $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$.
و من تعريف الضرب لدينا:

$$u_n=\sum_{i+j=n}p_iq_j \text{ مع } pq=(u_n)$$

و

$$v_m=\sum_{n+l=m}u_nr_l \text{ مع } (pq)r=(v_m)$$

من توزيع الضرب على الجمع وكون الجمع تبديليا في $\mathbb{A}$ لدينا :

$$v_m=\sum_{n+l=m}u_nr_l=\sum_{i+j+l=m}a_ib_jr_l$$

وبالمثل نثبت أن : $p(qr)=(v_m)$. ومنه عملية الضرب تجميعية.

- العنصر $(0,0,0,...,0,....)$ الذي نرمز له بالرمز 0 من $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ يحقق من أجل $p=(a_n)\in\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ لدينا

$$p+0=0+p=p$$

يعني أن 0 هو العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع في $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$.

- والعنصر $(-a_0,-a_1,-a_2,...,-a_n,0....)$ الذي نرمز له بالرمز $-p$ من $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ يحقق من أجل $p=(a_n)\in\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ لدينا

$$p+(-p)=(-p)+p=0$$

يعني أن $-p$ هو نظير العنصر p بالنسبة لعملية الجمع في $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$.

- أما باقي الخواص فمن السهل التأكد منها. وبالتالي $(\mathbb{A}^{\mathbb{N}},+,.)$ لها بنية حلقة تبديلية .

□

2.5 الشكل العام لكثيرات الحدود المعرفة في $\mathbb{A}[X]$

لتكن $\mathbb{A}\neq\emptyset$ حلقة تبديلية و $a\in\mathbb{A}$ ، يمكن إعتبار $\mathbb{A}$ كحلقة جزئية من $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ ونعتبر عناصر $\mathbb{A}$ كثيرات حدود ثابتة ونكتب $a\equiv(a,0,0,0...,0,...)$. نضع:

$$X^0=(1,0,0,0...,0,...)$$

و

$$X=X^1=(0,1,0,0...,0,...)$$

موقع العنصر 1 $(1\in\mathbb{A})$ هو رقم 1 إبتداءا من 0.
حسب تعريف الضرب في $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ لدينا:

$$X.X=X^2=(0,0,1,0...,0,...)$$

موقع العنصر 1 هو رقم 2 إبتداءا من 0.
نبرهن بالتراجع مايلي: من أجل $k\in\mathbb{N}$ ، لدينا:

$$X^k=(0,0,0,0...,1,...,0,...)$$

(موقع العنصر 1 هو رقم k إبتداءا من 0).
$\therefore$ لدينا الخاصية صحيحة من أجل الرتبة الأولي.
نفرض الأن أن الخاصية صحيحة حتى الرتبة k يعني:

$$X^k=(0,0,0,0...,1,...,0,...)$$

(موقع العنصر 1 هو رقم k إبتداءا من 0) صحيحة.
ونبرهن صحتها من أجل الرتبة $k+1$ يعني:

$$X^{k+1}=(0,0,0,0...,1,...,0,...)$$

(موقع العنصر 1 هو رقم $k+1$ إبتداءا من 0).
لدينا:

$$X^{k+1}=X.X^k=(0,1,0,0...,0,...,0,...)(\underbrace{0,0,0...,1}_{\text{موقع العنصر } 1},0...,0,...)$$

وبإجراء عملية الضرب، المعرفة في $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ ، نحصل على

$$X^{k+1} = (\underbrace{0, 0, 0, ..., 1}, 0..., 0, ...)$$

موقع العنصر 1 هو رقم $k+1$ إبتداءا من 0.
ومنه:
من أجل $k \in \mathbb{N}$ ، لدينا:

$$X^k = (0, 0, 0, 0..., 1, ..., 0, ...)$$

(موقع العنصر 1 هو رقم k إبتداءا من 0).
ولتكن $\mu_k \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ حيث:

$$\mu_k = (0, 0, 0, ..., a_k, 0, ...)$$

(موقع العنصر a_k هو رقم k إبتداءا من 0).
هذا من جهة ومن جهة أخرى لدينا:

$$\mu_k = (0, 0, 0, ..., a_k, 0, ...) = (a_k, 0, 0, ..., , 0, ...)(0, 0, 0, ..., 1, 0, ...)$$

يعني:

$$\mu_k = a_k X^k$$

فإذا كان $p \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ حيث أن: $p = (a_0, a_1, a_2, 0, 0, 0, ..., a_n, 0, ...)$ فيمكن كتابته باستعمال تعريف الجمع في $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ على الشكل التالي:

$$p = (a_0, a_1, a_2, 0, 0, 0, ..., a_n, 0, ...) = (a_0, 0, 0, 0, 0, 0, ..., 0, 0, ...) + (0, a_1, 0, 0, 0, 0, ..., 0, 0, ...) + (0, 0, a_2, 0, 0, 0, ..., 0, 0, ...) + ... + (0, 0, 0, 0, 0, 0, ..., a_n, 0, ...)$$

وبالتالي يمكن كتابة على الشكل:

$$\boxed{p = a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + ... + a_nX^n}$$

ونعبر عنه كذلك بـ $p = p(X)$ أو $p = \sum_{k\geqslant 0} a_kX^k$ ونسمي $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ معاملات p.
كثير الحدود الذي كل معاملاته معدومة نسميه كثير الحدود المعدوم ونرمز له بالرمز 0. ونعبر عن الحلقة $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ بـ $\mathbb{A}[X]$ ونسميها حلقة كثيرات الحدود ذات المتغير X وذات معاملات في $\mathbb{A}$.

3.5 درجة ومرتبة كثير حدود

ليكن $p = \sum_{k=0}^{k=n} a_kx^k$ عنصراً من $\mathbb{A}[x]$ نعرف:

$$\deg(p) = max\{k \in \mathbb{N} : a_k \neq 0\}$$
$$w(p) = min\{k \in \mathbb{N} : a_k \neq 0\}$$

ونسمي $\deg(p)$ درجة كثير الحدود، ونسمي $w(p)$ مرتبة كثير الحدود.
نصطلح أنه إذا كان: $p = 0$ فان: $w(p) = +\infty$ و $\deg(p) = -\infty$.

مثال 1.3.5

$p = 2x^2 - 2x^3 - 7x^5$ فإن: $\deg(p) = 5$ و $w(p) = 2$

نظرية 1.3.5:
ليكن كثيرا الحدود p و q من $\mathbb{A}[x]$. برهن أن:
1. $\deg(p+q) \leqslant max\{\deg(p), \deg(q)\}$
2. $\deg(p\times q) = \deg(p) + \deg(q)$
3. $w(p+q) \geqslant min\{w(p), w(q)\}$
4. $w(p\times q) = w(p) + w(q)$

برهان.
ليكن كثيرا الحدود p و q من $\mathbb{A}[x]$. حيث: $\deg p = n \in \mathbb{N}$ و $\deg q = m \in \mathbb{N}$.
إذا كان أحد كثيري الحدود p أو q معدوم فإن:

$$\deg(p+q) \le \deg(p) + \deg(q) \text{ و } \deg(p\times q) \le \deg(p) + \deg(q)$$

واضحة. أما إذا كان غير ذلك فلدينا مايلي:

1. نبرهن أن: $\deg(p+q) \leqslant max\{\deg(p), \deg(q)\}$ نميز حالتين بالنسبة للدرجة:
   (ا) في حالة: $\deg(p) = \deg(q) = n$.
   نميز حالتين بالنسبة للحد الأعلى:
   i. إذا كان: $a_n + b_n \neq 0$ فإن:
   $$\deg(p+q) = n \leqslant max\{\deg(p), \deg(q)\} = n$$
   ii. إذا كان: $a_n + b_n = 0$ فإن:
   $$\deg(p+q) < n \leqslant max\{\deg(p), \deg(q)\} = n$$
   (ب) في حالة: $\deg(p) \neq \deg(q)$ نفرض أن: $\deg(p) = n > \deg(q) = m$.
   $$\deg(p+q) = n \leqslant max\{\deg(p), \deg(q)\} = n$$

2. نفرض أن:

$$p = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k \text{ مع } a_k \neq 0 \text{ و } q = \sum_{k=0}^{k=m} b_k x^k \text{ مع } b_k \neq 0$$

إذن: $p \times q = \sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$ مع $c_k = \sum_{t+s=p} a_t b_s$

(أ) إذا كان $n+m<p$ و $t+s=p$
فإن: $t>n$ أو $s>m$ ومنه: $a_t=0$ أو $b_s=0$ وبالتالي: $c_p=0$.
(ب) إذا كان $n+m=p$ و $t+s=p$
فإن: $t\geqslant n$ أو $s\geqslant m$ ومنه: $(n,m)\neq(t,s)$ إذن: $a_tb_s=0$ وبالتالي: $c_{n+m}=a_nb_m$
ولدينا أيضا الحقل $\mathbb{A}$ تام. إذن:

$$(a_n\neq 0\wedge b_m\neq 0\Rightarrow a_nb_m\neq 0)$$

ومنه:

$$\boxed{\deg(p\times q)=\deg(p)+\deg(q)}$$

3. مابقى يترك للطالب.

□

تعريف 1.3.5: ليكن $p=\sum_{k=0}^{k=n}a_kx^k$ مع $a_k\neq 0$ عنصراً من $\mathbb{A}[x]$ و $p\neq 0$.
في حالة $\deg p=d$ يسمى الحد a_dX^d **الحد الأعلى درجة أو الحد المسيطر** ، وإذا كان $a_d=1$ يسمى كثير الحدود النظامي أو واحدي.

مثال 2.3.5

$p=6x^2+x^3+x^4$ فان: $\deg(p)=4$ و $a_4=1$ إذن كثير حدود نظامي.
أما $p=x+x^2-x^4$ فهو ليس نظامي لأن $a_4\neq 1$.

نظرية 2.3.5: إذا كانت $\mathbb{A}$ تامة فإن:
1. $A[X]$ تامة.
2. العناصر القابلة للقلب في $A[X]$ هي مجموعة العناصر القابلة للقلب في $\mathbb{A}$.

برهان.

1. لنفرض أن A تامة ولنبرهن أن $A[X]$ تامة. من أجل ذلك ليكن $p=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $q=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كثيري حدود غير معدومين حيث: $p=(0,0,\ldots,0,a_k,a_{k+1},\ldots)$ مع $a_k\neq 0$ و
$q=(0,0,\ldots,0,b_r,b_{r+1},\ldots)$ مع $b_r\neq 0$. و بإستعمال تعريف ضرب كثيري حدود لدينا:

$$p\times q=(0,0,\ldots,a_kb_r,\ldots)$$

وبما أن A حلقة تامة و $a_k \neq 0$ و $b_r \neq 0$ فإن $a_k b_r \neq 0$ ، ومنه $pq \neq 0$. وبالتالي: $A[X]$ تامة.

2. إذا كان $p \neq 0$ و $q \neq 0$ من $A[X]$ بحيث $p \times q = 1$ (p قابل للقلب في $A[X]$) فإن $\deg(p) + \deg(q) = 0$ (A تامة) ، وهذا يؤدي إلى أن p ثابت غير معدوم من A وبالتالي فهو قابل للقلب.

□

ملاحظة 1.3.5

1. إذا كانت A تامة فكل كثير حدود، من $A[X]$ ، درجته غير معدومة هو غير قابل للقلب.
2. إذا كانت A غير تامة فيمكن إيجاد كثير حدود، من $A[X]$ ، درجته أكبر تماما من الصفر وقابل للقلب.

مثال 3.3.5

في حالة $A = \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ (حلقة ليست تامة) و $p = q = \dot{2}X + \dot{1}$ فإن لدينا:

$$p \times p = (\dot{2}X + \dot{1}) \times (\dot{2}X + \dot{1}) = (\dot{4}X^2 + \dot{4}X + \dot{1}) = \dot{1}$$

يعني أن p قابل للقلب.

4.5 العمليات على كثيري حدود

ليكن $p = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$ مع $a_k \neq 0$ و $q = \sum_{k=0}^{k=m} b_k x^k$ مع $b_k \neq 0$ عنصران من $\mathbb{A}[X]$.

1. **المساواة:**

نقول عن كثيري حدود p و q أنهما **متساويان** إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n = b_n$.
ونقول أن كثير حدود p أنه يساوي كثير الحدود المعدوم إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n = 0$.
وبعبارة أخرى:

$$p(X) = q(X) \Leftrightarrow \forall i, a_i = b_i$$

2. **الجمع:**

$$p(X)+q(X)=\sum_{k=0}^{k=n}(a_k+b_k)X^k=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+(a_2+b_2)X^2+\ldots+(a_n+b_n)X^n$$

3. الضرب:

$p(X)q(X)=c(X)$ حيث:

$c(X)=c_0+c_1X+c_2X^2+\ldots+c_nX^n$ و $c_m=\sum_{i+j=m}p_iq_j$.

4. الضرب بسلمي

ليكن $\lambda\in\mathbb{K}$ لدينا:

$$\lambda p(X)=\sum_{k=0}^{k=n}\lambda a_kX^k=\lambda a_0+\lambda a_1X+\lambda a_2X^2+\ldots+\lambda a_nX^n$$

خاصية 1.4.5

ليكن $P,Q,R\in\mathbb{K}[X]$ لدينا:

1. (ا) $P+Q=Q+P$،
   (ب) $P+0=P$،
   (ج) $P+(Q+R)=(P+Q)+R$.
2. (ا) $P\times Q=Q\times P$،
   (ب) $P\times 1=P$،
   (ج) $P\times(Q\times R)=(P\times Q)\times R$،
   (د) $P\times(Q+R)=(P\times Q)+(Q\times R)$.

5.5 القسمة الاقليدية في $\mathbb{A}[X]$

في ما يلي نتطرق إلى الشروط اللازمة لإجراء قسمة كثير حدود على آخر وبعض خواص الحلقة $A[X]$. في كل مايلي $\mathbb{A}$ حقل تبديلي.

تعريف 1.5.5: ليكن a و b كثيري حدود من $\mathbb{A}[X]$. نقول أن b يقسم a أو أن a مضاعف لـ b إذا وجد كثير حدود q من $\mathbb{A}[X]$ حيث: $a=bQ$.
ونرمز لذلك بالرمز: $b|a$

مثال 1.5.5

في $\mathbb{R}[X]$ لدينا: $x^2-1=(x-1)(x+1)$ نقول أن: $(x-1)|(x^2-1)$

خاصية 1.5.5

ليكن a و b كثيري حدود من $\mathbb{A}[X]$.
إذا كان: $b|a$ و $a|b$ فانه يجد عنصر λ من $\mathbb{A}$ بحيث: $a=\lambda b$

نظرية 1.5.5: ليكن a و b كثيري حدود من $\mathbb{A}[X]$
حيث $b\neq 0$. إذن توجد ثنائية وحيدة (q,r) من $\mathbb{A}[X]\times\mathbb{A}[X]$ حيث:

$$\begin{cases} a=bq+r, \\ 0\leq \deg b<\deg r. \end{cases}$$

يسمى q حاصل قسمة a على b و r باقي قسمة a على b.

برهان.
∴ أولا نثبت الوحدأنية:(بطريقة الخلف)
نفرض أنه يوجد زوج (q',r') من $\mathbb{A}[X]\times\mathbb{A}[X]$ يحقق: $a=q'b+r'$. وبالتالي: $qb+r=q'b+r'$.
يعني: $r+r'=b(q-q')$.

فإذا كان $(q-q'\neq 0)$ فان: $\deg(b)\leq\deg(b(q-q'))$ ومنه:

$$\deg(b)\leq\deg(r-r')\leq max\{\deg(r),\deg(r')\}<\deg(b)$$

وهذا تناقض إذن: $(q-q'=0)$ وبتالي: $(q=q')$ و $(r=r')$.
∴ ثانيا نثبت الوجودية:
نضع: $a=a_0+a_1+...+a_n$ مع $a_n\neq 0$ و $b=b_0+b_1+...+b_m$
مع $a_m\neq 0$ إذا كان $n<m$ نستطيع أن نكتب $a=b0+a$ مع $\deg(a)<\deg(b)$.
ومنه $q=0$ و $r=a$. إذا كان $n\geq m$ نضع: $r_1=a-bq_1$ و $q_1=\dfrac{a_n}{b_m}X^{(n-m)}$ بما أن bq_1 يقبل a_nX^n كحد ذي اعلى درجة لدينا: $\deg(r_1)<\deg(a)$.
- إذا كان $\deg(r_1)<\deg(b)$، يمكن اخذ $q=q_1$ و $r=r_1$.
- إذا كان $\deg(r_1)\geq\deg(b)$، نعيد العملية مع الثنائية (r_1,b) كما فعلنا مع الثنائية (a,b).
نضع q_2 حاصل قسمة الحد ذي اعلى درجة في r_1 على b_mX^m . نجد $\deg(r_2)<\deg(r_1)$ مع $r_1-bq_2=r_2$.

i) إذا كان $\deg(r_2)<\deg(b)$، نستطيع أن نكتب $a=bq_1+r_1=bq_1+bq_2+r_2=b(q_1+q_2)+r_2$ مع $\deg(r_2)<\deg(b)$. نستطيع إذن أن ناخذ $r=r_2$ و $q=q_1+q_2$.

ii) إذا كان $\deg(r_2) \geq \deg(b)$ نكمل بنفس الطريقة السابقة نحصل على متتالية من كثيرات الحدود r_k حيث: $\deg(a) > \deg(r_1) > \deg(r_2) > \dots > \deg(r_k) > \dots$ ، متتالية الدرجات لكثيرات الحدود r_k متناقصة تماما ومحدودة، إذن فهي بالضرورة منتهية. في الاخير نحصل على مساواة من الشكل $r_{(k-1)} - bq_k = r_k$ مع $\deg(r_k) < \deg(b)$.

إذا وضعنا الـ k مساواات

$$\begin{aligned} a - bq_1 &= r_1, \\ r_1 - bq_2 &= r_2, \\ &\vdots, \\ r_{(k-1)} - bq_k &= r_k. \end{aligned}$$

نحصل على $a = b(q_1 + q_2 + + q_k)$ و $r = r_k$. □

مثال 2.5.5

قسمة $a = X^4 + X^2 - 4X + 2$ على $b = X^2 + 2X + 1$.

$a \rightarrow$	$x^5 - x^4 + x^2 - 4x + 1$	$x^3 + x^2 + 2x + 1 \leftarrow b$
$-bq_1 \rightarrow$	$x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2$	$x^2 \leftarrow q_1$
$r_1 \rightarrow$	$-2x^4 - 2x^3 - 4x + 1$	$-2x \leftarrow q_2$
$-bq_2 \rightarrow$	$-2x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x$	
$r_2 \rightarrow$	$4x^2 - 2x + 1$	$x^2 - 2x \leftarrow q$
$\deg(r_2) < \deg(b) \rightarrow$	$r = 4x^2 - 2x + 1$	

ومنه:

$$\boxed{x^5 - x^4 + x^2 - 4x + 1 = (x^3 + x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x) + 4x^2 - 2x + 1}$$

مثال 3.5.5

المقسوم	$\longrightarrow$	$2x^4$	$+5x^3$	$-x^2$	$+2x$	$+1$	$2x^2$	$-3x$	$+1$	$\leftarrow$	القاسم
		$-2x^4$	$+3x^3$	$-x2$	$\downarrow$	$\downarrow$	x^2	$+4x$	$+5$	$\leftarrow$	الحاصل
		0	$+8x^3$	$-2x^2$	$+2x$	$+1$					
			$-8x^3$	$+12x^2$	$-4x$	$\downarrow$					
				$10x^2$	$-2x$	$+1$					
				$-10x^2$	$+15x$	-5					
		الباقي	$\longrightarrow$		$13x$	-4					

$$\boxed{2x^4+5x^3-x^2+2x+1=(2x^2-3x+1)(x^2+4x+5)+13x-4}$$

6.5 خوارزمية إقليدس (طريقة إقليدس) لإيجاد القاسم المشترك الأكبر

تسمح هذه الخوارزمية بإيجاد قاسم مشترك أكبر لكثيري حدود.
لتكن $\mathbb{K}[X]$ حلقة كثيرات حدود حيث $\mathbb{K}$ حقل تبديلي، وليكن $a,b\in\mathbb{K}[X]$ مع $b\neq 0$.
نعرف بالتراجع كثيرات الحدود $(r_k)_{(k\geq 0)}(q_k)_{(k\geq 0)}$ في $\mathbb{K}[X]$ كمايلي:
نضع $q_0=b$ و $r_0=a$.
من أجل $k\geq 1$، إذا كان $r_k\neq 0$ نجري عملية القسمة لـ $r_{(k-1)}$ على r_k كمايلي:

$$\begin{array}{r|l} r_{(k-1)} & r_k \\ \hline r_{(k+1)} & r_{(k+1)} \end{array}$$

$$r_{(k-1)}=r_kq_k+r_{(k+1)} \text{ و } \deg(r_{(k+1)})<\deg(r_k)$$

(القاسم السابق يصبح مقسوما جديدا والباقي يصبح قاسما جديدا).

- إذا كان $r_k=0$ نضع $q_{(k+t)}=0,\ t\geq 0$ و $r_{(k+l)}=0,\ l\geq 0$. يسمى مجمل عمليات القسمة المتوالية السابقة خوارزمية إقليدس لـ a و b. متتالية الاعداد الطبيعية $U_k=\deg(r_k)$ محدودة من الاسفل ومتناقصة تماما.
- وإذا كان $r_k\neq 0$ و ذلك مهما كان العدد الطبيعي k فإن المتتالية $(U_k)_{(k\geq 0)}$ تصبح غير منتهية وهذا غير ممكن، وبالتالي فإن عملية القسمة هذه منتهية. إذن يوجد $m\geq 2$ بحيث $r_m=0$ و $r_{(m-1)}\neq 0$ من تكوين بواقي القسمة هذه لدينا $r_{(1)},r_{(2)},r_{(3)},\ldots,r_{(m-1)}$ كلها غير معدومة، $r_{(m-1)}$ هو أخر باقي غير معدوم.

إذا رمزنا بـ $E_D(a,b)$ لمجموعة القواسم المشتركة لـ (a,b) ، نلاحظ أن

$$D(a,b)=D(r_0,r_1)=D(r_1,r_2)=\ldots=D(r_{(m-1)},0).$$

وبما أن $D(r_{(m-1)},0)$ هي مجموعة القواسم المشتركة لـ $r_{(m-1)}$ و 0 إذن فهي قواسم $r_{(m-1)}$. أخر باقي غير معدوم $r_{(m-1)}$ هوقاسم مشترك أكبر لـ (a,b) . ونكتب $\operatorname{pgcd}(a,b)=r_{(m-1)}$.
(آخر باق غير معدوم الناتج عن القسمة الإقليدية). تلخيصا لما سبق لدينا النظرية التالية:

نظرية 1.6.5: إذا كان $a,b\in\mathbb{K}[X]$ مع $b\neq 0$ و $\mathbb{K}$ حقل تبديلي فإن أخر باقي غير معدوم في عملية القسمة المتوالية السابقة لـ a على b هو قاسم مشترك أكبر لـ a و b.
ونرمز له بالرمز $\operatorname{pgcd}(a,b)=r_{(m-1)}$.

ملاحظة 1.6.5

إذا كان $pgcd(a,b)=r_{(m-1)}$ فإن كذلك $pgcd(a,b)=\alpha r_{(m-1)}$ مع $\alpha\in\mathbb{K}$ و $\alpha\neq 0$ و α قابل للقلب .

نظرية 2.6.5: إذا كان $a,b\in\mathbb{K}[X]$ مع $b\neq 0$ ($\mathbb{K}$ حقل تبديلي) و $pgcd(a,b)=d$ فإنه يوجد زوج $(\vartheta,\nu)\in\mathbb{K}[X]$ حيث: $\vartheta(X)a(X)+\nu(X)b(X)=d(X)$.
(إذا كان كثير الحدود $d(X)$ ثابتا نقول إن a و b أوليان فيما بينهما)

ملاحظة 2.6.5

الزوج (ϑ,ν) المذكور في النظرية 6.5 غير وحيد.

مثال 1.6.5

نبحث عن القاسم المشترك الأكبر لكثيري حدود

$$a=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1 \text{ و } b=x^4+2x^3+x+2$$

لدينا: $\deg(r_1)=4<5=\deg(r_0)$

المقسوم a	القاسم b	الباقي r
$r_0=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$	$r_1=x^4+2x^3+x+2$	$r_2=-x^3-1$
$r_1=x^4+2x^3+x+2$	$r_2=-x^3-1$	$r_3=0$

ومنه

$$pgcd(a,b)=\frac{r_1}{\text{معامل } r_1}=x^3+1$$

7.5 نظرية بيزوت

نظريـة 1.7.5: تكون كثيرات حدود $A_1, A_2, \dots, A_n$ من $\mathbb{K}[X]$ أولية فيما بينها إذا وفقط إذا وجدت كثيرات حدود $U_1, U_2, \dots, U_n$ من $\mathbb{K}[X]$ حيث: $A_1U_1 + A_2U_2 + \cdots + A_nU_n = 1$.

تطبيق محلول 1.7.5

ليكن $A(x) = x^3 + x^2 + 1$ و $B(x) = x^2 + 1$ من $\mathbb{R}[x]$

1. عين $\text{pgcd}(A, B) = D$
2. أوجد V_0 و U_0 يحققان: $AU_0 + BV_0 = D$

الحل:

نقوم بالقسمة الإقليدية:

$$
\begin{array}{llllll|lll}
A & \to & x^3 & +x^2 & & +1 & x^2 & +1 & \leftarrow B \\
\cline{7-8}
 & & -x^3 & \downarrow & -x & \downarrow & x & +1 & \leftarrow Q_1 \\
\cline{3-6}
 & & & x^2 & -x & +1 & & & \\
 & & & -x^2 & \downarrow & -1 & & & \\
\cline{4-6}
r_2 & & & \to & -x & & & &
\end{array}
$$

نواصل القسمة:

$$
\begin{array}{llll|ll}
B & \to & +x^2 & +1 & -x & \leftarrow r_2 \\
\cline{5-5}
 & & -x^2 & \downarrow & -x & \leftarrow Q_2 \\
\cline{3-3}
r_3 & & \to & +1 & &
\end{array}
$$

نواصل القسمة:

$$
\begin{array}{lll|ll}
r_2 & \to & -x & +1 & \leftarrow r_3 \\
\cline{4-4}
 & & +x & -x & \leftarrow Q_3 \\
\cline{3-3}
r_4 & \to & 0 & &
\end{array}
$$

ومنه أخر باقي غير معدوم هو: 1.

إذن:

$$\text{pgcd}(A, B) = D = 1$$

كما يمكن تلخيص ذلك في الجدول التالي:

المقسوم A	القاسم B	الباقي R
$r_0 = x^3 + x^2 + 1$	$r_1 = x^2 + 1$	$r_2 = -x$
$r_1 = x^2 + 1$	$r_2 = -x$	$r_3 = 1$
$r_2 = -x$	$r_3 = 1$	$r_4 = 0$

نبحث عن V_0 و U_0 يحققان:

$$AU_0 + BV_0 = D$$

لدينا:

$$\begin{aligned} B = (-x)(-x)+1 &\Rightarrow B+(+x)(-x) = 1 \\ &\Rightarrow B+(+x)[A-B(x+1)] = 1 \\ &\Rightarrow B+xA-Bx^2-Bx = 1 \\ &\Rightarrow A[x]+B[1-x-x^2] = 1 \\ &\Rightarrow AU_0+BV_0 = 1 \end{aligned}$$

نتيجة 1.7.5

لتكن A, B, C كثيرات حدود من $\mathbb{K}[X]$ ، عندئذ:
إذا كان كثير الحدود A أولي مع كل من B و C فإن A أولي مع الجداء BC.

8.5 نظرية غوص

نظرية 1.8.5: لتكن A, B, C كثيرات حدود من $\mathbb{K}[X]$.
- إذا كان كثير الحدود A يقسم كثير الحدود BC و أولي مع B فإن A يقسم C .

نتيجة 1.8.5

لتكن $B_1, B_2, \ldots, B_n$ كثيرات حدود من $\mathbb{K}[X]$ أولية فيما بينها مثنى مثنى. إذا كان A كثير حدود من $\mathbb{K}[X]$ يقبل القسمة على كل من كثيرات الحدود $B_1, B_2, \ldots, B_n$ فإن A يقبل القسمة على الجداء $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

9.5 قسمة كثير حدود وفق القوى المتزايدة

في ما يلي نعتبر $\mathbb{K}$ حقلا تبديليا.
تستعمل عملية القسمة وفق القوى المتزايدة وبكثرة أثناء تفكيك كسر ناطق إلى مجموع عوامل بسيطة، كما تستعمل أيضا في النشور المحدودة وحساب بعض المجاميع التكاملات ....

نظريــة 1.9.5: ليكن n عدد طبيعي، A كثير حدود كيفي و B كثير حدود حيث $B \neq 0$.
إذن توجد ثنائية وحيدة (Q,R) من كثيرات الحدود في $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ حيث
$A = BQ + X^{(n+1)}R$ مع $\deg(Q) \leq n$
نسمي تعيين Q و R عملية القسمة وفق القوى المتزايدة لكثير الحدود A على B حتى المرتبة n. أما $X^{n+1}r$ فيسمى باقي القسمة ويسمى Q حاصل القسمة عند المرتبة n.

برهان. [9]

1. لنبدأ بالوحدانية. نفرض أن:

$$A = BQ + X^{(n+1)}R = BQ' + X^{(n+1)}R' \text{ مع } \deg(Q) \leq n \text{ و } \deg(Q') \leq n$$

نستنتج أن:

$$B(Q - Q') = X^{(n+1)}(R' - R)$$

نفرض جدلا أن: $R' \neq R$.

$$\begin{aligned} n+1 \leqslant w(X^{(n+1)}(R'-R)) &= w(B(Q-Q')) \\ &= w(B) + w(Q-Q') \\ &\underset{Q\neq Q'}{\leqslant} \deg(Q-Q') \leqslant n \end{aligned}$$

وهذا تناقض . نستنتج أن: $R = R'$ وبالتالي: $Q = Q'$ لأن $B \neq 0$.

2. لنثبت الوجودية. بالإستدلال بالتراجع على n نفرض أن:

$$A = \sum_{k=0}^{k=m} a_k x^k \text{ و } B = \sum_{k=0}^{k=r} b_k x^k \text{ مع } b_0 \neq 0$$

(ا) إذا كان: $n = 0$. نضع: $Q = \dfrac{a_0}{b_0}$ فيكون $(A - BQ)(0) = 0$.
ومنه:

$$X | (A - BQ)$$

ويوجد R يحقق:

$$(A - BQ) = XR \text{ و } \deg Q \leqslant 0$$

(ب) لنفترض إذن النتيجة صحيحة حتى الرتبة $n-1$ يعني أنه يوجد (Q_1, R_1) يحقق:

$$A = BQ_1 + X^{(n)}R_1 \text{ مع } \deg(Q_1) \leq n-1$$

واستناداً إلى صحة النتيجة عند $n=0$ فإنه يوجد زوج (Q_2,R_2) يحقق:

$$R_1 = BQ_2 + XR_2 \text{ مع } \deg(Q_2) \leq 0$$

فإذا وضعنا:

$$Q = Q_1 + X^{(n)}Q_2 \text{ و } R = R_2$$

نجد:

$$A = BQ + X^{(n+1)}R \text{ مع } \deg(Q) \leq n$$

و.هـ.م

□

مثال 1.9.5

نجز فيما يلي مثالاً على عملية قسمة وفق القوى المتزايدة حتى المرتبة 3 كثير الحدود

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2+4x^2+x^3 & 1+2x+3x^2 \\ \cline{3-3}
 & 2+4x+6x^2 & 2-4x+6x^2 \\ \cline{2-2}
 & -4x-2x^4+x^3 & \\
 & +4x+4x^2+12x^3 & \\ \cline{2-2}
 & 6x^2+13x^3 & \\
 & -6x^2-12x^3-18x^4 & \\ \cline{2-2}
 & x^3-18x^4 & \\
 & -x^3-2x^4-3x^5 & \\ \cline{2-2}
x^4R \quad \rightarrow & -20x^4-3x^5 &
\end{array}$$

$$\boxed{2+4x^2+x^3 = (1+2x+3x^2)(2-4x+6x^2)+x^4(-20-3x)}$$

ملاحظة 1.9.5

كان بالإمكان الاستمرار في إجراء عملية القسمة إلى ما بعد الرتبة 3 .

10.5 إشتقاق كثيرات الحدود

في مايلي $\mathbb{K}$ حقل تبديلي مميزته معدومة.

11.5 مشتق كثير حدود

تعريف 1.11.5:
ليكن $P(X)=a_nX^n+\cdots+a_1X+a_0=\sum_{k=0}^{k=n}a_kx^k$ كثير حدود في $\mathbb{K}[X]$. نسمي مشتق كثير الحدود $P(X)$ كثير الحدود $P'(X)$ من $\mathbb{K}[X]$ و المعرف كمايلي:

$$\boxed{P'(X)=na_nX^{n-1}+\cdots+2a_2X+a_1=\sum_{k=1}^{k=n}ka_kx^{k-1}}$$

ملاحظة 1.11.5

1. إذا كان $P(X)$ كثير حدود ثابت فإن $P'(X)=0$.
2. إذا كان $\deg(P)=n\geq 1$ فإن $a_n\neq 0$ وبالتالي $na_n\neq 0$ وهو مايعني أن $\deg(P')=n-1$.

تعريف 2.11.5:
ليكن $P\in\mathbb{K}[X]$ و $n\in\mathbb{N}$. نعرف المشتق من المرتبة n لكثير الحدود P بالتراجع حيث نضع:

$$P^{(n)}=\left(P^{(n-1)}\right)' \text{ و } P^{(0)}=P$$

نظرية 1.11.5:
ليكن $P,Q\in\mathbb{K}[X]$ و $\beta\in\mathbb{K}$ و $n\in\mathbb{N}^*$. لدينا:

1. $(P+Q)'=P'+Q'$
2. $(\beta P)'=\beta P'$
3. $(PQ)'=P'Q+PQ'$
4. $(P^n)'=nP'P^{n-1}$
5. $(PQ)^{(n)}=\sum_{k=1}^{k=n}C_n^kP^kQ^{n-k}$ مع $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

12.5 نشر تايلر

نظريـة 1.12.5:
ليكن P كثير حدود من $\mathbb{K}[X]$ حيث $\deg(P)=n\geq 1$ و $a\in\mathbb{K}$. لدينا:

$$\begin{aligned} P(X) &= P(a)+(X-a)P'(a)+\frac{(X-a)^2}{2!}P^{('')}(a)+\ldots+\frac{(X-a)^n}{n!}P^{(n)}(a) \\ &= \sum_{k=0}^{k=n}\frac{(X-a)^k}{k!}P^{(k)}(a) \end{aligned} \tag{1.5}$$

برهان. ليكن $P(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$ كثير حدود في $\mathbb{K}[X]$ مع $a_n\neq 0$.
لنجد النشر ((1.5)) أولا من أجل $a=0$.
لدينا:

$$P'(X)=a_1+2a_2X+\cdots+na_nX^{n-1}\Rightarrow P'(0)=a_1$$

و

$$P^{(k)}(X)=k!a_k+\cdots+[n(n-1)\ldots(n-k+1)]a_nX^{n-k}\Longrightarrow P^{(k)}(a)=k!a_k$$

و أيضا:

$$P^{(n)}(X)=n!a_n\Longrightarrow P^{(n)}(a)=n!a_n$$

ومنه نجد:

$$a_0=P(0),a_1=P'(0),a_2=\frac{1}{2!}P''(0),a_k=\frac{1}{k!}P^{(k)}(0),a_n=\frac{1}{n!}P^{(n)}(0)$$

نعوض a_i، $0\leq i\leq n$ بما يساويها فنحصل على:

$$\boxed{P(X)=P(0)+XP'(0)+\frac{X^2}{2!}P''(0)+\cdots+\frac{X^n}{n!}P^{(n)}(0)=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{X^k}{k!}P^{(k)}(0)}$$

تسمى هذه العبارة الاخيرة نشر ماك لوران لكثير الحدود $P(X)$.
نضع $Q(X)=P(X+a)$، حسب نشر ماك لوران على $Q(X)$ نجد:

$$Q(X)=Q(0)+YQ'(0)+\frac{Y^2}{2!}Q''(0)+\cdots+\frac{Y^n}{n!}Q^{(n)}(0)$$

بما أن

$$Q(Y)=P(Y+a)=a_0+a_1(Y+a)+\cdots+a_n(Y+a)^n$$

لدينا

$$Q(0)=P(a),\ Q'(0)=P'(a),\ \ldots,\ Q^{(n)}(0)=P^{(n)}(a)$$

وبالتالي نحصل على نشر تايلر لكثير الحدود $P(X)$ وذلك بوضع $Y+a=X$ كمايلي

$$P(X) = P(a) + (X-a)P'(a) + \cdots + \frac{(X-a)^n}{n!}P^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(X-a)^k}{k!}P^{(k)}(a)$$

□

13.5 تمارين الفصل الخامس

التمريـــن 5.1.

أوجد كثير الحدود P الذي درجته اقل أويساوي 3 حيث: $P(0)=1$ ، $P(1)=0$ ، $P(-1)=-2$ و $P(2)=4$.

التمريـــن 5.2.

ماهو الشرط الذي تحققه الاعداد الحقيقة a,b,c بحيث x^4+ax^2+bx+c يقبل القسمة على x^2+x+1 ؟

التمريـــن 5.3.

أوجد حاصل و باقي قسمة كثير الحدود A على B في كل حالة من الحالات التالية:

1. $A(x)=x^4+3x^2+x+1,$ $B(x)=2x^2+x+1$.
2. $A(x)=x^3+x^2+x+1,$ $B(x)=x^2+1$.
3. $A(x)=$ $x^n\sin\theta-x\sin n\theta+\sin(n-1)\theta,$ $B(x)=x^2-2x\cos\theta+1$.
4. $A(x)=x^{2n}-2x^n\theta+1,$ $B(x)=x^2-2x\cos\theta+1$.
5. $A(x)=x^4+x^3-x^2-x+1,$ $B(x)=x^2-4x+1$.
6. $A(x)=x^6-5x^5-2x^4-3x^3,$ $B(x)=-x^3+x^2-x$.

التمريـــن 5.4.

أوجد $D=pgcd(A,B)$ في كل حالة من الحالات التالية:

(i) $A(x)=2x^4+11x^3+10x^2-2x-3, B(x)=2x^3+5x^2+5x+3$

(ii) $A(x)=x^5-2x^4+2x^3-3x^2+2, B(x)=x^4-2x^3+7x^2-4x+10$

التمريـــن 5.5.

عين باقي القسمة الإقليدية لكثير الحدود

$$A(x)=(x-3)^{2n}+(x-2)^n-2$$

حيث $n\in\mathbb{N}$ على كثير الحدود $B(x)$ في الحالات التالية:

1. $B(x)=(x-3)(x-2)$
2. $B(x)=(x-2)^2$
3. $B(x)=(x-3)^3$
4. $B(x)=(x-3)^3(x-2)^2$

التمريـــن 5.6.

أوجد قيم $m\in\mathbb{N}$ التي تجعل الحدود كثير

$$Q(x)=x^2+x+1$$

يقسم كثير الحدود

$$P(x)=(x^m+1)^m-x^m$$

التمريـــن 5.7.

أوجد القسمة وفق القوى المتصاعدة أو المتزايدة لـ A على B حتى الرتبة k في كل حالة من الحالات التالية:

(i) $A(x)=1-2x+x^3+x^4, B(x)=1+2x+x^2, k=2$

(ii) $A(x)=1+x^3-2x^4+x^6, B(x)=1+x^2+x^3, k=4$

التمريـــن 5.8.

عين كثير حدود $P(x)$ من $\mathbb{R}[x]$ درجته أصغر ما يمكن، ويقبل القسمة على X^2+1 ويكون $P(x)-1$ مضاعفاً لكثير الحدود X^3+1 .

التمريـــن 5.9.
عين كثيري حدود $p = a_0 + a_1x$ و $q = 1 + b_1x + b_2x^2$ من $\mathbb{R}[x]$ ، بحيث يكون حاصل قسمة p على q وفق القوى المتزايدة للمتغير x حتى الرتبة 3 هو: $h(x) = 1+2x+3x^2+4x^3$
عين الباقي r .

الفَصل السادس

جذور كثير حدود

مُحتوى الفَصل

1.6 جذور كثيرات الحدود 108

2.6 رتبة تضاعف جذر 109

3.6 رتبة تضاعف جذر ومشتقات كثير حدود 110

4.6 الحقل المغلق جبريا 112

5.6 كثيرات الحدود في $\mathbb{C}[X]$ 113

6.6 تمارين الفصل السادس 116

تم إعداد هذا الفصل إعتماداً على المراجع التالية: [6, 7, 9, 1]

1.6 جذور كثيرات الحدود

في كل ما يلي نعتبر $\mathbb{K}$ حقلا تبديليا.

تعريف 1.1.6:
ليكن P كثير حدود من الحلقة $\mathbb{K}[X]$. نقول أن:

$\boxed{\alpha \in K \text{ إنه جذر لـ } P \text{ إذا كان } P(\alpha)=0}$

مثال 1.1.6

إذا كان $P(X)=X^2-3$ و معرف على الحقل $\mathbb{R}[X]$ فإن $\alpha=\sqrt{3}$ جذر لـ P وذلك لأن: $\alpha \in \mathbb{R}$ و $P(\alpha)=0$.
ولكن في الحقل $\mathbb{Q}[X]$ فإن α ليس جذرا لـ P رغم أن $P(\alpha)=0$ لأن $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

النتيجة التالية توفر تعبيرا آخر لكون α جذرا لـ $P(X)$.

نظرية 1.1.6:
ليكن كثير الحدود $P \in \mathbb{K}[X]$.
$\alpha \in \mathbb{K}$ هو جذر لـ $P(X)$ إذا وفقط إذا كان $P(X)$ يقبل القسمة على كثير الحدود $X-\alpha$.

برهان.
بإجراء القسمة الإقليدية لـ $P(X)$ على $X-\alpha$ وكون $\deg(X-\alpha)=1$ يوجد $q,r \in K[X]$ بحيث: $\deg r=0$ أو $r=0$ حيث:

$$P(X)=(X-\alpha)q(X)+r(X)$$

فإذا كان α جذرا لـ $P(X)$ فإن $P(\alpha)=0$ مع $\deg r=0$ أو $r=0$ لذلك $r=0$ ومنه $P(X)$ يقبل القسمة على $X-\alpha$. هذا من جهة و من جهة أخرى، إذا كان $P(X)$ يقبل القسمة على كثير الحدود $X-\alpha$ فإن $P(X)$ من الشكل:

$$P(X)=(X-\alpha)g(X) \text{ مع } g \in \mathbb{K}[X]$$

لذلك $P(\alpha)=0$ و. هـ. م.
□

2.6 رتبة تضاعف جذر

تعريف 1.2.6:
ليكن كثير الحدود $P \in \mathbb{K}[X]$.
نسمي رتبة تضاعف جذر α لكثير حدود $P(X)$ أكبر عدد طبيعي $\mathbb{K}$ بحيث $P(X)$ يقبل القسمة على كثير الحدود $(X-\alpha)^k$.

1. إذا كان $k=1$ نقول إن α جذر بسيط لـ $P(X)$.
2. إذا كان $k>1$ نقول إن α جذر مضاعف لـ $P(X)$ ورتبة تضاعفه k.

نتيجة 1.2.6

إذا كان α جذرا مضاعفا لـ $P(X)$ ورتبة تضاعفه k فإن:

$P(X)=(X-\alpha)^k g(X)$ مع $g(\alpha)\neq 0$

(g كثير حدود).

مثال 1.2.6

في الحلقة $\mathbb{R}[X]$ لكثير الحدود $P(X)=(X-2)(X-3)^2(X+1)^4$ ثلاثة جذور $-1, 3, 2$؛ الجذر 2 بسيط أما 3 رتبة تضاعفه 2 والجذر -1 مضاعف أيضا ورتبة تضاعفه 4.

إن كان هناك أكثر من جذر لكثير حدود ما، فيمكن للنظرية السابقة أن تعمم على النحو التالي:

نظرية 1.2.6:
إذا كانت العناصر، المختلفة مثنى مثنى، $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ من الحقل $\mathbb{K}$ جذورا لكثير الحدود $P\in K[X]$ ذات رتب تضاعف $k_1,k_2,\dots,k_n$ (موجبة تماما) على الترتيب فإنه يوجد $q\in K[X]$ بحيث:

$$\boxed{P(X)=(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_n)^{k_n}q(X)}$$

ملاحظة 1.2.6

واضح، من النظرية أن: $P\neq 0$ إذا وفقط إذا $q\neq 0$ وأن

$$\deg P-(k_1+k_2+\ldots+k_n)=\deg q\geq 0$$

إذا اعتبرنا كل الجذور المختلفة لكثير حدود غير معدوم P فإن هذه المجموعة منتهية ومجموع رتب

تضاعفها هي على الأكثر مساوية لـ درجة P . لهذا، إذا كان كثير حدود درجته على الأكثر n ويقبل $n+1$ جذرا أو أكثر فهو معدوم.

نتيجة 2.2.6

إذا كان $P \in \mathbb{K}[X]$ و $\deg P \leq n$ فإن:

1. إذا كان $P(X) \neq 0$ فإن مجموع رتب تضاعف جذوره هو على الأكثر n.
2. إذا كان مجموع رتب تضاعف جذور $P(X)$ أكبر تماما من n فإن $P(X)=0$.

3.6 رتبة تضاعف جذر ومشتقات كثير حدود

في هذا الفرع نحاول إعطاء العلاقة التي تربط بين رتبة تضاعف جذر كثير حدود $P \in K[X]$ ومختلف مشتقات P ، التي هي أيضا كثيرات حدود، حيث مميزة الحقل $\mathbb{K}$ معدومة.

نظرية 1.3.6:
ليكن $\mathbb{K}$ حقلا مميزته 0 وكثير حدود $P \in \mathbb{K}[X]$.
إذا كان α جذرا لـ $P(X)$ ، رتبة تضاعفه $k>1$ فإن α جذر، لـ $P'(X)$ مشتق $P(X)$، رتبة تضاعفه $k-1$.

برهان.
ليكن α جذرا لـ $P(X)$ ، رتبة تضاعفه $k>1$.
يوجد إذن $q \in \mathbb{K}[X]$ بحيث

$$P(X)=(X-\alpha)^k q(X) \text{ مع } q(\alpha) \neq 0$$

باشتقاق P نحصل على:

$$\begin{aligned} P'(X) &= k(X-\alpha)^{k-1} q(X)+(X-\alpha)^k q'(X) \\ &= (X-\alpha)^{k-1}\left[kq(X)+(X-\alpha) q'(X)\right] \end{aligned}$$

وبالتالي، من أجل $X=\alpha$ فإن قيمة كثير الحدود داخل القوسين المعقوفتين يساوي $kq(\alpha)$ ومختلف عن 0 لأن $q(\alpha) \neq 0$ ومنه α جذر لـ P' ورتبة تضاعفه $k-1$. □

ترميز 3.6.1.

- من أجل كثير حدود P نرمز لـ P بـ $P^{(0)}$.

- ول P' مشتق P بـ $P^{(1)}$ (المشتقة الأولى لـ P)
- ول P'' المشتق الثاني لـ P بـ $P^{(2)}$ (أي $P^{(2)} = \left(P^{(1)}\right)' = P''$)
- وبصفة عامة، من أجل أي عدد طبيعي i ، $P^{(i+1)} = \left(P^{(i)}\right)'$.

نظرية 2.3.6:
ليكن $\mathbb{K}$ حقلا مميزته 0 وكثير حدود $P \in \mathbb{K}[X]$. إن القضيتين التاليتين متكافئتان:
1. α جذر لـ P رتبة تضاعفه k .
2. α جذر لـ $P^{(i)}$ من أجل $0 \leq i < k$ و $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

برهان.

1. لنثبت أن $1. \Rightarrow 2.$

ليكن α جذرا لـ P رتبة تضاعفه k . حسب النظرية 3.6 السابقة لدينا إذن α جذر لـ P' ورتبة تضاعفه $k-1$. نطبق، مرة أخرى، نفس النظرية على P' فيصبح إذن α جذرا لـ $P'' = P^{(2)}$ ورتبة تضاعفه $k-2$. وهكذا، شيئا فشيئا، نحصل على أن α جذر لـ $P^{(k-1)}$ ورتبة تضاعفه 1 (جذر بسيط)،
ولهذا

$$P(\alpha) = P^{(0)}(\alpha) = P^{(1)}(\alpha) = P^{(2)}(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \text{ و } P^{(k)}(\alpha) \neq 0$$

2. عكسيا، لنثبت أن $2. \Rightarrow 1.$

لنفرض أن: α جذر لـ $P^{(i)}$ من أجل $0 \leq i < k$ و $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.
نطبق نظرية (1.5) " تايلور" أو قاعدة " تايلور" والتي تنص على أن كل كثير حدود $q \in \mathbb{K}[X]$ من الشكل:

$$q(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$$

ومن أجل كل $\beta \in \mathbb{K}$ لدينا:

$$q(X) = q(\beta) + \frac{q'(\beta)}{1!}(X-\beta) + \frac{q''(\beta)}{2!}(X-\beta)^2 + \ldots + \frac{q^{(n)}(\beta)}{n!}(X-\beta)^n$$

بأخذ $\beta = \alpha$ و $q = P$ والتعويض في العلاقة الأخيرة ومن كون الـ k حدا الأولى معدومة بالفرض، ينتج:

$$P(X) = \frac{P^k(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k + \frac{P^{k+1}(\alpha)}{(k+1)!}(X-\alpha)^{k+1} + \cdots + \frac{P^n(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n$$

أي أن:

$$P(X) = (X-\alpha)^k \left[\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} + \frac{P^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}(X-\alpha) + \ldots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^{n-k} \right]$$

من أجل $X = \alpha$ فإن قيمة كثير الحدود داخل القوسين المعقوفتين يساوي $\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}$ مع $\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \neq 0$ ومنه α جذر لـ P ورتبة تضاعفه k . وبالتالي القضية 2. تستلزم 1. إذن التكافؤ محقق.

□

4.6 الحقل المغلق جبريا

تعريف 1.4.6:
نقول عن حقل تبديلي $\mathbb{K}$ أنه مغلق جبريا إذا كان كل كثير حدود غير ثابت في $\mathbb{K}[X]$ قَبِلَ على الأقل جذرا في $\mathbb{K}$.

مثال 1.4.6

1. $\mathbb{R}[X]$ مفتوح جبريا لأنه يوجد كثير حدود مثلا X^2+1 لا يقبل الحل في $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{C}[X]$ مغلق جبريا.

ملاحظة 1.4.6

الحقل المغلق جبريا غير منته لأنه لو كان $\mathbb{K}$ منته ويقبل n عنصر $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ، كثير الحدود $(X-a_1)(X-a_2)\ldots(X-a_n)+1$ لايقبل جذرا في $\mathbb{K}$.

نظرية 1.4.6:
ليكن $\mathbb{K}$ حقل تبديلي، الخاصيتان التاليتان متكافئتان:

1. $\mathbb{K}$ حقل مغلق جبريا.
2. كل كثير حدود غير معدوم $P \in \mathbb{K}[X]$ درجته $n > 0$ يقبل n جذر في $\mathbb{K}$.

برهان.

1. $1. \Rightarrow 2.$

لنفرض أن $\mathbb{K}$ حقل مغلق وليكن P كثير حدود من $\mathbb{K}[X]$ حيث $\deg(P)=n\geq 1$. اذن P يقبل على الأقل جذرا a_1 في $\mathbb{K}$. اذن يوجد كثير حدود $Q\in\mathbb{K}[X]$ حيث

$$P=(X-a_1)Q_1 \text{ مع } \deg(Q_1)=\deg(P)-1=n-1$$

بالتراجع نجد أن:

$$P=(X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n)Q_n \text{ حيث } \deg(Q_n)=0$$

وهو مايعني أن P يقبل n جذر في K.

2. $2. \Rightarrow 1.$ واضح من التعريف السابق .

□

5.6 كثيرات الحدود في $\mathbb{C}[X]$

نظرية (دالمبار)

نظرية 1.5.6:
كل كثير حدود في $\mathbb{C}[X]$، درجته $n\geq 1$، يقبل على الأقل جذرا في $\mathbb{C}$.

كنتيجة مباشرة لهذه النظرية: ليكن $P\in\mathbb{C}[X]$ كثير حدود مع $\deg P=n\geq 1$. بتطبيق النظرية، P يقبل على الأقل جذرا في $\mathbb{C}$ ، وليكن $\alpha_1\in\mathbb{C}$. يوجد إذن كثير حدود $P_1\in\mathbb{C}[X]$ بحيث

$$P(X)=(X-\alpha_1)P_1(X)$$

1. إذا كان $n=1$ فإن $\deg P_1=0$ و P_1 ثابت.
2. إذا كان $n>1$ فإن $\deg P_1\geq 1$ ، بتطبيق نظرية دالمبار مرة أخرى على P_1، كثير الحدود هذا يقبل بدوره على الأقل جذر في $\alpha_2\in\mathbb{C}$ ويوجد $P_2\in\mathbb{C}[X]$ بحيث:
$$P_1(X)=(X-\alpha_2)P_2(X).$$
وبالتالي $P(X)=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)P_2(X)$.
3. إذا كان $n=2$ فإن $\deg P_2=0$ و P_2 ثابت.
4. أما إذا كان $\deg P_2>2$ ، نطبق نظرية دالمبار مرة أخرى على P_2 وهكذا (بالتراجع على n)، فيوجد إذن $\lambda\in C^*$ (كثير حدود من $\mathbb{C}[X]$ ، ثابت أي درجته 0) و $\alpha_n\in\mathbb{C}$ بحيث
$$P(X)=\lambda(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n).$$

وبهذا ينتج أن كل كثير حدود من $\mathbb{C}[X]$ دجته $\deg P = n \geq 1$ يقبل n جذرا (هذه الجذور ليست بالضرورة مختلفة). بهذه الخاصية، نقول إن الحقل $\mathbb{C}$. مغلق جبريا. كما نشير إلى أن الحقل $\mathbb{R}$ ليس مغلقا جبريا.

ملاحظة 1.5.6

بما أن $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ يمكن الاستفادة من خصوصيات $\mathbb{C}[X]$ في معرفة كثير حدود من $\mathbb{R}[X]$.

نظرية 2.5.6:
إذا كان $P \in \mathbb{R}[X]$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ جذر لـ P فإن $\bar{\alpha}$ (مرافق α) جذر لـ P كذلك .

برهان.
ليكن $P \in \mathbb{R}[X]$ و $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ مع $P(\alpha) = 0$.
إذن $P(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n$.
بما أن $P(\alpha) = 0$ و $\bar{0} = 0$ فإن:

$$0 = \bar{0} = P(\alpha) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{\alpha} + \bar{a}_2\bar{\alpha}^2 + \ldots + \bar{a}_n\bar{\alpha}^n$$

ولكون $0 \leq j \leq n$, $a_j \in \mathbb{R}$ فإن $\bar{a}_j = a_j$ لذلك:

$$0 = P(\alpha) = a_0 + a_1\bar{\alpha} + a_2\bar{\alpha}^2 + \ldots + a_n\bar{\alpha}^n = P(\bar{\alpha})$$

وبالتالي $\bar{\alpha}$ جذر لـ P أيضا . لاحظ أنه من خلال البرهان لدينا: $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$.

□

نظرية 3.5.6:
إذا كان $\alpha \in \mathbb{C}$ جذرا لكثير حدود $P \in \mathbb{R}[X]$ رتبة تضاعفه k فإن $\bar{\alpha}$ مرافق α، جذر لـ P رتبة تضاعفه k .

نتيجة 1.5.6

[7] إذا أردنا تفكيك كثير حدود من $\mathbb{R}[X]$ إلى جداء عوامل أقل درجة يمكن تفكيكه في $\mathbb{C}[X]$ ثم الرجوع إلى $\mathbb{R}[X]$ وذلك بتعيين مختلف جذوره.
لهذا الغرض، ليكن $P \in \mathbb{R}[X]$ درجته n و كون $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ فإن $P \in \mathbb{C}[X]$ و من نظرية دالمبار، لدينا: $P(X)$ له n جذرا في $\mathbb{C}$ بعضها حقيقية من $\mathbb{R}$، $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ رتب تضاعفها $k_1, k_2, \ldots, k_m$ والبعض الآخر مركبة ليست حقيقية. حسب النظريتين السابقتين، مجموعة الجذور

الأخيرة مجزأة إلى جزأين (الجذور ومرافقاتها): $\beta_1, \bar{\beta}_1, \beta_2, \bar{\beta}_2, \ldots, \beta_t, \bar{\beta}_t \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ رتب تضاعفها مثنى مثنى $h_1, h_2, \ldots, h_t$. لاحظ، إذا كان $\beta_j = u_j + i v_j$ $\left(u_j, v_j \in \mathbb{R},\ v_j \neq 0,\ i^2 = -1\right)$ فإن:

$$\begin{aligned}\left(X - \beta_j\right)\left(X - \overline{\beta_j}\right) &= X^2 - \left(\beta_j - \overline{\beta_j}\right)X + \beta_j \overline{\beta_j} \\ &= X^2 - 2\mu_j X + \mu_j^2 + \nu_j^2 \\ &= \left(X - \mu_j\right)^2 + \nu_j^2\end{aligned}$$

من هذا، إذا كان معامل X^n في $P(X)$ هو a_n فبتجميع الجداءات $\left(X - \bar{\beta}_j\right)$ و $\left(X - \beta_j\right)$ ثم بنشرها في تفكيك $P(X)$ ينتج أن:

$$P(X) = a_n (X - \alpha_1)^{k_1} \ldots (X - \alpha_m)^{k_m} \left[(X - \mu_1)^2 + \nu_1^2\right]^{h_1} \ldots \left[(X - \mu_t)^2 + \nu_t^2\right]^{h_t}$$

من الكتابة الأخيرة واضح أن تفكيك $P(X)$ هو في $\mathbb{R}[X]$.

6.6 تمارين الفصل السادس

التمريـــن 6.1.
أثبت أن

$$A(x)=x^3+3x-1$$

لايقبل جذر في $\mathbb{Q}[x]$.

التمريـــن 6.2.
في $\mathbb{C}[X]$ عين العدد المركب α حتى تقبل المعادلة

$$Z^3-2Z^2+\alpha Z+3=0$$

جذرين جداؤهما يساوي 1 ثمّ حل المعادلة.

التمريـــن 6.3.

ليكن $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ و $P(x)=X^4+aX+b$.

1. بدراسة التابع

$$P\longrightarrow P(x)=X^4+aX+b$$

أوجد الشرط اللازم والكافي على (a,b) حتى لا يكون لكثير الحدود $P(x)$ جذور حقيقية.

2. أثبت أنّه يوجد كثيرا حدود حقيقيّان

$H(X)=X^2+\alpha X+\beta$ و
$Q(X)=X^2+\alpha' X+\beta'$

يحققان $P(x)=H(X)Q(X)$.

3. أوجد علاقات بسيطة بين $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ والعددين a و b. واستنتج أن $Z=\alpha'^2$ هو حل لمعادلة من الدرجة الثالثة يُطلب تعيينها.

4. في $\mathbb{C}$ حل المعادلة.

$$X^4+2X+\frac{1}{2}$$

التمريـــن 6.4.
عين قيم λ التي تكون من أجلها المعادلات التالية، في $\mathbb{C}[X]$، تقبل جذرا رتبة تضاعفه على الأقل 2

1. $X^3-3X+\lambda=0$
2. $X^3-8X^2+(13-\lambda)X-6-2\lambda=0$
3. $X^4-4X^3+(2-\lambda)X^2+2X-2=0$

التمريـــن 6.5.
عين كثير حدود $P\in\mathbb{C}[X]$ درجته 5 بحيث $P(X)+1$ يقبل 1 جذرا رتبة تضاعفه على الأقل 3 و $P(X)-1$ يقبل -1 جذرا رتبة تضاعفه على الأقل 3.

التمريـــن 6.6.
ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ عين رتبة تضاعف الجذر 1 لكثيرات الحدود التالية في $\mathbb{R}[X]$

$$\mathrm{P}(X)=X^{2n}-nX^{n+1}+nX^{n-1}-1$$
$$h(X)=X^{2n+1}-(2n+1)X^{n+1}+(2n+1)X^n-1$$
$$g(X)=X^{2n}-n^2X^{n+1}+2(n^2-1)X^n-n^2X^{n-1}+1.$$

التمريـــن 6.7.
عين قيم α التي تكون من أجلها المعادلات التالية، في $\mathbb{C}[x]$ ، تقبل جذرا رتبة تضاعفه على الأقل 2
.

$$x^3-3x+\alpha=0\ (i)$$

$$x^3-8x^2+(13-\alpha)x-6-2\alpha=0\ (ii)$$

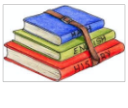
$$x^4-4x^3+(2-\alpha)x^2+2x-2=0\ (iii)$$

الفَصل السابع

تفكيك الكسور الناطقة إلى عوامل بسيطة

مُحتوى الفَصل

1.7 بناء حقل الكسور الموافق لحلقة تامة 118
2.7 حقل الكسور $\mathbb{K}[X]$ على حقل تبديلي 118
3.7 تفكيك كسر ناطق إلى مجموع عوامل بسيطة 121
4.7 الجزء الرئيسي التابع لقطب كسر ناطق 122
5.7 التفكيك في $\mathbb{R}[X]$ 123
6.7 التفكيك في $\mathbb{C}(x)$ 126
7.7 تمارين الفصل السابع 129


تم إعداد هذا الفصل إعتماداً على المراجع التالية: [6, 7, 9, 1]

سنتطرق فيما يلي إلى تقنية هامة لبناء حقل الكسور الموافق لحلقة تامة.

1.7 بناء حقل الكسور الموافق لحلقة تامة

ليكن $\mathbb{A}^* = \mathbb{A} - \{0\}$ حلقة تامة. نعرف على المجموعة $\mathbb{A}\times\mathbb{A}^*$ علاقة التكافؤ $\mathfrak{R}$ كمايلي:

$$(p,q)\mathfrak{R}(p',q') \Leftrightarrow pq' = qp'$$

وقانوني التشكيل الداخليين + و · كمايلي:

$$(p,q)+(p',q') = (pq'+p'q, qq')$$
$$(p,q)\cdot(p',q') = (pp', qq')$$

إن القانونين + و · تجميعيّان وتبديليان ويقبلأن على التوالي العنصرين الحياديين $0_{\mathbb{A}\times\mathbb{A}^*} = (0,1)$ و $1_{\mathbb{A}\times\mathbb{A}^*} =$ $(1,1)$ وأنهما متلائمتين مع علاقة التكافؤ $\mathfrak{R}$ يعني:

$$\forall X,Y,Z,T \in \mathbb{A}\times\mathbb{A}^* \quad (X\mathfrak{R}Y)\wedge(Z\mathfrak{R}T) \Rightarrow \begin{cases} (X+Z)\,\mathfrak{R}\,(Y+T) \\ (X\cdot Z)\,\mathfrak{R}\,(Y\cdot T) \end{cases}$$

تفيد هذه الخاصية في تزويد مجموعة صفوف التكافؤ $\mathfrak{F}_{\mathfrak{R}} = \mathbb{A}\times\mathbb{A}^*/\mathfrak{R}$ بقانوني الجمع والضرب المتوافقين مع ما سبق فنحصل على حقل تبديلي نسميه حقل كسور الحلقة التامة .

نرمز إلى صف التكافؤ $(\dot{p,q})$ بالرمز: $\frac{p}{q}$ ونسميه كسراً بسطُه p ومقامه q.

ويكون التطبيق:

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{A} & \to & \mathfrak{F}_{\mathfrak{R}} \\ & p & \mapsto & \frac{p}{1} \end{array}$$

تشاكلاً حلقيّاً متبايناً،

يفيدنا بالمطابقة بين عناصر $\mathbb{A}$ وعناصر $f(\mathbb{A})$ فنقول عندئذ أن: $\mathbb{A}$ حلقة جزئية من $\mathfrak{F}_{\mathfrak{R}}$.

مثال 1.1.7

إذا كانت $\mathbb{A}$ هي حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ كان حقل كسور الحلقة $\mathbb{Z}$ هو حقلة الكسور $\mathbb{Q}$.

2.7 حقل الكسور $\mathbb{K}[X]$ على حقل تبديلي

ليكن $\mathbb{K}$ حقلاً تبديلياً، ولتكن $\mathbb{K}[X]$ حلقة كثيرات الحدود لمتغير واحد $\mathbb{K}$ لقد وجدنا عند دراسة كثيرات الحدود أن الحلقة $\mathbb{K}[X]$ حلقة تامة، ومن ثمّ نحصل أن طلاقاً منها على حقل تبديلي، هو حقل كسورها $(\mathbb{K}(x),+,\times)$ ، عند تطبيق الإنشاء السابق. ومنه التعريف التالي:

تعريف 1.2.7:
نسمي حقل الكسور على حقل تبديلي $\mathbb{K}$ حقل كسور الحلقة التامة $\mathbb{K}[X]$ ونرمز إليه بالرمز $\mathbb{K}[X]$.
وإذا كان F عنصر من $\mathbb{K}[X]$ فإن ممثله هو الكسر $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ حيث $A(x)$ و $B(x)$ مع $B \neq 0$. عنصر من $\mathbb{K}[X]$ كما نسمى كثيرا الحدود $A(x)$ و $B(x)$ بسط ومقام الكسر $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ على الترتيب.

ترميز 1.7.2.

- سوف نرمز في هذا الفصل بالرمز $\mathbb{K}$ للحقل $\mathbb{R}$ أو للحقل $\mathbb{C}$ كما نستعمل $\mathbb{R}(x)$ و $\mathbb{C}(x)$ بدلا من $\mathbb{R}[x]$ و $\mathbb{C}[x]$
- نرمز لمجموعة الكسور الناطقة ذات المعاملات من الحقل $\mathbb{K}$ ، بالرمز $\mathbb{K}(x)$.

تعريف 2.2.7: ليكن $A(x)$ و $B(x)$ كثيرا الحدود من الحقل $\mathbb{K}(x)$.
نقول أن الكسر $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ غير قابل للإختزال إذا وفقط إذا كان $\operatorname{pgcd}(A(x), B(x)) = 1$.

مثال 1.2.7

- الكسر الناطق $\dfrac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2(x+1)}$ هو كسر غير قابل للإختزال في الحقل $\mathbb{R}(x)$.
- الكسر الناطق $\dfrac{x^3-1}{(x-1)(x^2+1)}$ هو كسر قابل للإختزال في الحقل $\mathbb{R}(x)$.

نظرية 1.2.7:
ليكن $P \in \mathbb{K}[x]$ قاسما مشتركا لكثيري الحدود A و B ، عندئذ:

$$\begin{cases} \exists P_1 \in \mathbb{K}[x] : \quad A(x) = P(x).P_1(x) \\ \exists P_2 \in \mathbb{K}[x] : \quad B(x) = P(x).P_2(x) \end{cases}$$

لهذا يكون

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{P(x).P_1(x)}{P(x).P_2(x)} = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$$

ونقول عندئذ إننا اختزلنا أو بسطنا الكسر الناطق $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ إلى الكسر الناطق $\dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$.

ملاحظة 1.2.7

كل كسر ناطق من $\mathbb{K}(x)$ يساوي كسرًا غير قابل للإختزال من $\mathbb{K}(x)$ ووحيد.

تعريف 3.2.7:
نقول عن الكسرين الناطقين $\frac{A(x)}{B(x)}$ و $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ من $\mathbb{K}(x)$، إنهما متساويان إذا وفقط إذا كان:

$$A(x).P_2(x) = P_1(x).B(x)$$

مثال 2.2.7

لدينا:

$$\frac{x^2-1}{(x-2)(x+1)} = \frac{x-1}{(x-2)}$$

لأن:

$$\left(x^2-1\right)(x-2) = (x-1)(x-2)(x+1)$$

تعريف 4.2.7:
ليكن $\frac{A(x)}{B(x)}$ كسرًا ناطقًا غير قابل للإختزال من الحقل $\mathbb{K}(x)$، وليكن a من الحقل K، عندئذ:

- إذا كان $B(a) \neq 0$ فإننا نقول إن $\frac{A(a)}{B(a)}$ هو قيمة الكسر الناطق $\frac{A(x)}{B(x)}$ عند a.
- إذا كان $A(a) = 0$ و $B(0) \neq 0$ ، فإننا نقول عندئذ إن a هو جذر للكسر الناطق $\frac{A(x)}{B(x)}$، ونقول عن هذا الجذر إنه ذو رتبة n $(n \in \mathbb{N}^*)$، إذا كان جذرًا لـ A رتبة تضاعفه هي n.
- إذا كان $B(a) = 0$، أي أن a جذر لكثير الحدود B، فإننا نقول إن a هو **قطب للكسر الناطق** $\frac{A(x)}{B(x)}$، ونقول عن هذا القطب إنه ذو رتبة n، $n \in \mathbb{N}^*$، إذا كان جذرًا لـ B رتبة تضاعفه هي n.
وأكثر من ذلك فإذا كان a من الحقل $\mathbb{K}$ قطبا رتبته 1، للكسر الناطق $\frac{A(x)}{B(x)}$ (غير القابل للإختزال من الحقل $\mathbb{K}(x)$)، عندئذ، نقول إن a **قطب بسيط** للكسر الناطق $\frac{A(x)}{B(x)}$.

مثال 3.2.7

في الحقل $\mathbb{R}[x]$. ليكن الكسر الناطق التالي:

$$F(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-3)}$$

لدينا:

i. $F(0) = \frac{-1}{6}$ هو قيمة الكسر عند 0.

ii. -1 هو جذر مضاعف لـ الكسر $F(x)$ لأن $F(-1) = 0$ و $B(-1) \neq 0$.

iii. $-2, 3$ هي أقطاب بسيطة للكسر $F(x)$.

3.7 تفكيك كسر ناطق إلى مجموع عوامل بسيطة

نظرية 1.3.7: إن كل كسر ناطق $\frac{A(x)}{B(x)}$ من الحقل $\mathbb{K}(x)$ يكتب بطريقة وحيدة على الشكل:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = E(x) + \frac{r(x)}{B(x)}$$

حيث: E و r هما كثيرا حدود من الحلقة $\mathbb{K}[x]$ و $(\deg r < \deg B$ أو $r = 0)$.
و يدعى كثير الحدود $E(x)$ **الجزء الصحيح** للكسر الناطق $\frac{A(x)}{B(x)}$. و الكسر $\frac{r(x)}{B(x)}$ **بالكسر الذاتي** (الفعلي) للكسر الناطق $\frac{A(x)}{B(x)}$.

برهان.

1. إذا كان: $\deg A < \deg B$، فإن القضية محققة، يكفي أخذ: $E = 0$ و $r = A$.

2. إذا كان: $\deg A \geq \deg B$، فبإجراء القسمة الإقليدية لكثير الحدود A على كثير الحدود B، يوجد كثيرا حدود E و r وحيدان من $\mathbb{K}[x]$ بحيث: $\deg r < \deg B \quad \wedge \quad A(x) = E(x) \cdot B(x) + r(x)$ ومنه:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = E(x) + \frac{r(x)}{B(x)}$$

ولكون كثيري الحدود E و r وحيدين، فإن الكتابة الأخيرة وحيدة.

$\square$

ملاحظة 1.3.7

إذا كان $E=0$ أي أن $\deg A<\deg B$، فإننا نقول إن الكسر الناطق $\frac{A(x)}{B(x)}$ ليس له جزء صحيح .

مثال 1.3.7

1. إن الجزء الصحيح للكسر الناطق

$$\frac{x^7+2x^6+3x^5+4x^4+5x^3+6x^2+7x+8}{x^4+3x^2+5}$$

هو

$E(x)=x^3+2x^2-2$ وذلك لأن:

$$\frac{x^7+2x^6+3x^5+4x^4+5x^3+6x^2+7x+8}{x^4+3x^2+5}=x^3+2x^2-2+\frac{2x^2+7x+18}{x^4+3x^2+5}$$

2. إن الجزء الصحيح للكسر الناطق

$$\frac{x^7-2x^3+3x^2-1}{x^9+2x^3+1}$$

معدوم $\left(E(x)=0\right)$ وذلك لأن:

$$6=\deg\left(x^7-2x^3+3x^2-1\right)<\deg\left(x^9+2x^3+1\right)=9$$

4.7 الجزء الرئيسي التابع لقطب كسر ناطق

نظرية 1.4.7:

ليكن $\frac{A(x)}{B(x)}$ كسرا ناطقا غير قابل للإختزال من الحقل $\mathbb{K}(x)$، وليكن $a\in\mathbb{K}$ قطبا له من الرتبة n بحيث $n\in N^*$ مع $B(x)=(x-a)^n.H(x)$ و $H(a)\neq 0$، $A(a)\neq 0$ و $H\in\mathbb{K}[x]$، عندئذ فإن:

$$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{a_1}{(x-a)}+\frac{a_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{a_n}{(x-a)^n}+\frac{r(x)}{H(x)} \tag{1.7}$$

حيث $r\in\mathbb{K}[x]$، وهذه الكتابة وحيدة.

برهان.
بما أن $B(x) = (x-a)^n.H(x)$، $H(a) \neq 0$، $A(a) \neq 0$ و $H \in \mathbb{K}[x]$ ينتج إذن:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{1}{(x-a)^n} \cdot \frac{A(x)}{H(x)}$$

وبتغيير المتغير، نضع $y = x-a$ أي أن $x = y+a$ عندئذ، نستطيع أن نكتب:
$A(x) = A(y+a) = \varphi(y)$ و $H(x) = H(y+a) = \psi(y)$.
بقسمة كثير الحدود φ على كثير الحدود ψ وفق القوى المتزايدة للمتغير الجديد y حتى الرتبة $n-1$، نحصل على:
$\varphi(y) = \psi(y).(a_n + a_{n-1}y + ... + a_1 y^{n-1}) + y^n.\theta(y)$،
حيث $\theta \in \mathbb{K}[y]$، $a_i \in \mathbb{K}$ $(\forall i : 1 \leq i \leq n)$.
وبوضع $\theta(y) = \theta(x-a) = r(x)$ ثم بالعودة إلى المتغير الأول فإننا نجد:

$$A(x) = H(x).(a_n + a_{n-1}(x-a) + ... + a_1(x-a)^{n-1}) + (x-a)^n \cdot r(x)$$

وهو ما يعني أن: $\dfrac{A(x)}{B(x)} = \dfrac{a_1}{(x-a)} + \dfrac{a_2}{(x-a)^2} + ... + \dfrac{a_n}{(x-a)^n} + \dfrac{r(x)}{H(x)}$
والكتابة الأخيرة وحيدة، نظرا لوحدانية الثوابت $a_i \in \mathbb{K}$ $(1 \leq i \leq n)$، وكذا لوحدانية كثير الحدود $\theta \in \mathbb{K}[y]$.

□

مصطلحات 4.7.1. وفقا للنظرية 4.7 السابقة فإن:

- العدد a_1 يدعى راسب الكسر الناطق $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ عند القطب $a \in \mathbb{K}$.
- المجموع:

$$\frac{a_1}{(x-a)} + \frac{a_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{a_n}{(x-a)^n}$$

يسمى **الجزء الرئيسي** للكسر الناطق $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ التابع للقطب a. و يسمى $a_n = \dfrac{A(a)}{H(a)}$. (لإثبات ذلك، يكفي ملاحظة أن: $a_n = \dfrac{\varphi(0)}{\psi(0)} = \dfrac{A(a)}{H(a)}$).

نظرية 2.4.7:
الجزء الصحيح لمجموع كسرين ناطقين يساوي مجموع جزئيهما الصحيحين

برهان. يترك للطالب.

□

5.7 التفكيك في $\mathbb{R}[X]$

تفكيك كسر ناطق إلى مجموع عناصر بسيطة في الحقل $\mathbb{R}(x)$ من النوع الثاني

نظريـة 1.5.7: لنعتبر الكسر الناطق $\frac{A(x)}{B(x)}$ مع: $\deg A < \deg B$، A و B من الحلقة $\mathbb{R}[x]$، بحيث: $B(x) = (x^2+bx+c)^n$، $n \in N^*$ و $\Delta = b^2 - 4c < 0$.
عندئذ، فإنه توجد ثوابت $\alpha_i \in \mathbb{R}$ و $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(\forall i : 1 \le i \le n)$ بحيث:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{(x^2+bx+c)} + \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{\alpha_n x + \beta_n}{(x^2+bx+c)^n} \tag{2.7}$$

وهذه الكتابة وحيدة.

برهان.
سوف نبرهن على صحة هذه القضية بالتراجع على العدد الطبيعي $n \in \mathbb{N}^*$.
أولاً: من أجل $n = 1$، يصبح لدينا $B(x) = x^2+bx+c$، ولكن $\deg A < \deg B$ (فرضاً)، إذن: $\deg A < 2$، أي أن: $A(x) = \alpha x + \beta$ مع $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
ومنه: $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{\alpha x + \beta}{(x^2+bx+c)}$ (أي أن القضية محققة من أجل $n = 1$).
ثانياً: نفرض الآن صحة القضية من أجل $n-1$، ولنثبت صحتها من أجل n.
لدينا إذن: $B(x) = (x^2+bx+c)^n$، $n \in N^*$ والمميز $\Delta = b^2 - 4c < 0$
و $\deg A < \deg B$، ومنه:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A(x)}{(x^2+bx+c)^n}$$

(نشير هنا إلى أنه من الضروري أن تكون $\deg A \ge 2$ وإلا لكان $A(x) = \alpha x + \beta$ ونحصل بالتالي على نفس القضية السابقة المبرهن على صحتها في " أولاً "، كما نشير هنا أيضا إلى أن $\deg B = 2n$).
ولكون $\deg A \ge 2$، فإنه بإجراء القسمة الإقليدية لكثير الحدود A على كثير الحدود x^2+bx+c، نجد: $A(x) = (x^2+bx+c)\cdot G(x) + (\alpha_n x + \beta_n)$،
مع $\alpha_n \in \mathbb{R}$، $\beta_n \in \mathbb{R}$، $G \in \mathbb{R}[x]$ و $\deg G = \deg A - 2$.
إذن:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{(x^2+bx+c).G(x) + (\alpha_n x + \beta_n)}{(x^2+bx+c)^n}$$

أي أن:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{G(x)}{(x^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{(\alpha_n x + \beta_n)}{(x^2+bx+c)^n}$$

ولكن: $\deg G = \deg A - 2 < \deg B - 2 = 2n - 2 = \deg((x^2+bx+c)^{n-1})$،
وهذا يعني أن الكسر الناطق $\frac{G(x)}{(x^2+bx+c)^{n-1}}$ تنطبق عليه فرضية التراجع، أي أنه توجد ثوابت

بحيث: $\alpha_i \in \mathbb{R}$ و $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(\forall i : 1 \leq i \leq n-1)$

$$\frac{G(x)}{(x^2+bx+c)^{n-1}} = \frac{\alpha_1 x+\beta_1}{(x^2+bx+c)} + \frac{\alpha_2 x+\beta_2}{(x^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1} x+\beta_{n-1}}{(x^2+bx+c)^{n-1}}$$

وبالتعويض في المعادلة 5.7 ، نحصل على:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{\alpha_1 x+\beta_1}{(x^2+bx+c)} + \frac{\alpha_2 x+\beta_2}{(x^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{\alpha_n x+\beta_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

□

تفكيك كسر ناطق إلى مجموع عناصر بسيطة في الحقل $\mathbb{R}(x)$ من النوع الأول والثاني

لنعتبر الكسر الناطق $\frac{A(x)}{B(x)}$ حيث: $\deg A < \deg B = n$ و A و B من الحلقة $\mathbb{R}[x]$.
عندئذ حسب ما رأيناه في باب كثيرات الحدود، فإنه يمكننا كتابة B على شكل الجداء التالي:

$$B(x) = \alpha_n.(x-B_1)^{r_1}\ldots(x-B_l)^{r_l}.(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{k_s} \tag{3.7}$$

حيث:

1. $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_l$ هي الجذور الحقيقية المختلفة مثنى مثنى لكثير الحدود B ودرجات تضاعفها هي على التوالي $r_1, r_2, \ldots r_l$.
2. $\Delta_i = (p_i)^2 - 4q_i < 0, \ \forall i;\ 1 \leq i \leq s$ (المميز) و $p_i,\ q_i \in \mathbb{R}$.
3. $\alpha_n \in \mathbb{R}$ هو معامل الحد الذي له أكبر درجة في كثير الحدود B و $k_1, k_2, \ldots, k_s \in \mathbb{N}$.
4.
$$\deg B = n = (r_1+r_2+\ldots+r_l) + 2.(k_1+k_2+\ldots+k_s)$$

عندئذ لدينا النظرية التالية:

نظريـة 2.5.7:
الكسر الناطق $\frac{A(x)}{B(x)}$ الذي يحقق الشروط والفرضيات السابقة يفكك بشكل وحيد إلى مجموع عوامل (عناصر) بسيطة من الحقل $\mathbb{R}(x)$ كما يلي:

$$\begin{aligned}\frac{A(x)}{B(x)} = &\frac{a_1x+b_1}{(x^2+p_1x+q_1)}+\frac{a_2x+b_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{a_{k_1}x+b_{k_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}}+\\ &\frac{a'_1x+b'_1}{(x^2+p_2x+q_2)}+\frac{a'_2x+b'_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+\cdots+\frac{a'_{k_2}x+b'_{k_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}}+\\ &\cdots+\\ &\frac{a_s^{('\ldots')}x+b_s^{('\ldots')}}{(x^2+p_2x+q_2)}+\frac{a_s^{('\ldots')}x+b_s^{('\ldots')}}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+\cdots+\frac{a_{k_s}^{('\ldots')}x+b_{k_s}^{('\ldots')}}{(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}}\\ &+\frac{c_1}{(x-\beta_1)}+\frac{c_2}{(x-\beta_1)^2}+\cdots+\frac{c_{r_1}}{(x-\beta_1)^{r_1}}+\\ &\frac{c'_1}{(x-\beta_2)}+\frac{c'_2}{(x-\beta_2)^2}+\cdots+\frac{c'_{r_2}}{(x-\beta_2)^{r_2}}+\\ &\cdots+\\ &\frac{c_l^{('\ldots')}}{(x-\beta_l)}+\frac{c_l^{('\ldots')}}{(x-\beta_l)^2}+\cdots+\frac{c_{r_l}^{('\ldots')}}{(x-\beta_l)^{r_l}}.\end{aligned}$$

حيث: تدعى الكسور الناطقة من الشكل $\frac{c_p}{(x-\beta_j)^p}$ مع: $(c_p\in\mathbb{R})$، $(1\leq p\leq r_j)$، $(\beta_j\in\mathbb{R})$، $(1\leq j\leq l)$، $r_j\in\mathbb{N}$ و $l\in\mathbb{N}$ عوامل (عناصر) بسيطة من النوع الأول.
في حين تدعى الكسور الناطقة من الشكل: $\frac{a_m.x+b_m}{(x^2+p_ix+q_i)^m}$ مع $(p_i,\ q_i\in\mathbb{R})$، $(1\leq i\leq s)$، $(a_m,\ b_m\in\mathbb{R})$، $(1\leq m\leq k_s)$، $k_s\in\mathbb{N}$ و $s\in\mathbb{N}$ عوامل (عناصر) بسيطة من النوع الثاني.

6.7 التفكيك في $\mathbb{C}(x)$

لنعتبر الكسر الناطق $\frac{A(x)}{B(x)}$ حيث: $\deg A<\deg B=n$ و A و B من الحلقة $\mathbb{C}[x]$.
عندئذ حسب ما رأيناه في باب كثيرات الحدود، فإنه يمكننا كتابة B على الشكل التالي:

$$B(x)=\alpha_n.(x-z_1)^{t_1}.(x-z_2)^{t_2}\ldots(x-z_l)^{t_l}$$

حيث:

- $z_1,z_2,\ldots z_l$ هي الجذور العقدية المختلفة مثنى مثنى لكثير الحدود B ودرجات تضاعفها هي على التوالي $t_1,t_2,\ldots t_l$.

• $\alpha_n \in \mathbb{C}^*$ هو معامل الحد الذي له أكبر درجة في كثير الحدود B و $\deg B = n = (t_1 + t_2 + \ldots + t_l)$.

عندئذ فإن:

نظرية 1.6.7: الكسر الناطق $\frac{A(x)}{B(x)}$ الذي يحقق الشروط والفرضيات السابقة يفكك بشكل وحيد إلى مجموع عوامل بسيطة من الحقل $\mathbb{C}(x)$ كما يلي:

$$\begin{aligned}\frac{A(x)}{B(x)} &= \frac{a_1}{(x-z_1)} + \frac{a_2}{(x-z_1)^2} + \cdots + \frac{a_{t_1}}{(x-z_1)^{t_1}} \\ &+ \frac{a'_1}{(x-z_2)} + \frac{a'_2}{(x-z_2)^2} + \cdots + \frac{a'_{t_2}}{(x-z_2)^{t_2}} \\ &+ \cdots + \\ &+ \frac{a'^{\ldots\prime}_1}{(x-z_l)} + \frac{a'^{\ldots\prime}_2}{(x-z_l)^2} + \cdots + \frac{a'^{\ldots\prime}_{t_l}}{(x-z_l)^{t_l}}\end{aligned} \tag{4.7}$$

حيث: $(a_p,\ a'_p\ ,\ldots a''_p \in \mathbb{C})$، $(1 \le p \le t_j)$ و $(1 \le j \le l)$.

ملاحظة 1.6.7

كون أن كل كثير حدود (غير ثابت) من $\mathbb{C}[x]$، يحلل حتماً إلى جداء كثيرات حدود من الدرجة الأولى على $\mathbb{C}$. فإن تفكيك كسر ناطق من الحقل $\mathbb{C}(x)$ إلى مجموع عناصر بسيطة ، لا تظهر إلا عناصر بسيطة من النوع الأول.

نتيجة 1.6.7

في التفكيك (4.7) أعلاه، إذا كان كثيرا الحدود A و B من الحلقة $\mathbb{R}[x]$ وكان القطب $z_1 \in \mathbb{C}$ مثلاً مرافقاً للقطب $z_2 \in \mathbb{C}$ في الحقل $\mathbb{C}$ ، فإن: المعامل a_1 مرافق للمعامل a'_1، المعامل a_2 هو كذلك مرافق للمعامل a'_2،...،وهكذا، المعامل a_{t_1} هو كذلك مرافق للمعامل a'_{t_l} في الحقل $\mathbb{C}$ ، هذا واضح لأنه في هذه الحالة يصبح لدينا:

$$\overline{\frac{A(x)}{B(x)}} = \overline{\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)} = \frac{A(x)}{B(x)} \text{ و } \overline{(x-z_1)^p} = (x-z_2)^p \text{ حيث } t_1 = t_2 \ge p \ge 1.$$

خلاصة

1. للحصول على الجزء الصحيح نجري قسمة إقليديّة للبسط على المقام.

2. بعد تحليل المقام إلى جداء كثيرات حدود غير قابلة للإختزال، نكتب التحليل المطلوب بدلالة ثوابت مجهولة، ثم يجري تعيين الثوابت. فإذا كانت الأقطاب بسيطة، أو مضاعفة، ولكن رتب مضاعفتها صغيرة (1 أو 2) يمكننا تعيين هذه الثوابت بتوحيد المقامات والمطابقة، إذ نحصل على جملة معادلات خطيّة. ولكن بوجه عام تعتبر هذه الطريقة آخر ما نلجأ إليه، وذلك لطول ما تتطلّبه من حسابات.

7.7 تمارين الفصل السابع

التمرين 7.1.

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ وليكن $P(x)$ من $\mathbb{C}[x]$ كثير حدود بحيث $\deg P < n$ فكك في الحقل $\mathbb{C}(x)$ الكسور الناطقة $F(x)$ التالية إلى مجموع عوامل بسيطة:

1. $$F(x) = \frac{P(x)}{X^n - 1}$$

2. $$F(x) = \frac{P(x)}{X(X-1)(x-2)\dots(X-n)}$$

التمرين 7.2.

1. ليكن $a, b \in \mathbb{R}$ و $n, m \in \mathbb{N}^*$

فكك في الحقل $\mathbb{C}(x)$ الكسور الناطقة التالية إلى مجموع عوامل بسيطة:

(ا)
$$F_1(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2}$$

(ب)
$$F_2(x) = \frac{1}{(x-2)^2(x-3)^3}$$

(ج)
$$F_3(x) = \frac{1}{x^4-1}$$

(د)
$$F_4(x) = \frac{1}{(x-a)^n(x-b)^m}$$

(ه)
$$F_5(x) = \frac{x^{2n}}{(x^2+1)^n}$$

(و)
$$F_6(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}$$

(ز)
$$F_7(x) = \frac{1}{(x+1)^7 - x^7 - 1}$$

2. ليكن $\theta \in \mathbb{R}$ و $k \in \mathbb{N}^*$

فكك في الحقل $\mathbb{R}(x)$ الكسور الناطقة التالية إلى مجموع عوامل بسيطة:

(ا)
$$G_1(x) = \frac{1}{(x^4-1)^2}$$

(ب)
$$G_2(x) = \frac{x^6 - x^2 + 1}{(x-1)^3}$$

(ج)
$$G_3(x) = \frac{x^5 + 64}{(x^2+2x+4)^3}$$

(د)
$$G_4(x) = \frac{1}{(x^3-1)^3}$$

(ه)
$$G_5(x) = \frac{1}{x^8 + x^4 + 1}$$

(و)
$$G_6(x) = \frac{1}{(x^2-1)^n}$$

(ز)
$$G_7(x) = \frac{x^2}{x^4 - 2\cos\theta\, x^2 + 1}$$

(ح)
$$G_8(x) = \frac{x^7}{(x+2)(x^2+x+1)}$$

(ط)
$$G_9(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{k!}{\prod_{i=0}^{i=k} (x-i)} \right)$$

(ي)

$$G_{10}(x)=\frac{1}{x(x^2+1)(x^2+4)\dots(x^2+n^2)}$$

التمريـــن 7.3.

1. فكك في الحقل $\mathbb{R}(x)$ الكسور الناطقة التالية إلى مجموع عوامل بسيطة:

$$1)\ \frac{x^4+9}{x^4-9},\quad 2)\ \frac{x^4+9}{x^4-1}$$
$$3)\ \frac{x^{18}-1}{x^8-1},\quad 4)\ \frac{x^4+9}{x^4-9}$$

2. استنتج تفكيك الكسور الناطقة السابقة في الحقل $\mathbb{C}(x)$.

التمريـــن 7.4.

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$.
فكك الكسر الناطق التالية إلى مجموع عوامل بسيطة في الحقل $\mathbb{C}(x)$ ثم في الحقل $\mathbb{R}(x)$.

1. $\dfrac{1}{x^n-1}$
2. $\dfrac{1}{x^{2n}+1}$

التمريـــن 7.5.

فكك الكسور الناطقة الآتية إلى مجموع عوامل بسيطة في الحقل $\mathbb{R}(x)$، مستعيناً بالإرشاد المصاحب لكل كسر:

1. $F_1(x)=\dfrac{x^2+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$

إرشادة: لاحظ أن

$$\forall x\in\mathbb{C}: F_1(-x)=F_1(x)$$

2. $F_2(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)(x^2-1)}$

إرشادة: لاحظ أن

$$\forall x\in\mathbb{C}: F_2(-x)=-F_2(x)$$

التمريـــن 7.6.

ليكن الكسر الناطق $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ من الحقل $\mathbb{C}(x)$ حيث:

$A(x)=x^3+(1-i)x^2+(1-i)x-i$ و $B(x)=x^3-ix^2+x-i$.

1. أحسب $A(i)$ و$B(i)$، ثم أوجد كسراً $F(x)$ غير قابل للإختزال يساوي الكسر الناطق $\dfrac{A(x)}{B(x)}$.
2. فكك الكسر الناطق $F(x)$ إلى مجموع عناصر بسيطة في الحقل $\mathbb{C}(x)$.

المراجع

[1] Arnaud Bodin et al., Cours de mathématiques - Première année, exo7, 2016.

[2] Daniel Perrin. Cours d'algèbre. Ellipses, 1996.

[3] François Liret et Dominique Martinais. Algèbre-1re anné-2e éditione. Dunod, 2003.

[4] Jean-Pierre Escofier. Toute l'algèbre de la Licence - 4e éd. - Cours et exercices corrigés . Dunod, 2016.

[5] Lucien Chambadal et Jean-Louis Ovaert. Cours de mathématiques. Tome 1: notion fondamental d'algébre et d'analyse. Gauthier-Villars, Paris, 1966.

[6] Stéphane Balac et Frédéric Sturm. Algèbre et analyse : Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2009.

[7] يوسف صاوله، حياة رزقي ، دروس وأعمال موجهة، قسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة القبة-الجزائر.

[8] أم هاني على، دروس في الجبر العام ، مطبوعة قسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة بوسعادة - الجزائر، 2019.

[9] عمران قوبا، الجبر 1 ، مبادئ الجبر المجرد، من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، الجمهورية العربية السورية، الإصدار الأول، الطبعة الثانية، 2017.

المدرسة العليا للأساتذة - بوسعادة
المجاهد الفريق أحمد قايد صالح
قسم: العلوم الدقيقة